MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

68. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957/58

Unveranderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 68. Bandes

Seite

ATKINSON, F.V., Estimation of an Eigen-Value Occurring in a Stability Problem . . 82

BAUMSLAG, G., Finite Factors in Infinite Ascending Derived Series 465

BLACKBURN, N., Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen 422

BOAS jr., R. P., Growth of Derivatives of Entire Functions 296

CARLITZ, L., The Bilinear Generating Function for Hermite Polynomials in Several Variables 284

CHEN YUNG-MING, Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems 227

COLLINGWOOD, E. F., Addendum: On sets of maximum indetermination of analytic functions 498

DINGHAS, A., Über eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus 111

DINGHAS, A., Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche 299

FAN, K., Existence Theorems and Extreme Solutions for Inequalities Concerning Convex Functions or Linear Transformations 205

GAIER, D., Über ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Lückenreihen 488

HELLWIG, G., Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. III 325

HUPPERT, B., Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen 126

LORENTZ, G. G., und K. ZELLER, Über Paare von Limitierungsverfahren 428

MCCARTHY, P. J., On Indefinite Ternary Genera of One Class 290

MIKOLÁS, M., Über gewisse Lambertsche Reihen. I: Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel 100

MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA, On injective modules 217

NARAIN, R., Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function 272

NITSCHE, J., Über die isolierten Singularitäten der Lösungen von $\Delta u = e^u$ 316

PARAMESWARAN, M. R., Some product theorems in summability 19

PETERSEN, G. M., Sequences of Iterations 151

PUPPE, D., Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I 367

PUPPE, D., Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. II 407

RAGAB, F. M., Some Formulae for the Product of Bessel and Legendre Functions 338

RIBENBOIM, P., Le théorème d'approximation pour les valuations de KRULL 1

Sah, C.-H., On a generalization of finite nilpotent groups 189

Saksena, K. M., On a generalized Laplace integral 267

Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. II 27

Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III 245

Stein, S. K., A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve 282

Stöhr, A., Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Straßennetz 61

Suschowk, D., Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung, Tschebyscheffsche Polynome und Legendresche Funktionen 2. Art . 340

Tachikawa, H., Duality Theorem of Character Modules for Rings with Minimum Condition 479

Thoma, E., Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen 153

Vidav, I., Über die Darstellung der positiven Funktionale 362

Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI 439

Vries, H. de, and A. B. de Miranda, Groups with a small number of automorphisms 450

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 1—18 (1957)

Le théorème d'approximation pour les valuations de KRULL

Par

P. RIBENBOIM *)

Le présent travail est dédié à la théorie des valuations de KRULL, c'est-à-dire, les valuations généralisées qu'il a introduit en 1932 dans son mémoire „Allgemeine Bewertungstheorie". KRULL a obtenu les premiers résultats intéressants sur ces valuations et ses applications à la théorie des corps ordonnés et des anneaux intégralement clos. Depuis, les méthodes de cette théorie ont été appliquées à l'étude des groupes abéliens totalement ordonnés par différents auteurs. Une analyse de ces questions nous a permis de remarquer que toute théorie de corps valués au sens de KRULL qui soit arithmétiquement complète doit prendre en considération au même temps que la valuation donnée, toutes les valuations moins fines ainsi que les valuations qu'elle determine sur leurs corps des restes; ce n'est que de cette façon que tous les idéaux premiers (et non seulement l'idéal maximal) interviennent. D'ailleurs, une telle prise de position est parfaitement naturelle et justifiée. De ce point de vue, il est possible d'étendre les résultats déjà obtenus par KRULL aux valuations associées à la valuation donnée. Parmi les résultats qui se laissent généraliser, il y a le théorème d'approximation. Dans ce travail nous obtenons essentiellement le théorème d'approximation pour des ensembles finis de valuations (non nécessairement deux à deux indépendantes). Ultérieurement nous espérons publier d'autres résultats sur la théorie des valuations de KRULL, et en particulier nous examinerons la notion de corps complet et maximal pour une valuation de KRULL, ainsi que la théorie du prolongement des valuations de KRULL à une extension algébrique finie, en abordant les questions d'inértie, ramification et décomposition.

Pour faciliter la lecture, nous rappelons au paragraphe 1 les théorèmes de composition et décomposition de valuations, lesquels sont essentiels dans tout cet article.

Au paragraphe 2 nous considérons un corps K, muni d'un nombre fini de valuations, sur lesquelles nous ne faisons aucune hypothèse restrictive; en particulier, elles peuvent avoir rang arbitraire et ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Le résultat principal est le théorème d'approximation (au voisinage de 0). Pour ces considérations, la notion de «arbre» engendré par un ensemble fini de valuations joue un rôle capital. L'arbre en question se définit comme étant l'ensemble ordonné par la relation «moins fine» formé des valuations qui sont bornes inférieures de valuations de

*) Boursier du Conselho Nacional de Pesquizas, Rio de Janeiro, Brasil.

l'ensemble donné (cette terminologie s'accorde avec de BIRKHOFF, usuelle dans la théorie des réticulés, car pour toute valuation w d'un corps K l'ensemble des valuations de K moins fines que w est totalement ordonné selon la relation «moins fine»). A chaque arbre nous associons sa longueur, définie comme étant le maximum des longueurs des «chaînes» de l'arbre, et ensuite nous établissons une technique de démonstration par induction sur la longueur des arbres. En particulier, si les valuations données sont deux à deux indépendantes, l'arbre engendré possède longueur 2. C'est avec cette technique que nous pouvons démontrer le théorème d'approximation (au voisinage de 0): donnés les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K et les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ appartenant respectivement aux groupes des valeurs des valuations données, alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ si et seulement si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est «compatible» (dans un sens naturel à être précisé).

Au paragraphe 3 nous généralisons le théorème précedent dans le sens suivant: données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K, des éléments $b_1, \ldots, b_r$ de K et un élément $a \in K$, non nul, le théorème determine des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que, relativement aux valuations données, x soit aussi «proche» des éléments $b_1, \ldots, b_r$, que a l'est de l'élément 0. La démonstration de ce théorème exige une préparation plus délicate, avant l'emploi de la technique de démonstration par induction sur la longueur de l'arbre engendré par les valuations données.

Ayant obtenu ces résultats fondamentaux, nous pouvons démontrer le théorème 6, qui décrit l'arithmétique d'un anneau intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation. Enfin, de lemme 11 montre l'existence de solution de tout système fini de congruences deux à deux compatibles, même lorsque les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Le théorème 6 et le lemme 11 généralisent les résultats correspondants indiqués par KRULL dans son mémoire déjà cité, et se démontrent à partir du théorème d'approximation sous forme générale.

L'auteur exprime ses remerciements au Professeur KRULL, par les fructueuses discussions échangées pendant l'élaboration de ce travail.

1. Pour une valuation w d'un corps K, nous noterons en général par A son anneau de valuation, $\mathfrak{p}^0$ l'idéal maximal de A, Γ son groupe des valeurs, $\mathfrak{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ son corps des restes, E le groupe multiplicatif des unités de A. De même, on emploiera des notations analogues pour une valuation w'.

Lemme 1. Si A est un anneau de valuation du corps K, si $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p} \subset A$, où $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}$, sont des idéaux premiers, alors*):

1) $\mathfrak{p}_1 = A_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}_1$ est un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$ (en particulier, $\mathfrak{p} = A_{\mathfrak{p}}\ \mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, donc $\mathfrak{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ est un corps).

2) $A_{\mathfrak{p}_1} = (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_1}$.

3) $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_1 \cong (A/\mathfrak{p}_1)_{(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1)}$.

*) $A_{\mathfrak{p}}$ désigne l'anneau de fractions de A défini par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, et égal à l'ensemble des éléments du type x/y, avec $x, y \in A$, $y \notin \mathfrak{p}$.

Lemme 2. Si w est une valuation du corps K, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau A et l'ensemble des sous-groupes isolés Δ de Γ; cette correspondance est telle que $\mathfrak{p}$ et Δ se correspondent si et seulement si Δ est le sous-groupe de Γ engendré par les $w(x)$ lorsque $x \in A$, $x \notin \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \{x \in A \mid w(x) \notin \Delta\}$. En particulier, l'idéal premier nul correspond au sous-groupe isolé Γ, l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$ correspond au sous-groupe isolé (0).

Définition. Soient w, w' des valuations du corps K, ayant anneaux de valuations respectivement A, A'. On dit que w est moins fine que w' et on écrit $w \leq w'$ lorsque $A \supseteq A'$. On dit que w et w' sont équivalentes lorsque $A = A'$ et on écrit $w \equiv w'$.

Désormais nous identifierons deux valuations équivalentes et quand nous écrirons $w \neq w'$ cela voudra dire (sauf mention expresse du contraire) que $A \neq A'$.

Pour tout corps K, la relation $\leq$ est un ordre sur l'ensemble des valuations de K, dont le premier élément est la valuation triviale. Les valuations de rang 1, c.a.d. ayant groupe de valeurs archimédien, sont exactement les éléments minimaux, selon $\leq$, de l'ensemble des valuations non triviales du corps K.

Théorème 1. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau A d'une valuation w de K et l'ensemble des valuations $w_\mathfrak{p}$ de K, moins fines que w. Plus précisement:

1) donné $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ est l'anneau d'une valuation $w_\mathfrak{p}$ de K, $w_\mathfrak{p} \leq w$; le groupe de valeurs de $w_\mathfrak{p}$ est Γ/Δ, ou Δ correspond biunivoquement à $\mathfrak{p}$ (lemme 2); les idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ sont exactement les idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de $A_\mathfrak{p}$; le corps des restes de K défini par $w_\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{K} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$; enfin, on a la formule $w_\mathfrak{p} = \theta_\mathfrak{p} \circ w$ où $\theta_\mathfrak{p}$ est l'homomorphisme canonique de Γ sur Γ/Δ.

2) toute valuation w' de K, $w' \leq w$, est du type $w_\mathfrak{p}$, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ (éventuellement nul) de l'anneau A.

3) la correspondance ci-dessus est biunivoque.

Corollaire 1. Si A est l'anneau d'une valuation du corps K, tout sous-anneau de K contenant A est un anneau de valuation et nécessairement du type $A_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.

Corollaire 2. L'ensemble des valuations moins fines qu'une valuation donnée est totalement ordonné.

Corollaire 3. Données les valuations w, w' d'un corps K ayant anneaux resp. A, A', alors $A \cdot A'$ est l'anneau d'une valuation w'' de K qui est la borne inférieure de w, w' relativement à l'ordre $\leq$ (on écrit $w'' = w \wedge w'$); en outre, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ (éventuellement nul, lorsque w'' est la valuation triviale) commun aux anneaux A, A', tel que $A \cdot A' = A_\mathfrak{p} = A'_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est le plus grand idéal premier commun à A, A'.

Remarquons que ce corollaire est encore valable pour un nombre fini de valuations.

Théorème 2. Soit w une valuation du corps K. Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, sont des idéaux premiers de A, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}'$, alors l'anneau $A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$ définit une valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ du corps $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, dont le groupe des valeurs est Δ/Δ' (où $\Delta \leftrightarrow \mathfrak{p}$, $\Delta' \leftrightarrow \mathfrak{p}'$), l'idéal maximal est $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$, le corps des restes est $\mathscr{K}' = A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}' \cong (A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p})/(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$; on a la formule $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} \circ \varphi_{\mathfrak{p}} = \theta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} \circ w$, valable sur l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $A_{\mathfrak{p}'}$, où $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est l'homomorphisme canonique de $A_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ et $\theta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est l'homomorphisme canonique de Δ sur Δ/Δ'.

Cas particuliers:

(i) si $\mathfrak{p} = (0)$ on obtient les valuations de K moins fines que w; en particulier, $w_{(0),\mathfrak{p}'} = w$ et $w_{(0),(0)}$ est la valuation triviale de K.

(ii) si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est la valuation triviale de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$.

(iii) si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^0$ (idéal maximal de A) alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est une valuation de $\mathscr{K}$ ayant corps des restes $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$.

(iv) si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, sont des idéaux premiers successifs, alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est une valuation de rang 1 de $\mathscr{K}$.

Corollaire. Soit w une valuation du corps K, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, des idéaux premiers de l'anneau de valuation A de w, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}'$, et $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} = v$ la valuation de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ définie ci-dessus, donc ayant idéal maximal égal à $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, sont des idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \mathfrak{p}'$, si $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}$, alors $v_{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2} = w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$.

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème des valuations composées*:

Théorème 3. Soit w une valuation du corps K. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des valuations w' de K plus fines que w et l'ensemble des valuations v' du corps des restes $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ de K selon w. Plus précisement:

1) donné w', valuation de K, ayant anneau A', $w' \geq w$, l'anneau $A'/\mathfrak{p}^0$ du corps $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ définit une valuation v', dont le groupe des valeurs est égal à Γ' (groupe de la valuation w'), l'idéal maximal de l'anneau de v' est $\mathfrak{p}'^0/\mathfrak{p}^0$ et le corps des restes est $A'/\mathfrak{p}'^0 = \mathscr{K}'^0$; enfin, on a la formule $w' = v' \circ \varphi$ valable sur E, où φ est l'homomorphisme canonique de A sur $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$.

2) on obtient de la façon ci-dessus toutes les valuations de $\mathscr{K}^0$, c.a.d., si v' est une valuation de $\mathscr{K}^0$, ayant anneau de valuation a', alors $\varphi^{-1}(a') = A'$ est l'anneau d'une valuation w' de K, $w' \geq w$, et on a la formule $w' = v' \circ \varphi$, valable sur E.

3) la correspondance ci-dessus est biunivoque.

2. Soit K un corps et $w_1, w_2, \ldots, w_r$ un nombre fini de valuations de K. Nous allons étudier dans ce numéro les rapports de position entre ces valuations, en établissant, ensuite le théorème d'approximation, au voisinage de 0.

Nous commençons en faisant l'hypothèse que ces valuations soient deux à deux incomparables par la relation $\leq$, c.a.d., si $i \neq j$ alors on n'a jamais $A_i \subseteq A_j$. Si l'ensemble des valuations données ne jouissait pas de cette propriété, alors on se restreindrait au sous-ensemble formé des valuations maximales par la relation $\leq$.

9272-68

Rappelons quelques résultats simples qui peuvent d'ailleurs être trouvés à l'article de KRULL [3].

Lemme 3. Si w, w' sont deux valuations d'un corps K, incomparables selon $\leq$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de la valuation w, contenu dans l'anneau A' de la valuation w', alors $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A' et on a $A_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}}$.

Définition. Données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K, l'ensemble fini (ordonné par $\leq$) $\mathfrak{U}$ de toutes les valuations (ou des respectifs anneaux de valuation) du type $w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \cdots \wedge w_{i_t}$ (où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq r$) s'appelle *l'arbre* engendré par l'ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$.

En vertu du corollaire 2 au théorème 1, l'arbre $\mathfrak{U}$ est un ensemble ordonné de valuations de K tel que pour tout $w \in \mathfrak{U}$ l'ensemble des $w' \in \mathfrak{U}$ telles que $w' \leq w$ est totalement ordonné (selon $\leq$). Les valuations $w_1, \ldots, w_r$ sont exactement les éléments maximaux de $\mathfrak{U}$ (selon $\leq$). L'arbre $\mathfrak{U}$ possède aussi un premier élément qui est la valuation engendrée par les valuations données, c.a.d., ayant anneau égal à $A_1 \cdot A_2 \ldots A_r$, et qui peut être éventuellement égale à la valuation triviale de K.

Donné l'arbre $\mathfrak{U}$, engendré par l'ensemble $\{w_1, \ldots, w_r\}$, considérons toutes ses *chaînes*, c'est-à-dire les sous-ensembles de $\mathfrak{U}$ qui sont totalement ordonnés selon $\leq$; appelons longueur d'une chaîne le nombre d'éléments de la chaîne. Alors, la *longueur de l'arbre* $\mathfrak{U}$ se définit comme étant le maximum des longueurs des chaînes contenues dans l'arbre $\mathfrak{U}$. C'est évidemment un entier fini (au plus égal à r), toujours strictement plus grand que 1, sauf lorsqu'on considère le cas trivial de l'arbre engendré par une seule valuation.

Ces notions nous serons utiles peu après, pour la démonstration du théorème d'approximation.

Nous allons maintenant associer à chaque valuation w_{i_0} de l'ensemble fini $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ de valuations de K (avec l'hypothèse indiquée) une suite décroissante finie d'idéaux premiers de l'anneau A_{i_0} de la valuation w_{i_0}, laquelle s'appellera la *suite de position* (ou suite caractéristique) de w_{i_0} relativement à l'ensemble donné $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Pour cela, considérons le sous-ensemble (qui est totalement ordonné) de l'arbre $\mathfrak{U}$ (engendré par $\{w_1, \ldots, w_r\}$) formé par toutes les valuations moins fines que w_{i_0}. Par le théorème 1, cet ensemble permet de définir un nombre fini d'idéaux premiers de l'anneau A_{i_0}, dont la suite décroissante $\mathfrak{p}^{(0)} \supset \mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{p}^{(2)} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^{(s)}$ s'appelle la suite de position de w_{i_0} relativement à l'ensemble $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Remarquons que $\mathfrak{p}^{(0)}$ est égal à l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$ de l'anneau A_{i_0} et de même $\mathfrak{p}^{(s)}$ peut être ou non égal à l'idéal nul (on a $\mathfrak{p}^{(s)} = (0)$ exactement lorsque $A_1 \cdot A_2 \ldots A_r = K$).

Les idéaux premiers qui constituent la suite de position de w_{i_0} ont la propriété caractéristique suivante:

Lemme 4. Avec les notations ci-dessus, on a: si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A_{i_0} contenant strictement $\mathfrak{p}^{(j)}$, il existe au moins un anneau de valuation A_i de l'ensemble donné, tel que $\mathfrak{p}^{(j)} \subseteq A_i$ et que $\mathfrak{p}$ ne soit pas contenu dans A_i; en particulier, $\mathfrak{p}^{(s)}$ est le plus grand idéal premier de A_{i_0} contenu

9272-68

dans tous les anneaux A_i, tandis que $\mathfrak{p}^{(1)}$ est contenu dans au moins un des anneaux A_i $(i \neq i_0)$ et tout idéal premier contenant strictement $\mathfrak{p}^{(1)}$ n'est contenu que dans A_{i_0}.

Démonstration. Le lemme résulte aussitôt de la définition de la suite de position et du corollaire 3 au théorème 1, étendu à un nombre fini de valuations.

La suite de position pourrait être aussi définie de la façon suivante [3]. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau A_{i_0}, soit l'ensemble $E(\mathfrak{p}) = \{A_i \mid \mathfrak{p} \subsetneqq A_i\} \subseteq \{A_1, \ldots, A_r\}$; posons $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}'$ lorsque $E(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{p}')$. Il est alors clair que chaque classe d'équivalence possède un plus grand élément, égal à la réunion de tous les idéaux premiers de la classe en question. L'ensemble des valuations données étant fini, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence, dont leurs plus grand idéaux déterminent la suite de position de w_{i_0} relativement à $\{w_1, \ldots, w_r\}$, en vertu du lemme précedent.

Définition. Deux valuations w, w' d'un corps K sont dites indépendantes lorsque $w \wedge w'$ est la valuation triviale de K, c'est-à-dire lorsque $A \cdot A' = K$ (où A, A' désignent respectivement les anneaux de valuation de w, w').

Le résultat suivant a été démontré par KRULL [3] et est connu sous le nom de *théorème d'approximation pour des valuations indépendantes*:

Théorème 4. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données. Alors il existe $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

JAFFARD [4] a indiqué le résultat plus fort suivant, qui se trouve déjà dans des notes encore non publiées de BOURBAKI [2]:

Théorème 4'. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement à leurs groupes de valeurs, et soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments quelconques de K. Alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$.

Comme conséquence du théorème 4, nous voulons citer quelques résultats sur l'arithmétique des anneaux du type $A = A_1 \cap \cdots \cap A_r$, où $A_1, \ldots, A_r$ sont les anneaux des valuations deux à deux indépendantes $w_1, \ldots, w_r$ d'un corps K (voir KRULL [3]).

Lemme 5. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, $A_1, \ldots, A_r$ leurs respectifs anneaux de valuation, et $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$. Pour tout indice i $(i = 1, \ldots, r)$ soit $\mathfrak{a}_i \subsetneqq A_i$ un idéal de l'anneau A_i, $\mathfrak{a}_i \neq (0)$, et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ (idéal de l'anneau A); alors, pour tout indice i on a $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de l'anneau A et pour tout indice $i = 1, \ldots, r$ soit $\mathfrak{a}_i = A_i \mathfrak{a}$; alors on a $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$.

Lemme 6. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, et $\mathscr{K}_1^0, \ldots, \mathscr{K}_r^0$, leurs respectifs corps des restes. Alors, si

$b_1 \in \mathfrak{X}_1^0, \ldots, b_r \in \mathfrak{X}_r^0$, sont des éléments donnés arbitrairement, il existe un élément $a \in A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (intersection des anneaux A_i des valuations w_i), dont la classe résidue selon la valuation w_i est égale à b_i (pour tout indice i).

Nous allons généraliser le théorème et les lemmes ci-dessus pour le cas où les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Des généralisations partielles ont été obtenues aussi par NAGATA [5], en employant un procédé distinct.

Remarquons que la donnée de deux valuations w_i, w_j d'un corps K, ayant anneaux égaux à A_i, A_j et groupes de valeurs égaux à Γ_i, Γ_j, determine un idéal premier $\mathfrak{p}$ qui est le plus grand idéal premier commun à A_i et A_j; alors l'anneau $A_i \cdot A_j$ de la valuation $w_i \wedge w_j$ s'écrit $A_i \cdot A_j = (A_i)_{\mathfrak{p}} = (A_j)_{\mathfrak{p}}$; à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ correspondent respectivement dans les groupes Γ_i et Γ_j les sous-groupes isolés $\Delta_{ij} \subseteq \Gamma_i$, $\Delta_{ji} \subseteq \Gamma_j$, et on a $\Gamma_i/\Delta_{ij} \cong \Gamma_j/\Delta_{ji}$, celui-ci étant le groupe des valeurs de la valuation $w_i \wedge w_j$. Si $\theta_{ij}: \Gamma_i \to \Gamma_i/\Delta_{ij}$, $\theta_{ji}: \Gamma_j \to \Gamma_j/\Delta_{ji}$ désignent les homomorphismes canoniques de passage au quotient, alors nous conviendrons que si $\alpha_i \in \Gamma_i$, $\alpha_j \in \Gamma_j$, on écrira $\bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha}_j$ (ou $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$) pour exprimer que $\theta_{ij}(\alpha_i) \leq \theta_{ji}(\alpha_j)$ (ou $\theta_{ij}(\alpha_i) = \theta_{ji}(\alpha_j)$). Des notations analogues seront utilisées dans des cas semblables.

Définition. Données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K et les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, on dit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est *compatible* lorsque pour tout couple d'indices distincts $i \neq j$, on a $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$.

De cette définition il résulte que si les valuations $w_1, \ldots, w_r$ sont deux à deux indépendantes, alors tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible.

Nous pouvons maintenant enoncer la *forme générale du théorème d'approximation* (au voisinage de 0):

Théorème 5. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes de valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données. Pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, il faut et il suffit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ soit compatible.

Démonstration. La condition étant évidemment nécessaire, il suffit de démontrer sa suffisance. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que les valuations données sont deux à deux incomparables selon la relation $\leq$, sinon on remplacerait l'ensemble donné par le sous-ensemble des valuations maximales selon $\leq$, et le théorème étant vrai pour ce sous-ensemble, il le serait aussi pour l'ensemble donné, en vertu de la compatibilité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Soit $\mathfrak{U}$ l'arbre engendré par les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ et l la longueur de $\mathfrak{U}$. La démonstration sera faite par induction sur l. Le cas où $l = 1$ est trivial, car alors nécessairement $r = 1$. Le cas où $l = 2$ ne se laisse par réduire au précedent et ainsi il doit être traité en détail.

Soit donc $l = 2$; alors, pour des indices distincts quelconques i, j, $A_i \cdot A_j = B$ est l'anneau d'une valuation v de K. Si v est la valuation triviale de K, alors les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ sont deux à deux indépendantes et d'après

9272-68 2 B

le théorème 4, il existe $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Par contre, si $B \neq K$, soit $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $A_1, \ldots, A_r$ (donc $\mathfrak{p} \neq (0)$) et pour tout indice i soit Δ_i le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond à $\mathfrak{p}$, donc $\Gamma_i/\Delta_i \cong \Gamma_j/\Delta_j$ est le groupe de valeurs de la valuation v. Puisque $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible, alors $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$ (pour des indices i, j quelconques) et ainsi les α_i définissent par passage au quotient modulo Δ_i un élément β du groupe des valeurs de v. Soit $y \in K$ tel que $v(y) = \beta$, donc $w_i(y) - \alpha_i = \alpha_i' \in \Delta_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Soit maintenant dans le corps $B/\mathfrak{p} = \mathscr{K}$, les valuations w_i' ayant anneaux respectivement égaux à $A_i/\mathfrak{p}$, et dont les groupes des valeurs sont Δ_i. L'arbre $\mathfrak{U}$ ayant longueur 2, les valuations $w_1', \ldots, w_r'$ de $\mathscr{K}$ sont deux à deux indépendantes et par le théorème 4 il existe $z' \in \mathscr{K}$ tel que $w_i'(z') = \alpha_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ et alors par le théorème 3, on a $w_i(z) = w_i'(z') = \alpha_i'$, où $z \in B$ est un répresentant de la classe modulo $\mathfrak{p}$ définie par z'. Alors, si $x = y/z$ on a $w_i(x) = (\alpha_i + \alpha_i') - \alpha_i' = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Supposons maintenant le théorème vrai lorsque la longueur de l'arbre $\mathfrak{U}$ est strictement inférieure à l (où $l > 2$).

Soit u la valuation de K égale à la borne inférieure des valuations données, $u = w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$, donc u est l'élément minimal de l'arbre $\mathfrak{U}$; notons C l'anneau de la valuation u de K. De même, notons $v_1, \ldots, v_s$ les valuations de K qui sont minimales dans l'arbre $\mathfrak{U}$, parmi celles distinctes de u, appartenant à l'arbre $\mathfrak{U}$ (donc $s \geq 2$) et soient respectivement $B_1, \ldots, B_s$ leurs anneaux de valuation. Ensuite, numérotons les valuations données $w_1, w_2, \ldots, w_r$, de façon que pour tout indice i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{ir_i}$ soient exactement les valuations plus fines que v_i; notons $A_{ij}, \mathfrak{p}_{ij}^0, \Gamma_{ij}$, respectivement l'anneau, l'idéal maximal et le groupe des valeurs de la valuation w_{ij} (pour i, j quelconques) et de même, soit $\alpha_{ij} \in \Gamma_{ij}$ l'élément donné du groupe des valeurs de w_{ij}. Pour tout indice i, soit $\mathfrak{p}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux de valuation $A_{i1}, \ldots, A_{ir_i}$, et dans chaque groupe Γ_{ij} soit Δ_{ij} le sous-groupe isolé correspondant à $\mathfrak{p}_i$ (attention au changement de notation!); alors, pour tout indice i on a $B_i = A_{i1} \cdot A_{i2} \cdots A_{ir_i} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}_i}$ (j quelconque), $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal maximal de B_i et le groupe Ξ_i des valeurs de la valuation v_i s'écrit $\Xi_i = \Gamma_{ij}/\Delta_{ij}$ (j quelconque). De même, si $\mathfrak{q}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_{ij} $(i, j$ quelconques), alors pour tout indice i on a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_i$ et $C = (B_i)_{\mathfrak{q}} = (A_{ij})_{\mathfrak{q}}$ $(i, j$ quelconques), $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal de C, et si Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$, alors le groupe des valeurs Θ de u s'écrit $\Theta = \Gamma_{ij}/\Lambda_{ij}$ $(i, j$ quelconques).

En vertu de l'hypothèse, pour tout indice i $(i = 1, \ldots, s)$ on a $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ik}$ $(j, k$ quelconques) et ainsi on définit un élément $\beta_i \in \Xi_i$. Or, les valuations $v_1, \ldots, v_s$ de K engendrent un arbre $\mathfrak{B}$ de K ayant longueur 2 et ainsi, puisque $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est compatible, alors il existe $y \in K$ tel que $v_i(y) = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, s)$; il en résulte que $w_{ij}(y) - \alpha_{ij} = \alpha_{ij}'' \in \Delta_{ij}$ quelques soient les indices i, j.

Soit maintenant pour tout indice i $(i = 1, \ldots, s)$ le corps $\mathscr{K}_i = B_i/\mathfrak{p}_i$ et dans $\mathscr{K}_i$ considérons les valuations w_{ij}'' ayant anneaux de valuation respectivement

égaux à $A_{ij}/\mathfrak{p}_i$, idéal maximal $\mathfrak{p}_{ij}^0/\mathfrak{p}_i$ et groupe des valeurs Δ_{ij} (j quelconque). L'arbre $\mathfrak{U}_i''$ engendré par les valuations w_{ij}'' du corps $\mathscr{K}_i$ possède une longueur strictement inférieure à la longueur l de l'arbre $\mathfrak{U}$; d'autre part, $(\alpha_{i1}'', \alpha_{i2}'', \ldots, \alpha_{ir_i}'') \in \Delta_{i1} \times \cdots \times \Delta_{ir_i}$ est compatible. Ainsi, par l'hypothèse de l'induction, il existe $z_i'' \in \mathscr{K}_i$ tel que $w_{ij}''(z_i'') = \alpha_{ij}''$ (pour $j = 1, \ldots, r_i$).

Or, dans le corps $\mathscr{K} = C/\mathfrak{q}$, considérons les valuations $v_1', \ldots, v_s'$, ayant anneaux de valuation respectivement égaux à $B_i/\mathfrak{q}$, idéal maximal $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}$, corps des restes $(B_i/\mathfrak{q})/(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}) \cong B/\mathfrak{p}_i = \mathscr{K}_i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, s$). Les valuations $v_1', \ldots, v_s'$ de $\mathscr{K}$ étant deux à deux indépendantes, alors donnés lesél éments $z_1'' \in \mathscr{K}_1, \ldots, z_s'' \in \mathscr{K}_s$ appartenant respectivement à ses corps des restes, en vertu du lemme 6, il existe un élément $z' \in \bigcap_{i=1}^{s} B_i/\mathfrak{q} \subseteq C/\mathfrak{q} = \mathscr{K}$ tel que pour tout indice i la classe de z' modulo $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}$ soit égale à $z_i'' \in \mathscr{K}_i$. Soit $z \in C \subseteq K$ un élément tel que la classe de z modulo $\mathfrak{q}$ soit z'. Alors, en vertu du théorème 3, on déduit que si w_{ij}' désigne la valuation ayant anneau $A_{ij}/\mathfrak{q}$, alors $w_{ij}(z) = w_{ij}'(z') = w_{ij}''(z_i'') = \alpha_{ij}''$, quelques soient les indices i, j. Il résulte que si $x = y/z$ alors $w_{ij}(x) = (\alpha_{ij} + \alpha_{ij}'') - \alpha_{ij}'' = \alpha_{ij}$, quelques soient les indices i, j.

3. En ce numéro nous chercherons à obtenir une généralisation du théorème 5 qui redonne au cas des valuations deux à deux indépendantes le théorème 4'. Nous l'obtiendrons d'une manière directe et sans supposer vrai le théorème 5, lequel sera alors une simple conséquence. Pour cela, nous établirons d'abord quatre lemmes.

Lemme 7. Soient w, w' deux valuations d'un corps K, et α, α' des éléments appartenant respectivement aux groupes Γ, Γ', des valuations données. Pour qu'il existe $x \in K$ tel que $w(x) \geq \alpha$, $w'(x) \leq \alpha'$, il faut et il suffit que $\bar{\alpha}' \geq \bar{\alpha}$.

Démonstration. Il est clair que si $x \in K$, $w(x) \geq \alpha$, $w'(x) \leq \alpha'$, et si $w_0 = w \wedge w'$ alors $\bar{\alpha}' \geq \overline{w'(x)} = w_0(x) = \overline{w(x)} \geq \alpha$. Réciproquement, soit $\bar{\alpha}' \geq \bar{\alpha}$ et prenons des éléments $a, a' \in K$ tels que $w(a) = \alpha$, $w'(a') = \alpha'$, donc $w_0(a) = \overline{w(a)} = \bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}' = \overline{w'(a')} = w_0(a')$ et alors $a'/a \in A \cdot A'$ (anneau de la valuation $w_0 = w \wedge w'$) donc $a'/a = bb'$, où $b \in A$, $b' \in A'$. Prenons $x = ab$, alors $a' = x \cdot b'$ et $w(x) \geq w(a) = \alpha$, $w'(x) \leq w'(a') = \alpha'$.

Lemme 8. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leq$) d'un corps K, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, des éléments appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, des valuations données. Si pour tout indice $i \neq 1$ on a $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_i = \bar{0}$ (c'est-à-dire $\alpha_1 \in \Delta_{1i}$, $\alpha_i \in \Delta_{i1}$, pour tout indice $i \neq 1$, où Δ_{1i}, Δ_{i1}, sont respectivement les sous-groupes isolés de Γ_1, Γ_i, correspondants au plus grand idéal premier commun à A_1, A_i) alors il existe $x \in K$ tel que $w_1(x) \leq \alpha_1$ et $w_i(x) \geq \alpha_i$ (pour $i = 2, 3, \ldots, r$).

Démonstration. Le lemme est vrai lorsque $r = 2$, car alors il se réduit au lemme précedent. Supposons par induction qu'il soit vrai pour $r - 1$ valuations. Remarquons qu'il est possible de supposer sans perte de généralité que $\alpha_1 < 0$ et que $\alpha_i > 0$ pour tout indice $i \neq 1$; en effet, il suffit de

remplacer α_1 par $\alpha_1' \in \bigcap_{i \neq 1} \Delta_{1i}$, $\alpha_1' < 0$ et α_i par $\alpha_i' = \alpha_i + \delta_i > 0$, où $\delta_i \in \Delta_{i1}$ et le nouveau système $(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ satisfait encore $\bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_i' = \bar{0}$.

Alors, par induction, il existe un élément $a \in K$ tel que $w_1(a) \leq \alpha_1$ et $w_i(a) \geq \alpha_i$ $(i = 2, 3, \ldots, r-1)$; de même, il existe un élément $b \in K$ tel que $w_1(b) \leq \alpha_1$ et $w_i(b) \geq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1, r)$. Il existe alors quatre possibilités quant aux valeurs $w_r(a), w_2(b)$.

(i) $w_r(a) \geq 0$, $w_2(b) \geq 0$. Alors soit $x = a \cdot b$; on vérifie que $w_1(x) \leq \alpha_1 + \alpha_1 < \alpha_1$, $w_2(x) \geq w_2(a) \geq \alpha_2$, $w_i(x) \geq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$, $w_r(x) \geq w_r(b) \geq \alpha_r$.

(ii) $w_r(a) < 0$, $w_2(b) \geq 0$. Alors soit $x = a' \cdot b$, où $a' = a/(a+1)$; on vérifie que $w_1(x) = w_1(b) \leq \alpha_1$ car $w_1(a) = w_1(a+1)$, $w_2(x) = w_2(a) + w_2(b) \geq \alpha_2$, car $w_2(a+1) = 0$, $w_i(x) \geq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$, $w_r(x) = w_r(b) \geq \alpha_r$, car $w_r(a) = w_r(a+1)$.

(iii) $w_r(a) \geq 0$, $w_2(b) < 0$. Ce cas est analogue au précedent, avec $x = a \cdot b'$, $b' = b/(b+1)$.

(iv) $w_r(a) < 0$, $w_2(b) < 0$. Si on a $w_1(a) = w_1(b)$ on remplace a par a^2 et ainsi on peut supposer que $w_1(a) < w_1(b)$, car a^2 vérifie les mêmes inégalités que a. Soit $x = a \cdot b \cdot c$, où $c = 1/(a+b+1)$; alors $w_1(x) = w_1(b) \leq \alpha_1$ car $w_1(a) = w_1(a+b+1)$, $w_2(x) = w_2(a) \geq \alpha_2$, car $w_2(b) = w_2(a+b+1)$, $w_i(x) = w_i(a) + w_i(b) \geq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$ car $w_i(a+b+1) = 0$, $w_r(x) = w_r(b) \geq \alpha_r$, car $w_r(a) = w_r(a+b+1)$.

Lemme 9. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leq$) d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, de façon que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ soit compatible. Soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments non nuls de K et supposons la numérotation des valuations telle que $w_i(b_i) \leq \alpha_i$ lorsque $i = 1, \ldots, h$ et $w_i(b_i) > \alpha_i$ lorsque $i = h+1, \ldots, r$, où $0 \leq h \leq r$. Si pour tout indice $i = 1, \ldots, h$ on a $\alpha_i - w_i(b_i) \in \bigcap_{j=1, j \neq i} \Delta_{ij}$ alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) \geq \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$.

Démonstration. Pour tout indice $i = 1, \ldots, r$ notons $\Delta_i = \bigcap_{j=,, j \neq i}^{r} \Delta_{ij}$, donc $\Delta_i \neq (0)$ car les valuations sont deux à deux incomparables. Si pour l'indice i on a $w_i(b_i) = \alpha_i$, prenons $\delta_i \in \Delta_i$, $0 < \delta_i$, et remplaçons α_i par $\alpha_i + \delta_i > \alpha_i$. Il résulte qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où on a $w_i(b_i) < \alpha_i$ lorsque $i = 1, 2, \ldots, h$ et $w_i(b_i) > \alpha_i$ lorsque $i = h+1, \ldots, r$.

Considérons d'abord un indice i tel que $w_i(b_i) < \alpha_i$. Posons $\gamma_{ii} = w_i(b_i) - \alpha_i < 0$ donc $\gamma_{ii} \in \bigcap_{j=1, j \neq i}^{r} \Delta_{ij}$. De même, soit $\gamma_{ji} = \alpha_j - w_j(b_i)$ lorsque $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$. Alors $\bar{\gamma}_{ji} \Rightarrow \bar{\alpha}_j - \overline{w_j(b_i)} = \bar{\alpha}_i - \overline{w_i(b_i)} = -\bar{\gamma}_{ii} = \bar{0}$, c'est-à-dire, $\gamma_{ji} \in \Delta_{ji}$. Posons $\delta_{ji} = \gamma_{ji}$ lorsque $0 < \gamma_{ji}$ et prenons un élément $\delta_{ji} \in \Delta_{ji}$, $0 < \delta_{ji}$, lorsque $\gamma_{ji} \leq 0$. Par le lemme 8, il existe un élément $z_i \in K$ tel que $w_i(z_i) \leq \gamma_{ii} < 0$ et $w_j(z_i) \geq \delta_{ji} > 0$ (pour $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$).

Considérons maintenant un indice i tel que $w_i(b_i) > \alpha_i$. Posons $\gamma_{ii} = w_i(b_i) - \alpha_i > 0$ et soit un élément $\delta_{ii} \in \bigcap_{j=1, j\neq i}^{r} \Delta_{ij}$ tel que $\delta_{ii} < 0 < \gamma_{ii}$. De même, soit $\gamma_{ji} = \alpha_j - w_j(b_i)$ lorsque $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$. Posons $\delta_{ji} = \gamma_{ji}$ lorsque $\gamma_{ji} > 0$, et prenons un élément $\delta_{ji} \in \Delta_{ji}$ tel que $0 < \delta_{ji}$ lorsque $\gamma_{ji} \leq 0$; alors on a toujours $0 < \delta_{ji} \in \Delta_{ji}$, $\gamma_{ji} \leq \delta_{ji}$, car si $0 < \gamma_{ji}$ il vient $\bar{0} \leq \bar{\gamma}_{ji} = \bar{\alpha}_j - \overline{w_j(b_i)} = \bar{\alpha}_i - \overline{w_i(b_i)} = -\bar{\gamma}_{ii} \leq \bar{0}$, c'est-à-dire $\gamma_{ji} \in \Delta_{ji}$. Par le lemme 8, il existe un élément $z_i \in K$ tel que $w_i(z_i) \leq \delta_{ii} < 0$ et $w_j(z_i) \geq \delta_{ji} > 0$ $(j \neq i,\ j = 1, \ldots, r)$.

Soit maintenant pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$ l'élément $t_i = z_i/(z_i + 1)$. Alors $t_i - 1 = -1/(z_i + 1)$, donc $w_i(t_i - 1) = -w_i(z_i + 1) = -w_i(z_i) \geq -\gamma_{ii} = \alpha_i - w_i(b_i)$ et pour tout $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$, $w_j(t_i) = w_j(z_i) - w_j(z_i + 1) = w_j(z_i) \geq \delta_{ji} \geq \gamma_{ji} = \alpha_j - w_j(b_i)$.

Enfin, soit $x = \sum_{j=1}^{r} t_j b_j$, donc $x - b_i = (t_i - 1) \cdot b_i + \sum_{j\neq i} t_j b_j$. Alors, pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, on a $w_i(x - b_i) \geq \min_{j\neq i} \{w_i(t_i - 1) + w_i(b_i), w_i(t_j) + w_i(b_j)\} \geq \alpha_i$, en vertu de la détermination des éléments t_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Lemme 10. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leq$) d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, de façon que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ soit compatible. Supposons que $b_1, \ldots, b_r$ soient des éléments de K de façon qu'on ait $\alpha_i - w_i(b_i) \in \bigcap_{j=1, j\neq i}^{r} \Delta_{ij}$ pour tout indice i tel que $w_i(b_i) < \alpha_i$. Alors il existe $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration. Pour tout indice $i = 1, \ldots, r$ soit $z_i \in K$, $z_i \neq -b_i$, tel que $w_i(z_i) = \alpha_i$ et posons $y_i = z_i + b_i \neq 0$, donc $w_i(y_i - b_i) = w_i(z_i) = \alpha_i$; ainsi, si $w_i(b_i) > \alpha_i$ alors $w_i(y_i) = \alpha_i$, si $w_i(b_i) = \alpha_i$ alors $w_i(y_i) \geq \alpha_i$ et si $w_i(b_i) < \alpha_i$ alors $w_i(y_i) = w_i(b_i)$.

Soit $(\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ compatible, et $0 < \delta_1 \in \Delta_1, \ldots, 0 < \delta_r \in \Delta_r$ (voir les notations au lemme 9). Donc $(\alpha_1 + \delta_1, \ldots, \alpha_r + \delta_r)$ est aussi compatible. Si pour l'indice i on a $w_i(y_i) < \alpha_i + \delta_i$ alors $\alpha_i + \delta_i - w_i(y_i) \in \bigcap_{j=1, j\neq i}^{r} \Delta_{ij}$, en vertu de l'hypothèse que $\alpha_i - w_i(b_i) \in \bigcap_{j=1, j\neq i}^{r} \Delta_{ij}$ lorsque $w_i(b_i) < \alpha_i$. Par le lemme 9, il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - y_i) \geq \alpha_i + \delta_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Donc, de $w_i(y_i - b_i) = \alpha_i$ il résulte que $w_i(x - b_i) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$.

Corollaire 1. Le théorème 5 est vrai.

En effet, il suffit de prendre $b_1 = \cdots = b_r = 0$ dans le lemme 10.

Corollaire 2. Le théorème 4' est vrai.

En effet, il suffit de remarquer que si w_i, w_j sont des valuations indépendantes alors $\Delta_{ij} = \Gamma_i$.

Le théorème suivant est la généralisation du théorème 4':

Théorème 5'. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leq$) d'un corps K, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant

respectivement aux groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, de façon que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ soit compatible; enfin, soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments appartenant à K. Pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x-b_i) = \alpha_i$ (pour $i = 1, \ldots, r$) il faut et il suffit qu'on ait:

(I) si $w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$ alors $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \in \Delta_{ij}$ (où Δ_{ij} désigne le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond au plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations w_i, w_j).

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons qu'on ait $w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$; de $w_i(x-b_i) = \alpha_i$, $w_j(x-b_j) = \alpha_j$ il vient $w_i(x-b_j) = w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$. Donc $\bar{\alpha}_i \geq \overline{w_i(b_i - b_j)} = \overline{w_i(x-b_j)} = \overline{w_j(x-b_j)} = \bar{\alpha}_j$ et de $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$ il vient $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \in \Delta_{ij}$.

La condition est suffisante. Remarquons tout d'abord que la condition (I) entraîne succesivement les conditions suivantes:

(II) Si $w_i(b_i) \leq \alpha_i$ alors $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ij}$ pour tout indice j tel que $\alpha_j < w_j(b_j)$.

(III) Si $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $w_i(b_i) = w_i(b_j)$.

(IV) Si $w_i(b_i) \leq \alpha_i$ et $w_j(b_j) \leq \alpha_j$ alors $\overline{w_i(b_i)} = \overline{w_j(b_j)}$.

En effet, si on avait $w_i(b_i) \leq \alpha_i$, $\alpha_j < w_j(b_j)$ et $\alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $\overline{w_i(b_i)} < \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j \leq \overline{w_j(b_j)} = \overline{w_i(b_j)}$ donc $w_i(b_i) < w_i(b_j)$ d'où $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) = \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$, absurde, en vertu de (I). Cela montre (II).

De même, soit $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$; si on avait $w_i(b_i) < w_i(b_j)$ alors $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) = \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$, absurde; enfin, si on avait $w_i(b_j) < w_i(b_i)$ alors $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_j) < w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) > \alpha_i - w_i(b_i) > 0$ donc $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \notin \Delta_{ij}$, absurde. Cela montre (III).

Enfin, si $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $w_i(b_i) = w_i(b_j)$ par (III), donc $\overline{w_i(b_i)} = \overline{w_i(b_j)} = \overline{w_j(b_j)}$; si par contre $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ij}$ alors $\alpha_j - w_j(b_i) \in \Delta_{ji}$; or si c'était $\alpha_j - w_j(b_j) \notin \Delta_{ji}$ alors par (III) il serait $w_j(b_j) = w_j(b_i)$ d'où $\alpha_j - w_j(b_j) = \alpha_j - w_j(b_i) \notin \Delta_{ji}$, absurde; ainsi, on a $\alpha_j - w_j(b_j) \in \Delta_{ji}$, c'est-à-dire $\overline{w_i(b_i)} = \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j = \overline{w_j(b_j)}$. Cela montre (IV).

Remarquons maintenant qu'il est possible de réduire la démonstration du théorème au cas où on a $w_i(b_i) < \alpha_i$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, r$). En effet, prenons pour cela $(\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_r$ où $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij} \neq (0)$ (car les valuations sont deux à deux incomparables) et choisis de la façon suivante: si $w_i(b_i) < \alpha_i$ prenons $\delta_i = 0$, si $w_i(b_i) \geq \alpha_i$ prenons $\delta_i > 0$. Alors $(\alpha_1 - \delta_1, \ldots, \alpha_r - \delta_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est encore compatible. Par le corollaire 1 au lemme 10 il existe un élément $y \in K$ tel que $w_i(y) = \alpha_i - \delta_i$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, r$); donc $w_i(y + b_i) = w_i(b_i)$ lorsque $w_i(b_i) < \alpha_i$ et $w_i(y + b_i) = w_i(y) = \alpha_i - \delta_i$ lorsque $w_i(b_i) \geq \alpha_i$. Posons $c_i = y + b_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, donc $w_i(c_i) < \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Or, les éléments c_i vérifient encore la condition (I) (relativement aux éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$) car $c_i - c_j = b_i - b_j$. Ainsi, si on a déjà démontré le théorème pour le cas des éléments $c_1, \ldots, c_r$, où $w_i(c_i) < \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ alors il existe $z \in K$ tel que $w_i(z - c_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ donc si $x = z - y$ alors $w_i(x - b_i) = w_i(z - y - b_i) = w_i(z - c_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

De cette remarque, nous voyons qu'il est possible de supposer sans perte de généralité qu'on a $w_i(b_i) < \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, faisons encore une remarque. Posons $b_i \equiv b_j$ lorsqu'on a $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$. Montrons qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. En effet, d'abord on a $b_i \equiv b_i$ car $0 < \alpha_i - w_i(b_i)$ et $\Delta_{ii} = (0)$. Si $b_i \equiv b_j$ alors $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ donc de $w_i(b_i) = w_j(b_j)$ par (IV), on a $\bar{\alpha}_j - w_j(b_j) = \bar{\alpha}_i - w_i(b_i) \neq \bar{0}$ donc $0 < \alpha_j - w_j(b_j) \notin \Delta_{ji}$, c'est-à-dire $b_j \equiv b_i$. Si $b_i \equiv b_j$ et $b_j \equiv b_k$ alors $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$, $0 < \alpha_j - w_j(b_j) \notin \Delta_{jk}$. Si $\Delta_{ij} \supseteq \Delta_{ik}$ alors $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ik}$ donc $b_i \equiv b_k$. Si par contre $\Delta_{ij} \subset \Delta_{ik}$ alors on a $\mathfrak{p}_{ij} \supset \mathfrak{p}_{ik}$ donc $\mathfrak{p}_{jk} = \mathfrak{p}_{ik}$ (où $\mathfrak{p}_{ij}$ est le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_i, A_j, $\mathfrak{p}_{ik}$ celui commun aux anneaux A_i, A_k et enfin $\mathfrak{p}_{jk}$ celui commun aux anneaux A_j, A_k); alors $\Delta_{kj} = \Delta_{ki}$. Si on avait $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ik}$ alors en vertu de (IV) on aurait $\alpha_k - w_k(b_k) \in \Delta_{ki} = \Delta_{kj}$ donc en vertu de (IV) on aurait $\alpha_j - w_j(b_j) \in \Delta_{jk}$, absurde. Donc $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ik}$, d'où $b_i \equiv b_k$.

La démonstration du théorème sera fait par induction sur la longueur l de l'arbre $\mathfrak{U}$ engendré par les valuations données $w_1, \ldots, w_r$. Si $l = 1$ le théorème est trivial.

Soit $l = 2$; alors pour des indices distincts quelconques i, j, $A_i \cdot A_j = B$ est l'anneau d'une valuation v de K. Si v est la valuation triviale de K, c'est-à-dire, si les valuations données sont deux à deux indépendantes, alors la condition (I) est vide et le théorème se réduit au corollaire 2 du lemme 10. Par contre, si $B \neq K$, notons $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $A_1, \ldots, A_r$ (donc $\mathfrak{p} \neq (0)$); remarquons qu'on a, avec les notations déjà introduites, $\Delta_i = \Delta_{ij}$ (pour des indices distincts quelconques i, j). Si on a $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ij}$ pour des indices distincts quelconques i, j, alors le théorème se réduit à un cas particulier du lemme 10. Si par contre il existe des indices distincts i, j, tels que $\alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors si k est un autre indice $(1 \leq k \leq r, k$ distinct de i et de $j)$ alors de $\Delta_i = \Delta_{ij} = \Delta_{ik}$ il vient $\alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ik}$. Or, par la remarque faite ci-dessus on déduit que les éléments $b_1, \ldots, b_r$ appartiennent à une classe d'équivalence unique. Par la condition (III) on a $w_i(b_1) = \cdots = w_i(b_r)$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$; posons $\beta_i = w_i(b_1)$. Soit $e_i = b_i/b_1$ donc $w_i(e_1) = w_i(e_2) = \cdots = w_i(e_r) = 0$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Posons $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, donc $0 < \gamma_i \notin \Delta_{ij} = \Delta_i$ pour i, j quelconques distincts. Enfin, de $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \in \Delta_{ij}$ lorsqu'on a $w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$ il vient $\gamma_i - w_i(e_i - e_j) = \alpha_i - \beta_i - [w_i(b_i - b_j) - w_i(b_1)] \in \Delta_{ij}$ lorsque $w_i(e_i - e_j) < \gamma_i$. Posons $e_i' = e_i - e_1 = e_i - 1$; alors si $w_i(e_i') < \gamma_i$ on a $\gamma_i - w_i(e_i') \in \Delta_{i1} = \Delta_i = \Delta_{ij}$ pour tout indice $j \neq i$. Par le lemme 10 il existe $y \in K$ tel que $w_i(y - e_i') = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, r)$; posons $x' = y + e_1$, donc $w_i(x' - e_i) = w_i(y + e_1 - e_i) = w_i(y - e_i') = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Enfin, soit $x = b_1 \cdot x'$ donc $w_i(x - b_i) = w_1(b_1 x' - b_1 e_i) = w_i(b_1) + w_i(x' - e_i) = \beta_i + \gamma_i = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Supposons maintenant que le théorème soit vrai lorsque la longueur de l'arbre $\mathfrak{U}$ est strictement inférieure à l (où $l > 2$).

Soit u la valuation de K égale à la borne inférieure des valuations données, $u = w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_r$, donc u est l'élément minimal de l'arbre $\mathfrak{U}$ selon $\leq$;

notons C l'anneau de la valuation u de K. De même, notons $v_1, \ldots, v_s$ les valuations de K qui sont les éléments minimaux distincts de u appartenant à l'arbre $\mathfrak{U}$ (donc $s \geq 2$) et soient respectivement $B_1, \ldots, B_s$ leurs anneaux de valuation. Ensuite, numérotons les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ de façon que pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{ir_i}$ soient exactement les valuations plus fines que v_i; notons A_{ij}, Γ_{ij}, respectivement l'anneau et le groupe de valeurs de w_{ij} (pour i, j quelconques) et de même soient $\alpha_{ij} \in \Gamma_{ij}$ et $b_{ij} \in K$ les éléments données (correspondant respectivement aux valuations w_{ij}). Pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, soit $\mathfrak{p}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$ (i fixe) et dans chaque groupe Γ_{ij} soit Δ_{ij} le sous-groupe isolé correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i$ (attention au changement de notation!); alors pour tout indice $i = 1, \ldots, s$ on a $B_i = A_{i1} \cdot A_{i2} \ldots A_{ir_i} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}_i}$ (j quelconque), $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal maximal de B_i et le groupe Ξ_i de la valuation v_i s'écrit $\Xi_i \cong \Gamma_{ij}/\Delta_{ij}$ (j quelconque). De même, si $\mathfrak{q}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_{ij} (i, j quelconques) alors pour tout indice i on a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_i$ et $C = (B_i)_{\mathfrak{p}} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}}$ (i, j quelconques), $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal de C et si Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$, alors le groupe de valeurs Θ de u s'écrit $\Theta = \Gamma_{ij}/\Lambda_{ij} \cong \Xi_i/\Pi_i$ où $\Pi_i = \Lambda_{ij}/\Delta_{ij}$ (i, j quelconques).

En vertu de l'hypothèse, pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, on a $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ik}$ (j, k quelconques) et ainsi les éléments $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir_i}$ définissent un élément $\beta_i \in \Xi_i$; il est clair que $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est compatible, car si $i \neq i'$, on déduit de $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{i'j'}$ que $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{i'}$.

Par l'hypothèse la condition (I) est vérifiée pour les valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$, pour les éléments $b_{i1}, \ldots, b_{ir_i} \in K$ et $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir_i}) \in \Gamma_{i1} \times \cdots \times \Gamma_{ir_i}$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, s$); or, pour tout indice i, l'arbre $\mathfrak{U}_i$ engendré par les valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$ possède longueur strictement inférieure à l, donc il existe un élément $x_i \in K$ tel que $w_{ij}(x_i - b_{ij}) = \alpha_{ij}$ ($j = 1, \ldots, r_i$; i fixe).

Prenons $(\pi_1, \ldots, \pi_s) \in \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_s$, $0 < \pi_i$ ($i = 1, \ldots, s$); donc $(\beta_1 + \pi_1, \ldots, \beta_s + \pi_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est encore compatible. Montrons que la condition (I) est vérifiée pour les valuations $v_1, \ldots, v_s$, les éléments $x_1, \ldots, x_s \in K$ et $(\beta_1 + \pi_1, \ldots, \beta_s + \pi_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$. En effet, si $\beta_i \leq v_i(x_i - x_{i'}) < \beta_i + \pi_i$ ($1 \leq i, i' \leq s$, $i \neq i'$) alors $\beta_i + \pi_i - v_i(x_i - x_{i'}) \leq \pi_i \in \Pi_i$ (remarquer que l'arbre engendré par les valuations $v_1, \ldots, v_s$, possède longueur 2, donc Π_i est le sous-groupe isolé de Ξ_i qui correspond au plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations $v_i, v_{i'}$). Soit $v_i(x_i - x_{i'}) < \beta_i$ ($1 \leq i, i' \leq s$, $i \neq i'$). Si $v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) \geq \beta_i$ (où $1 \leq j \leq r_i$, $1 \leq j' \leq r_{i'}$) alors de $v_i(x_i - b_{ij}) = \beta_i$, $v_{i'}(x_{i'} - b_{i'j'}) = \beta_{i'}$ il vient $v_i(x_i - b_{ij}) = \bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{i'} = v_{i'}(x_{i'} - b_{i'j'}) = v_i(x_{i'} - b_{i'j'})$ et de $x_i - x_{i'} = (x_i - b_{ij}) + (b_{ij} - b_{i'j'}) + (b_{i'j'} - x_{i'})$ il vient $v_i(x_i - x_{i'}) = v_i(x_{i'} - b_{i'j'}) < \beta_i$ donc $\beta_i - v_i(x_i - x_{i'}) = \beta_i - v_i(x_{i'} - b_{i'j'}) \in \Pi_i$. Si par contre $v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) < \beta_i$ alors $w_{ij}(b_{ij} - b_{i'j'}) < \alpha_{ij}$ donc par la condition (I), valable par hypothèse, on déduit que $\alpha_{ij} - w_{ij}(b_{ij} - b_{i'j'}) \in \Lambda_{ij}$ (car Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$ qui est le plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations w_{ij}, $w_{i'j'}$ lorsque

$i \neq i'$), donc $\beta_i - v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) \in \Pi_i = \Lambda_{ij}/\Delta_{ij}$; on conclut de même que $\beta_i - v_i(x_i - x_{i'}) \in \Pi_i$.

Puisque l'arbre engendré par les valuations $v_1, \ldots, v_s$ possède longueur 2, il existe alors un élément $x \in K$ tel que $v_i(x - x_i) = \beta_i + \pi_i$. Donc $w_{ij}(x - x_i) > \alpha_{ij}$ pour i, j quelconques.

Or, de cela on conclut que $w_{ij}(x - b_{ij}) = \min\{w_{ij}(x - x_i), w_{ij}(x_i - b_{ij})\} = \alpha_{ij}$ pour des indices quelconques i, j. Cela termine de démontrer le théorème.

Nous concluons ce numéro avec une remarque. Dans l'enoncé du théorème 5' nous avons supposé que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ était compatible. Il ne faut pas croire que cela soit nécessaire pour la validité du théorème, lorsque $b_1, \ldots, b_r$ ne sont pas tous nuls. En effet, par exemple, soient données les valuations w_1, w_2, les éléments α_1, α_2 appartenant respectivement à leurs groupes de valeurs et tels que $\bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1$; enfin, soient $b_1, b_2 \in K$ tels que $w_1(b_1) = \alpha_1$, $w_2(b_2) = \alpha_2$; alors si $x = 0$, on a $w_1(x - b_1) = w_1(b_1) = \alpha_1$, $w_2(x - b_2) = w_2(b_2) = \alpha_2$ et néanmoins (α_1, α_2) n'est pas compatible. Quoique cet exemple montre que la compatibilité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ne soit pas nécessaire, dans la pratique on peut fort bien se borner à considérer seulement ce cas, qui suffit pour les applications.

4. Nous allons appliquer le théorème d'approximation sous sa forme générale pour l'étude de l'arithmétique d'un anneau intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation. Les résultats qui nous obtiendrons généralisent les lemmes 5 et 6 pour le cas où les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes.

Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K qui nous supposerons deux à deux incomparables selon la relation $\leq$, notons $A_1, \ldots, A_r$ leurs respectifs anneaux de valuation et soit $A = A_1 \cap \cdots \cap A_r$. Pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, soit l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ de la suite de position de w_i relativement à $\{w_1, \ldots, w_r\}$ donc $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij}$ est le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$. Remarquons que lorsque les valuations données sont deux à deux indépendantes alors les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ sont tous nuls.

Théorème 6. Avec les notations ci-dessus, pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, soit $\mathfrak{a}_i$ un idéal de l'anneau A_i tel que $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset \mathfrak{a}_i \subseteq A_i$ et $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ (idéal de l'anneau intersection $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$); alors, on a $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de l'anneau A tel que pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, on ait $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset \mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$; alors $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$.

Démonstration. Soit d'abord pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, $\mathfrak{a}_i$ un idéal de l'anneau A_i, de façon que $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset \mathfrak{a}_i \subseteq A_i$ et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$. Donc, on a $A_i \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Prenons des éléments $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $a_i \notin \mathfrak{p}_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, r)$ et soit $w_i(a_i) = \alpha_i > 0$. Si, pour tout indice i, $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij}$, alors Δ_i est le sous-groupe isolé de Γ_i qui

correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$, donc $w_i(a_i)=\alpha_i\in\Delta_i$. De cela il résulte que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ est compatible. Par le théorème 5, il existe alors un élément $a\in K$ tel que $w_i(a)=\alpha_i\geq 0$, donc $a\in A=\bigcap_{i=1}^{r}A_i$. En outre, pour tout indice $i=1,\ldots,r$, l'élément a/a_i est une unité de A_i. Donc $a\in A_ia_i\subseteq A_i\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_i$, $a\in\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}$ et $a_i\in A_ia\subseteq A_i\mathfrak{a}$. Cela montre que le complémentaire de $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ dans l'ensemble $\mathfrak{a}_i$ est contenu dans $A_i\mathfrak{a}$ (pour tout indice $i=1,\ldots,r$).

Montrons maintenant que $\mathfrak{p}_i^{(1)}\subseteq A_i\cdot\mathfrak{a}$, d'où il résultera que $\mathfrak{a}_i\subseteq A_i\mathfrak{a}$ $(i=1,\ldots,r)$. Soit $b\in\mathfrak{p}_i^{(1)}$, donc $w(b)\notin\Delta_i$. Si on prend maintenant des éléments $a_j\in\mathfrak{a}_j$, $a_j\notin\mathfrak{p}_j^{(1)}$, comme ci-dessus, on voit que l'élément $a\in A$ tel que $w_j(a)=w_j(a_j)\in\Delta_j$ $(j=1,2,\ldots,r)$ appartient à $\mathfrak{a}$. Donc $w_i(a)<w_i(b)$, car $w_i(b)\notin\Delta_i$ et alors $b\in A_i\cdot a\subseteq A_i\mathfrak{a}$.

Réciproquement, soit maintenant $\mathfrak{a}$ un idéal de l'anneau A tel que $\mathfrak{p}_i^{(1)}\subset A_i\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_i$, pour tout indice $i=1,\ldots,r$. Il est clair que $\mathfrak{a}\subseteq\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i$; montrons que $\mathfrak{a}\supseteq\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i$.

Tout d'abord, remarquons que $w_i(\mathfrak{a})=w_i(\mathfrak{a}_i)$. En effet, de $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}_i$ il vient $w_i(\mathfrak{a})\subseteq w_i(\mathfrak{a}_i)$, et de $\mathfrak{a}_i=A_i\cdot\mathfrak{a}$ il résulte que $w_i(\mathfrak{a}_i)$ est contenu dans la classe supérieure de Γ_i engendrée par l'ensemble $w_i(\mathfrak{a})$. Ainsi, pour montrer que $w_i(\mathfrak{a})=w_i(\mathfrak{a}_i)$ il suffit de montrer que $w_i(\mathfrak{a})$ est une classe supérieure de Γ_i. Or, soit $\alpha_i=w_i(a)$, $a\in\mathfrak{a}$ et $\alpha_i<\beta_i\in\Gamma_i$ donc $0<\gamma_i=\beta_i-\alpha_i\in\Gamma_i$. Remarquons qu'il existe $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)\in\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_r$, compatible, avec $0\leq\gamma_i$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$[0]). Par le théorème 5, si $c\in A$ est tel que $w_j(c)=\gamma_j$ $(j=1,\ldots,r)$ alors $c\cdot a\in A\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ et $w_i(ca)=\gamma_i+\alpha_i=\beta_i$, donc $\beta_i\in w_i(\mathfrak{a})$.

Ceci étant démontré, soit $a\in\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i$ et $w_i(a)=\alpha_i\in w_i(\mathfrak{a}_i)$ $(i=1,\ldots,r)$. Pour tout indice $i=1,\ldots,r$, il existe $a_i\in\mathfrak{a}$ tel que $w_i(a_i)=\alpha_i$. Pour tout couple d'indices $i,j=1,\ldots,r$, soit $\beta_{ij}\in\Gamma_j$ l'élément ainsi défini: posons $\beta_{ii}=0$; ensuite, si $\alpha_j<w_j(a_i)$ et $w_j(a_i)-\alpha_j\notin\Delta_j$, posons $\beta_{ij}=0$; et enfin, dans les cas restants, soit $\delta_{ij}\in\Delta_j$ tel que $\delta_{ij}>\max\{0,w_j(a_i)-\alpha_j\}$, et alors posons $\beta_{ij}=\alpha_j+\delta_{ij}-w_j(a_i)>0$. Alors, pour tout indice $i=1,\ldots,r$, $(\beta_{i1},\beta_{i2},\ldots,\beta_{ir})\in\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_r$ est compatible, comme on le vérifie immédiatement. Par le théorème 5, il existe des éléments $b_i\in A$ $(i=1,\ldots,r)$ tels que $w_j(b_i)=\beta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,r)$. De cela il résulte que si $b=\sum_{i=1}^{r}b_ja_j\in A\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ alors $w_i(b_ia_i)=w_i(a_i)=\alpha_i$ et si $j\neq i$ on a $w_i(b_ja_j)=\beta_{ji}+w_i(a_j)>\alpha_i$ (dans tous les cas possibles). On conclut que $w_i(b)=\alpha_i$ $(i=1,\ldots,r)$. Puisque $a/b\in A$ il résulte que $a\in A\cdot b\subseteq A\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$.

[0]) Nous avons fait usage du fait suivant que se démontre facilement par induction sur le nombre r de valuations: si $w_1,\ldots,w_r$ sont des valuations deux a deux incomparables selon $\leq$ d'un corps K, si $0\leq\gamma_1\in\Gamma_1$, alors il existe des éléments positifs $\gamma_2\in\Gamma_2,\ldots,\gamma_r\in\Gamma_r$, tels que $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)\in\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_r$ soit compatible. En effet, si l'affirmation a déjà été montrée pour $r-1$ valuations, soient les éléments positifs $\gamma_2\in\Gamma_2,\ldots,\gamma_{r-1}\in\Gamma_{r-1}$, tels que $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{r-1})$ soit compatible. Si $\mathfrak{p}_r^{(1)}\subseteq A_i$, prenons $\gamma_r\in\Gamma_r$, positif, tel que $\overline{\gamma}_r=\overline{\gamma}_i$; on vérifie aisément que $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)$ est compatible.

Remarque. Le théorème n'est plus valable lorsqu'on considère des idéaux entiers quelconques $\mathfrak{a}_i$ des anneaux A_i. C'est ce qui montre l'exemple suivant. Soient les anneaux de valuation A_1, A_2, A_3 d'un corps K, de façon que $A_1A_2 = B = (A_1)_\mathfrak{p} = (A_2)_\mathfrak{p}$, (où $\mathfrak{p}$ est le plus grand idéal premier commun à A_1 et à A_2), et $A_1A_3 = A_2A_3 = K$; alors on a $\mathfrak{p}_1^{(1)} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_2^{(1)} = \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}_3^{(1)} = (0)$. Si $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ et si $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3)$ alors $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{a}_i = (0)$, néanmoins $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \neq A_1 \cdot \mathfrak{a} = (0)$.

Pour la généralisation du lemme 6, faisons les considérations suivantes.

Si A_1, A_2 sont les anneaux des valuations w_1, w_2 du corps K, soit $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun à A_1, A_2, et $B = A_1 \cdot A_2 = (A_1)_\mathfrak{p} = (A_2)_\mathfrak{p}$; notons $\mathscr{K} = B/\mathfrak{p}$ et dans le corps $\mathscr{K}$ soient les valuations w_1', w_2' ayant anneaux de valuation respectivement égaux à $A_1/\mathfrak{p}$, $A_2/\mathfrak{p}$, donc leurs corps des restes coincident respectivement avec $\mathscr{K}_1^0$ et $\mathscr{K}_2^0$ (corps des restes de K par les valuations w_1, w_2). Notons $\varphi_1 \colon A_1/\mathfrak{p} \to \mathscr{K}_1^0$, $\varphi \colon A_2/\mathfrak{p} \to \mathscr{K}_2^0$ les applications canoniques de passage au corps des restes.

Définition. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K, et $b_1, \ldots, b_r$ des éléments appartenant respectivement aux corps des restes $\mathscr{K}_1^0, \ldots, \mathscr{K}_r^0$, des valuations données. On dit que $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathscr{K}_1^0 \times \cdots \times \mathscr{K}_r^0$ est compatible lorsque pour tout couple d'indices distincts i, j, on a $\varphi_i^{-1}(b_i) \cap \varphi_j^{-1}(b_j) \neq \emptyset$.

Si les valuations $w_1, \ldots, w_r$ de K sont deux à deux indépendantes, alors tout $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathscr{K}_1^0 \times \cdots \times \mathscr{K}_r^0$ est compatible, en vertu du lemme 6.

Lemme 11. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K, et $\mathscr{K}_1^0, \ldots, \mathscr{K}_r^0$, leurs respectifs corps des restes. Si $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathscr{K}_1^0 \times \cdots \times \mathscr{K}_r^0$ est compatible, il existe un élément $a \in A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ (intersection des anneaux A_i des valuations w_i) dont la classe résidue selon la valuation w_i est égale à b_i (pour tout indice i).

Démonstration. Prenons dans chaque classe résidue $b_i \in \mathscr{K}_i^0$ $(i = 1, \ldots, r)$ un répresentant $a_i \in A_i$; tout revient à trouver un élément $a \in A$ tel que $a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i}$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Notons $w_j(a_i) = \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, donc $\alpha_{ii} \geq 0$; s'il existait un indice j tel que $\alpha_{ij} < 0$, alors $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ii} = \bar{0}$. Prenons pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, un élément δ_i tel que $0 < \delta_i \in \Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij}$. Posons $\beta_{ii} = \delta_i$, si $j \neq i$ et $\alpha_{ij} < 0$ posons $\beta_{ij} = -\alpha_{ij}$, et enfin si $j \neq i$ et $\alpha_{ij} \geq 0$ posons $\beta_{ij} = \delta_j$. Alors $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ir}) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible. Par le théorème 5', il existe pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, un élément $x_i \in K$ tel que $w_i(x_i - 1) = \beta_{ii}$ et $w_j(x_i) = \beta_{ij}$ (pour $j \neq i$); donc $x_i \in A$ et $x_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$. Soit $a_i' = x_i a_i$, donc $a_i' \in A$ $(i = 1, \ldots, r)$. Si le lemme a déjà été démontré lorsque les répresentants pris sont dans l'anneau A, alors il existe $a \in A$ tel que $a \equiv a_i' \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$ pour $i = 1, \ldots, r$. Or, $a_i' - a_i = (x_i - 1) \cdot a_i \in \mathfrak{p}_i^0$, donc $a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Ainsi, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $a_1, \ldots, a_r \in A$. Si on note $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^0 \cap A$ $(i = 1, \ldots, r)$, nous devons résoudre le système de congruences deux à deux compatibles $x \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i}$, pour $i = 1, \ldots, r$, car

si $i \neq j$ alors $a_i - a_j \in \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$, en vertu de l'hypothèse faite sur la compatibilité de $(b_1, \ldots, b_r)$.

Nous utilisons maintenant un résultat connu à ce propos (voir BOURBAKI [1], page 27, exerc. 25), à savoir: pour l'existence de solution du système de congruences ci-dessus, il suffit de montrer que si $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq r$, si $\mathfrak{a} = \bigcap_{h=1}^{q} \mathfrak{p}_{i_h}$ alors $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_k) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$; on peut naturellement supposer tous les indices $i_1, \ldots, i_q, j, k$ distincts et tout revient à montrer que $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_k) \subseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$.

Soit $x_j + x_k \in \mathfrak{a}$, où $x_j \in \mathfrak{p}_j$, $x_k \in \mathfrak{p}_k$, et supposons que $x_j \notin \mathfrak{a}$ (donc $x_k \notin \mathfrak{a}$) sinon il serait trivial. Posons $w_{i_h}(x_j) = \xi_h$ $(h = 1, \ldots, q)$, $w_j(x_j) = \xi_j$, $w_k(x_j) = \xi_k$, et soit $y_{i_h} = x_j$ $(h = 1, \ldots, q)$, $y_j = y_k = 0$. Par le théorème 5', il existe un élément $z \in K$ tel que $w_{i_h}(z - x_j) = \xi_h + \varepsilon_h > 0$ (où $0 < \varepsilon_h \in \Delta_{i_h}$), pour $h = 1, \ldots, q$, $w_j(z) = \xi_j > 0$, $w_k(z) = \xi_k + \varepsilon_k > 0$ (où $0 < \varepsilon_k \in \Delta_k$). Donc $z - x_j \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j$ et alors $w_{i_h}(z + x_k) = w_{i_h}[(z - x_j) + (x_j + x_k)] > 0$, donc $z + x_k \in \mathfrak{a}$, $z + x_k \in \mathfrak{p}_k$; de cela il résulte que $x_j + x_k = (x_j - z) + (z + x_k) \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$. On a ainsi terminé de montrer le lemme.

Bibliographie

[1] BOURBAKI: Algèbre, chap. VI et VII. Paris: Hermann & Cie. 1953. — [2] BOURBAKI: Spécialisations et Valuations. Notes miméographiées. — [3] KRULL: Allgemeine Bewertungstheorie. J. f. Math. **167**, 160—196 (1932). — [4] JAFFARD: Théorie Arithmétique des Anneaux du Type de Dedekind, I. Bull. Soc. Math. France **80**, 61—100 (1952). — [5] NAGATA: On the Theory of Henselian Rings. Nagoya Math. J. **5**, 45—57 (1953).

Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-Brasil

(Eingegangen am 26. August 1956)

PARAMESWARAN, M. R.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 19—26 (1957)

Some product theorems in summability *)

By
M. R. PARAMESWARAN

§ 1. Introduction. In this note we shall be concerned with a real sequence $s=\{s_n\}$ where $n=0, 1, 2, \ldots$ and two transforms of s: $(\mathcal{T}_1)s$ and $(\mathcal{T}_2)s$ corresponding to summability methods $(\mathcal{T}_1)$ and $(\mathcal{T}_2)$. Writing $(\mathcal{T}_1)[(\mathcal{T}_2)s]=(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_2)s$ we find that SZÁSZ [8], RAJAGOPAL [6] and RAMANUJAN [7] have shown in certain cases that the summability method $(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_2)$ includes the method $(\mathcal{T}_1)$; i.e., in the usual notation, $(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_2)>(\mathcal{T}_1)$. Here on the other hand, we show that

(1) $$(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_2)>(\mathcal{T}_1) \quad \text{as well as} \quad (\mathcal{T}_1)>(\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_2)$$

in certain cases where $(\mathcal{T}_2)s$ is a special transform which is Mercerian in the sense that (i) the method $(\mathcal{T}_2)$ is regular and (ii) a sequence summable $(\mathcal{T}_2)$ is necessarily convergent. More precisely, we prove a result of the following type.

Let $\{\lambda_n\}$ be a sequence of numbers, complex in general, and such that

(2) $$\sum_{n>0}|\lambda_n|<|\lambda_0|.$$

Let $(\mathcal{L},\lambda_n)$ denote the method of transformation of the sequence $s=\{s_n\}$ to the sequence $t=\{t_n\}$ by the equations

(3) $$t_n=\frac{\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n-1}+\cdots+\lambda_n s_0}{\sum\limits_{n\geq 0}\lambda_n}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots, \ldots\ ^{1}).$$

Then the transformation of s defined by (3), which may be shortly written $(\mathcal{L},\lambda_n)s$, is Mercerian (in the sense already defined) whenever the condition (2) is satisfied, and, for certain methods of summability $(\mathcal{T}_1)$ to be specified presently, we have

(1′) $$(\mathcal{T}_1)>(\mathcal{T}_1)(\mathcal{L},\lambda_n) \quad \text{and} \quad (\mathcal{T}_1)(\mathcal{L},\lambda_n)>(\mathcal{T}_1).$$

In the case in which $\lambda_n=0$ for $n>k$ (a positive integer, or zero if we include the identity transformation $t_n=s_n$), we have instead of (3):

(3′) $$t_n=\frac{\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n-1}+\cdots+\lambda_k s_{n-k}}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

*) Read at the 22nd Conference of the Indian Math. Soc., 1956.

1) It is of course assumed that the denominator of any "mean" such as that defined by (3) is not zero. In the case of the mean t_n of (3), the denominator $\sum\lambda_n\neq 0$ on account of (2). It is to be noted that Polya's Mercerian transformation $t_n=c\,s_n+(1-c)s_{n-1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $\mathrm{Re}\,(c)>\frac{1}{2}$ ([5], Abschn. III, Nr. 48) is a special case of (3) under the condition (2).

where we define $s_n = 0$ for all negative integers n. It is convenient to refer to the method $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ in this case as the method $(\mathscr{Z}_k)$, following SZÁSZ ([8], p. 81) who considers a $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ method, not subject to the condition (2) and wherein $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$, $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = 0$ and calls it the (Z_k) method.

In any case, the $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ method is similar to the Nörlund method $(\mathscr{N}, \lambda_n)$, the transform $(\mathscr{N}, \lambda_n)s$ being obtained from $(\mathscr{Z}, \lambda_n)s$ as defined in (3) by replacing the infinite series $\sum \lambda_n$ in (3) by $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ and condition (2) by $\lambda_n \geq 0$.

Theorems 1, 2, 3 of this note are statements of the type (1'), with $(\mathscr{T}_1)$ particularised as either the Nörlund method $(\mathscr{N}, p_n)$ or the Abel method $(\mathscr{A})$ or the Borel method $(\mathscr{B})$. The converse parts of Theorems 1, 2 have been proved by VUČKOVIĆ ([9], Theorems 1 and 2) for method $(\mathscr{Z}_1)$ instead of either $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ or $(\mathscr{Z}_k)$, by arguments entirely differing from and more laboured than those of this note.

Theorem 4 shows that for a particular method $(\mathscr{Z}_1^*)$ associated with the method $(\mathscr{Z}_1)$ we have in certain cases the result

$$(\mathscr{B}) > (\mathscr{B})(\mathscr{Z}_1^*), \quad \textit{but} \quad (\mathscr{B})(\mathscr{Z}_1^*) \not> (\mathscr{B})$$

of which the negative half is due to SZASZ ([8], p. 81).

Theorem 5, the final result, extends a theorem of ANDERSEN'S, mentioned by VUČKOVIC ([9], p. 53). Its statement is again of the type (1') but it involves, instead of $(\mathscr{Z}, \lambda_n)s$ a regular Hausdorff transform of s which is Mercerian.

The proof of Theorem 1 involves an application of functional analysis to sequence-to-sequence matrix transformations which define the transform $t = \{t_n\}$ of $s = \{s_n\}$ by the equations

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} s_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Here, following the usual practice, we may denote the matrix (c_{nk}) by C and write (4) as the matrix equation $t = Cs$. Also, for a given C, we may write

$$(C)_{nk} = c_{nk}, \qquad \|C\| = \underset{0 \leq n < \infty}{\text{l. u. b.}} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|.$$

§ 2. Lemmas. Before proceeding to our theorems we may observe that the transform of the sequence s, denoted by t in Theorems 1, 3 and 5, our main results, is a Mercerian transform. This observation, in respect of the t in Theorems 1 and 3 becomes evident when we take $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = 0$ in Theorem 1, thus establishing the equivalence of $s_n \to l$ [2]) and $t_n \to l$ in Theorem 1 and hence in Theorem 3 as a particular case. As regards the t in Theorem 5, Lemma 2 shows that it is a Mercerian transform of s. The other lemmas below furnish important steps or arguments in our proofs.

Lemma 1. *Let Γ be a Banach algebra with unit element I, $\|I\| = 1$, and let A be an element of Γ, with norm less than unity. Then the element $I + A$ of Γ has an inverse $(I + A)^{-1}$ in Γ.*

[2]) In the present paper l always denotes a finite number.

Lemma 1'. *The set Γ of matrices C which transform every null sequence into a null sequence is a Banach algebra with the norm defined by:*

$$\|C\| = \underset{0 \le n < \infty}{\text{l. u. b.}} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| .$$

Lemma 1 is well known (e.g., HILLE [3], p. 92). Lemma 1' is proved along the same lines as the parallel result for the set of convergence-preserving matrices (PARAMESWARAN [4], p. 364).

Lemma 2. *Let the matrix $H = (h_{nk})$ define a regular sequence-to-sequence Hausdorff transformation, and let I be the identity matrix. Then the matrix equation*

$$t = \frac{I + qH}{1 + q} s \tag{5}$$

where q is any number $\neq -1$, defines a regular Hausdorff transformation of the sequence s to the sequence t; and provided that

$$|q| \cdot \|H\| = |q| \cdot \underset{0 \le n < \infty}{\text{l. u. b.}} \sum_{k=0}^{n} |h_{nk}| < 1 , \tag{6}$$

the inverse of the transformation in (5) exists and is regular Hausdorff.

Proof. The first part is obvious. The second part follows from Lemma 1 and the result parallel to Lemma 1', for convergence-preserving matrices already referred to [4]. For, by these results the inverse of the transformation in (5) exists and is convergence-preserving; besides, we know that the inverse of a Hausdorff transformation is Hausdorff (when it exists) and the convergence-preserving inverse of a regular transformation is itself regular (COOKE [1], p. 177).

Lemma 3. *Let Λ be the matrix*

$$\Lambda = (\lambda_{nk}) = (\lambda_{n-k}) \tag{7}$$

where λ_n for non-negative n is the sequence appearing in (2) and λ_n for negative n is 0. Let

$$p_n \ge 0, \quad P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$(D_p)_{nk} = \begin{cases} P_n^{-1} & \text{for} \quad k = n \\ 0 & \text{for} \quad k \neq n \end{cases} \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Then the matrix $D_p \Lambda D_p^{-1}$ transforms every null sequence into a null sequence and has an inverse $D_p \Lambda^{-1} D_p^{-1}$ with the same property.

Proof. It is easily seen by direct calculation that

$$(D_p \Lambda D_p^{-1})_{nk} = \lambda_{n-k} \cdot P_k P_n^{-1} \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

and therefore

$$\|D_p \Lambda D_p^{-1}\| = \underset{0 \le n < \infty}{\text{l. u. b.}} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{n-k} P_k P_n^{-1}| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < \infty ,$$

since $0<P_k\leq P_n$ for $k\leq n$ and $\lambda_{n-k}=0$ for $k>n$. Also $\lambda_{n-k}P_kP_n^{-1}\to 0$ as $n\to\infty$ for each fixed $k=0, 1, 2, \ldots$ since $\lambda_{n-k}\to 0$ and $P_kP_n^{-1}\leq 1$ $(n>k)$. Thus $D_p A D_p^{-1}$ fulfils the necessary and sufficient conditins for transforming every null sequence into a null sequence. This proves the first part of the lemma.

For the second part, we have

$$\left\| \frac{D_p A D_p^{-1}}{\lambda_0} - I \right\| = \text{l. u. b.}_{0\leq n<\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{n-k} P_k}{\lambda_0 P_n} \right| < 1,$$

since $0<P_k\leq P_n$ and $|\lambda_0|>\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|$. It follows from Lemmas 1', 1 that $D_p A D_p^{-1}$ has an inverse with the required property.

Lemma 4 (SZÁSZ [8], pp. 77–80; RAJAGOPAL [6], Corollary I). *Let $(\mathscr{T}_1)$ denote either* ABEL'S *method or* BOREL'S *method and let $(\mathscr{H})$ denote a regular Hausdorff method. Then*

$$(\mathscr{T}_1)(\mathscr{H}) > (\mathscr{T}_1).$$

Lemma 5. *Let $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ be two regular Hausdorff methods. Then*

$$(\mathscr{H}_1)(\mathscr{H}_2) > (\mathscr{H}_1).$$

The proof is immediate since $(\mathscr{H}_1)(\mathscr{H}_2)=(\mathscr{H}_2)(\mathscr{H}_1)$.

Lemma 6. *Let $f(x)$ be a real-valued differentiable function and let α, β be real numbers having the same sign and such that $\alpha f(x)+\beta f'(x)\to 0$ as $x\to\infty$. Then $f(x)\to 0$ as $x\to\infty$.*

The proof is on exactly the same lines as for the case $\alpha=\beta=1$ given by HARDY ([2], Theorem 53).

§ 3. The principal theorems. We now proceed to prove the results outlined in § 1.

Theorem 1. *Let $\{p_n\}$ be defined as in (8) and let the $(\mathcal{N}, p_n)$ transform of $s=\{s_n\}$ be denoted by*

$$N_n(p; s) \equiv \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \cdots + p_n s_0}{P_n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\ ^{3}).$$

Also let $t=\{t_n\}$ be defined by (3) with the restriction (2) on $\{\lambda_n\}$. Then

$$N_n(p; s)\to l \quad \textit{implies} \quad N_n(p; t)\to l \textit{ and conversely,}$$

where (2) is required in its entirety for the converse part, but only in the form $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|<\infty$ for the first part.

Proof. Let the matrix A be defined by (7), the matrix D_p by (9), and the matrix P by

$$P=(p_{nk}) \quad \text{where} \quad p_{nk}=\begin{cases} p_{n-k} & \text{for} \quad k\leq n \\ 0 & \text{for} \quad k>n. \end{cases}$$

[3]) VUČKOVIĆ ([9], Th. 1) uses the superfluous extra conditions $p_n/P_n\to 0$, $P_n\to\infty$ in proving his special case of the converse part of Theorem 1.

If we write

$$u_n = N_n(p; s), \qquad v_n = N_n(p; t)$$

we get, from the definitions of P, D_p and Λ in (10), (9) and (7), the following matrix equations for the sequences u and v in terms of s and t respectively

$$(11) \qquad u = (D_p P)\, s = D_p P s, \qquad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) v = (D_p P)\Lambda s = D_p P \Lambda s.$$

Now, in our conclusion which is the equivalence of the statements $u_n \to l$ and $v_n \to l$ we may take $l = 0$. For, the matrices $D_p P$ and $D_p P \Lambda$ transform the constant sequence $\{l\}$ to $\{l\}$ and $\Big\{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) l\Big\}$ respectively, so that we can change $\{s_n\}$ to $\{s_n - l\}$ in (11) and give our conclusion as the equivalence of the relations $u_n \to 0$ and $v_n \to 0$.

From the definition of u in (11) we have

$$s = (D_p P)^{-1} u = P^{-1} D_p^{-1} u,$$

while it is easily verified that

$$P\Lambda = \Lambda P.$$

Hence, remembering that a product of lower-semi-matrices is associative, we get from the definition of v in (11):

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) v = D_p P \Lambda P^{-1} D_p^{-1} u = D_p \Lambda P P^{-1} D_p^{-1} u = D_p \Lambda D_p^{-1} u.$$

From Lemma 3 it is now clear that $u_n \to 0$ implies $v_n \to 0$ and conversely. In the last-stated conclusion, the first part follows from the first part of Lemma 3 and the second (converse) part from the second part of Lemma 3. Hence the condition $\{\lambda_n\}$ used in each part of Theorem 1 is the same as the one used in the corresponding part of Lemma 3.

Theorem 2. *Let the power series*

$$A(x; s) \equiv (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

have radius of convergence 1. *Let* $t = \{t_n\}$ *be defined by* (3'), *with of course* $\{\lambda_n\}$ *satisfying the condition* $\sum \lambda_n \neq 0$. *Then*

$$A(x; s) \to l \quad (\text{as } x \to 1 - 0) \text{ implies } \quad A(x; t) \to l \qquad \textit{and conversely.}$$

This theorem is trivial[4]) and is included only for comparison with the next. The proof is evident from the relation

$$A(x; t) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_k x^k}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k} A(x; s).$$

[4]) The triviality is masked in Vučković's proof [9] of the case $k = 1$ of the converse part of Theorem 2.

Theorem 3. *Let the Borel transform of* $s=\{s_n\}$, *i.e.*,

$$B(x;s)\equiv e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}$$

exist for $x>0$. *Let* $t=\{t_n\}$ *be defined by* (3′) *with the restriction on* $\{\lambda_n\}$ *given in* (2). *Then*

$$B(x;s)\to l \quad (\text{as } x\to\infty) \quad \text{implies} \quad B(x;t)\to l$$

and conversely provided that $B(x;s)$ *is bounded, the first part of the statement being true even without the condition* (2).

Proof. By definition

$$B(x;t)=\frac{\lambda_0 B_0(x)+\lambda_1 B_1(x)+\cdots+\lambda_k B_k(x)}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k} \tag{12}$$

where

$$\begin{cases} B_0(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}=B(x;s), \\ B_r(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_{n-r}\frac{x^n}{n!}=e^{-x}\int_0^x e^y B_{r-1}(y)\,dy \qquad (r\geq 1). \end{cases} \tag{13}$$

From (13) we obtain

$$\varliminf_{x\to\infty}B_{r-1}(x)\leq\varliminf_{x\to\infty}B_r(x)\leq\varlimsup_{x\to\infty}B_{r-1}(x)$$

so that

$$\lim_{x\to\infty}B_r(x)=\lim_{x\to\infty}B_0(x) \tag{14}$$

if the righthand limit exists, and, in any case,

$$\varlimsup_{x\to\infty}|B_r(x)|\leq\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|. \tag{15}$$

It follows at once from (12) and (14) that $B(x;s)\to l$ implies $B(x;t)\to l$.

To prove that $B(x;t)\to l$ implies $B(x;s)\to l$ under the condition (2) and the condition of boundedness of $B(x;s)$, we argue as follows. We may suppose that $l=0$ since we may consider $\{s_n-l\}$ instead of $\{s_n\}$. We then have to prove that the assumption $\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|=L>0$ contradicts the hypothesis $\lim_{x\to\infty}B(x;t)=0$, under the condition (2) which is

$$|\lambda_0|-\sum_{r=1}^{k}|\lambda_r|=\delta>0.$$

Given $\varepsilon>0$, by (15) and the assumption that $\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|=L>0$ we have, for all sufficiently large x, say $x>x_0$,

$$|\lambda_r B_r(x)|\leq|\lambda_r|\cdot(L+\varepsilon), \tag{16}$$

while, for any infinity of $x > x_0$,

$$|\lambda_0 B_0(x)| > |\lambda_0|\,(L-\varepsilon). \tag{17}$$

If $\varepsilon = \delta L/2(|\lambda_0|+|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_k|)$ we get from (12), (16) and (17), for an infinity of $x > x_0$,

$$\begin{aligned}|\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k|\,|B(x;t)| &\geq \big||\lambda_0 B_0(x)| - |\lambda_1 B_1(x)| - \cdots - |\lambda_k B_k(x)|\big| \\ &\geq |\lambda_0|\,(L-\varepsilon) - (|\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots+|\lambda_k|)\,(L+\varepsilon) \\ &= \delta L - \delta L/2 = \delta L/2 > 0.\end{aligned}$$

This contradicts the hypothesis $\lim_{x\to\infty} B(x;t) = 0$ and so

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|B_0(x)| = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{x\to\infty} B_0(x) = 0,$$

as we wished to prove.

Remarks on Theorem 3. Condition (2) and the boundedness of $B(x;s)$ are *sufficient*, but not *necessary*, for the converse half of the conclusions of Theorem 3. For instance, Szász ([8], p. 81) asserts without proof the converse half in the case $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$. Again, by using Lemma 6, the converse half of Theorem 3 can be established for $k = 1$ under the single condition

$$\text{either } |\operatorname{Re}\lambda_0| > |\operatorname{Re}\lambda_1| \quad \text{or} \quad |\operatorname{Im}\lambda_0| > |\operatorname{Im}\lambda_1|.$$

For, when $k = 1$ we get from (12) and (13):

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda_0+\lambda_1)\,B(x;t) &= \lambda_0 B_0(x) + \lambda_1 B_1(x) \\ &= \lambda_0[B_1(x) + B_1'(x)] + \lambda_1 B_1(x) \\ &= (\lambda_0+\lambda_1)\,B_1(x) + \lambda_0 B_1'(x).\end{aligned}\right. \tag{18}$$

If $|\operatorname{Re}\lambda_0| > |\operatorname{Re}\lambda_1|$ then $\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Re}\lambda_0$ have the same sign, a similar statement being true of imaginary parts. Hence, considering either

$$\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)\cdot B(x;t) \quad \text{or} \quad \operatorname{Im}(\lambda_0+\lambda_1)\cdot B(x;t)$$

and appealing to Lemma 6, we see that $B(x;t)\to 0$ implies $B_1(x)\to 0$ and hence $B_0(x)\to 0$ from (18).

Theorem 4. *Let $B(x;s)$, defined as in Theorem 3, exist for $x > 0$. Let $t = \{t_n\}$ be defined by*

$$t_n = \frac{\lambda_0 s_n + \lambda_1 s_{n+1}}{\lambda_0+\lambda_1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

i.e., t is the transform of s by the matrix which is the transpose of the matrix defining the transform by $(\mathscr{X}_1)$. Then, provided that either $\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Re}\lambda_1$ or $\operatorname{Im}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Im}\lambda_1$ have the same sign,

$$B(x;t)\to l \quad \textit{implies} \quad B(x;s)\to l$$

but not conversely.

Proof. As in Theorem 3, it is enough to consider the case $l=0$. We have

$$(\lambda_0+\lambda_1)\,B(x;t) = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n+1})\frac{x^n}{n!}$$
$$= \lambda_0 B(x;s)+\lambda_1[B(x;s)+B'(x;s)]$$
$$= (\lambda_0+\lambda_1)B(x;s)+\lambda_1 B'(x;s).$$

It follows from Lemma 6 that $B(x;t)\to 0$ implies $B(x;s)\to 0$ with the given restriction on λ_0, λ_1.

The example due to Szász ([8], p. 81) in which $\lambda_0=\lambda_1=1$ shows that the converse is not true.

Theorem 5. *Let the transform $t=\{t_n\}$ of $s=\{s_n\}$ be defined by (5) and let q satisfy the inequality (6). Let $(\mathscr{T}_1)s$ be either the Abel transform $(\mathscr{A})s$ or the Borel transform $(\mathscr{B})s$, or a regular Hausdorff transform $(\mathscr{H})s$ of the sequence s. Then*

$(\mathscr{T}_1)$-summability of s implies that of t to the same value, and conversely, where the converse part alone requires the restriction on q.

Proof. When $(\mathscr{T}_1)s$ is either the Abel transform of s, or the Borel transform of s, the conclusion of the theorem follows from Lemmas 2, 4. When $(\mathscr{T}_1)s$ is a regular Hausdorff transform of s, the same conclusion follows from Lemmas 2, 5.

Remark on Theorem 5. In ANDERSEN's theorem referred to at the outset, H is the matrix of the $(C, 1)$ transformation and $(\mathscr{H})s$ is the (C, k) transform of s. In this case the restriction on q can be relaxed to $\operatorname{Re} q>-1$. For, if C_1 and C_k denote the matrices of the $(C, 1)$ and (C, k) transformations, it follows from $C_k\frac{I+qC_1}{1+q}s\to l$ that $\frac{I+qC_1}{1+q}C_k s\to l$, since Hausdorff transformations are commutable. It is now clear from MERCER's original theorem that $C_k s\to l$ if $\operatorname{Re} q>-1$.

I am thankful to Prof. C. T. RAJAGOPAL for helpful discussions and suggestions in the course of the preparation of this note.

References

[1] COOKE, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. London 1950. — [2] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [3] HILLE, E.: Functional analysis and semigroups. New York 1948. — [4] PARAMESWARAN, M. R.: Some converse theorems on summability. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **36**, 363—369 (1952). — [5] POLYA, G., u. G. SZEGO: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Berlin 1954. — [6] RAJAGOPAL, C. T.: Theorems on the product of two summability methods, with applications. J. Indian Math. Soc. **18**, 89—105 (1954). — [7] RAMANUJAN, M. S.: On the product of Abel and Quasi-Hausdorff transformations. Math. Z. **64**, 442—447 (1956). — [8] SZÁSZ, O.: On the product of two summability methods. Ann. Soc. Polonaise Math. **24**, 75—84 (1952). — [9] VUČKOVIĆ, V.: Deux theoremes de type Mercerien. Publ. Inst. Math., Beograd **8**, 53—58 (1955).

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras, India

(Eingegangen am 12. Januar 1957)

STALLMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 27—76 (1957)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. II*

Von

FRIEDEMANN STALLMANN

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift Bd. 60, S. 187—212 (1954) erschienenen ersten Mitteilung. Die dort entwickelten allgemeinen Methoden werden hier auf die Spezialfälle der Riemannschen (hypergeometrischen) und der Whittakerschen (konfluenten hypergeometrischen) Differentialgleichung angewendet. Für die Untersuchungen war zunächst der Gesichtspunkt maßgebend, daß diese Differentialgleichungen nach einer geeigneten Liouville-Transformation als Hilfsdifferentialgleichungen für verfeinerte asymptotische Abschätzungen in Betracht kommen, wie wir es am Schluß der ersten Mitteilung bereits erwähnten. Dabei interessieren diejenigen Lösungen der Hilfsdifferentialgleichungen, die sich hinreichend weit von den Singularitäten entfernt wie die Exponentialfunktion verhalten. Es gilt die Zusammenhänge zwischen diesen und den bekannten durch hypergeometrische Reihen darstellbaren kanonischen Lösungen herzustellen, sowie die Relationen zwischen den verschiedenen Hilfsfunktionen zu berechnen. Wegen der großen Bedeutung, die diese Beziehungen für die verfeinerte Untersuchung der Laméschen und verwandter Differentialgleichungen[1]) haben, schien es mir richtig, diese so vollständig wie möglich anzugeben.

Gleichzeitig — gewissermaßen als ein Nebenergebnis — erhielten wir aus diesen Untersuchungen asymptotische Abschätzungen der hypergeometrischen Funktionen und Reihen bei großen Parameterwerten. Die hier verwendeten Methoden, bei denen die Gesichtspunkte der konformen Abbildung im Vordergrund stehen, gestatten eine einheitliche Behandlung aller vorkommenden Fälle, so daß die Ergebnisse bei aller Vollständigkeit sehr übersichtlich bleiben. Hierin liegt meines Erachtens der Hauptunterschied gegenüber der bisher über diesen Gegenstand veröffentlichten Literatur[2]), bei der jeweils nur Spezialfälle behandelt werden.

---

* Der vorliegende Teil II bildet zusammen mit dem in Kürze erscheinenden Teil III die Habilitationsschrift des Verfassers, die von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule Gießen angenommen wurde.

[1]) Untersuchungen der Laméschen Differentialgleichung auf Grund der hier abgeleiteten Beziehungen bringt der dritte Teil dieser Arbeit. Entsprechende Untersuchungen der Matthieuschen und Sphäroidfunktionen werden zur Zeit vom Verfasser durchgeführt und sollen ebenfalls in absehbarer Zeit publiziert werden. Vgl. auch STALLMANN [7].

[2]) Vgl. hierzu etwa BATEMAN [1] Bd. 1, 75—78 und 277—282 und die dort angegebene Literatur.

Zur Darstellung ist noch zu sagen, daß alle Bezeichnungen ohne Änderung aus der ersten Mitteilung übernommen wurden. Die dort begonnene Numerierung der Paragraphen wird hier fortgesetzt. Bei Hinweisen beziehen sich also § 1 bis § 3 auf die erste, § 5 bis § 10 auf die vorliegende Mitteilung und entsprechendes gilt für die zitierten Formeln.

§ 4. Die Riemannsche Differentialgleichung. Allgemeines

4.1. Wir schreiben die Riemannsche Differentialgleichung[3]) nach unseren Festsetzungen in 1.2 in der Form:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-\delta_0^2}{x^2} + \frac{1-\delta_1^2}{(x-1)^2} - \frac{1+\delta_\infty^2-\delta_0^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right]. \tag{4.1.1}$$

Der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung bildet die obere Halbebene auf ein Kreisbogendreieck ab. Dabei gehen die singulären Stellen $x=0,\ 1,\ \infty$ in die Ecken des Dreiecks über, die zugehörigen Winkel haben die Größe $\pi\delta_0$, $\pi\delta_1$, $\pi\delta_\infty$. Die δ_ν seien positiv reell oder positiv imaginär, ganzzahlig reelle Werte seien jedoch ausgeschlossen. Diese erfordern eine gesonderte Untersuchung, die hier nicht durchgeführt werden soll. Sie führt im allgemeinen zu den gleichen Ergebnissen wie bei unganzen δ_ν, jedenfalls immer dann, wenn die betrachteten Größen auch für ganze δ_ν sinnvoll bleiben.

Die kanonischen Lösungen zu den Stellen der Bestimmtheit $x=0,\ 1,\ \infty$ lassen sich bekanntlich durch hypergeometrische Reihen ausdrücken. Die hierdurch festgelegten Funktionselemente betrachten wir zunächst auf der reellen Achse; so seien im Intervall $(0,\ 1)$ als $y_{(0,1)}^{(1),(2)}$, $y_{(1,0)}^{(1),(2)}$ die folgenden Lösungen von (4.1.1) definiert:

$$\left\{\begin{aligned}
y_{(0,1)}^{(1)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1+\delta_0; x\right) \\
y_{(0,1)}^{(2)}(x) &= x^{\frac{1-\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1-\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1-\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1-\delta_0; x\right) \\
y_{(1,0)}^{(1)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1+\delta_1; 1-x\right) \\
y_{(1,0)}^{(2)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1-\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0-\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0-\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1-\delta_1; 1-x\right).
\end{aligned}\right. \tag{4.1.2}$$

[3]) KLEIN [3], insbesondere S. 23—53.

Für die auftretenden Potenzen seien die Hauptwerte gewählt, es sei also

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}, \quad (1-x)^{\beta} = e^{\beta \log (1-x)}$$

mit reellem Logarithmus.

Die in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ gültigen Lösungen erhalten wir in bekannter Weise durch Transformation der Riemannschen Differentialgleichung in sich[4]), wodurch die singulären Stellen $x = 0, 1, \infty$ und dementsprechend auch die $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ vertauscht werden. Wir definieren so im Intervall $(-\infty, 0)$ als

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} y^{(1)\,(2)}_{(-\infty,\,0)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = (1-x)\, y^{(1)\,(2)}_{(0,\,1)}\left(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1; \dfrac{1}{1-x}\right) \\ y^{(1)\,(2)}_{(0,\,-\infty)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = (1-x)\, y^{(1)\,(2)}_{(1,\,0)}\left(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1; \dfrac{1}{1-x}\right) \end{cases}$$

und im Intervall $(1, \infty)$ als

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} y^{(1)\,(2)}_{(1,\,\infty)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = x\, y^{(1)\,(2)}_{(0,\,1)}\left(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0; \dfrac{x-1}{x}\right) \\ y^{(1)\,(2)}_{(\infty,\,1)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = x\, y^{(1)\,(2)}_{(1,\,0)}\left(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0; \dfrac{x-1}{x}\right), \end{cases}$$

die derart transformierten Lösungen (4.1.2). Die den y beigefügten $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ sollen dabei die Art der Permutation deutlich machen; wir werden sie im folgenden wieder fortlassen.

4.2. Relationen. Zwischen den Lösungen (4.1.2) besteht die Relation:

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} y^{(1)}_{(0,\,1)} = G_0(-\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, y^{(1)}_{(1,\,0)} + G_0(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, y^{(2)}_{(1,\,0)} \\ y^{(2)}_{(0,\,1)} = G_0(-\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, y^{(1)}_{(1,\,0)} + G_0(\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, y^{(2)}_{(1,\,0)}. \end{cases}$$

Dabei ist $G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ der folgende Ausdruck:

$$G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\beta)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)}.$$

Die zwischen den anderen Lösungspaaren gültigen Relationen ergeben sich hieraus wie in (4.1.3) und (4.1.4) durch Permutation der δ_ν.

Weiter haben wir zu betrachten die Umlaufsrelationen der Lösungen bei geschlossenen Umläufen um die singulären Stellen. Wir gehen davon aus, daß die in (4.1.2) bis (4.1.4) definierten Lösungen aus ihren Definitionsintervallen heraus überallhin in die obere und in die untere Halbebene analytisch fortgesetzt werden können. Der so in der oberen Halbebene erklärte und dort eindeutige Funktionszweig sei weiterhin mit $y^{(i)}_{(\alpha,\beta)}$, der in der unteren Halbebene erklärte zum Unterschied davon mit $\tilde{y}^{(i)}_{(\alpha,\beta)}$ bezeichnet. Die Umlaufsrelationen lassen sich dann darstellen als Relationen zwischen den $y^{(i)}_{(\alpha,\beta)}$ und $\tilde{y}^{(i)}_{(\alpha,\beta)}$ auf gewissen reellen Intervallen. So schreibt sich die Umlaufsrelation für die $y^{(1)}_{(0,1)}$, $y^{(2)}_{(0,1)}$ bei einmaligem Umlauf in mathematisch negativem

[4]) KLEIN [3] S. 43—49.

Sinne um $x=1$ als folgende Relation, gültig auf dem Intervall $(1, \infty)$:

$$(4.2.2)\quad \begin{cases} y^{(1)}_{(0,1)} = \dfrac{i}{\sin \pi \delta_0}\,(e^{i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{y}^{(1)}_{(0,1)} - \\ \qquad - 2\pi i\, H_0(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{y}^{(2)}_{(0,1)} \\ y^{(2)}_{(0,1)} = -2\pi i\, H_0(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{y}^{(1)}_{(0,1)} - \\ \qquad - \dfrac{i}{\sin\pi\delta_0}\,(e^{-i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{y}^{(2)}_{(0,1)}. \end{cases}$$

Dabei ist

$$H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)}.$$

Die entsprechenden Umlaufsrelationen für die anderen Lösungen ergeben sich hieraus wieder durch Permutation der δ_ν.

Schließlich notieren wir noch die in der oberen Halbebene gültigen Beziehungen

$$(4.2.3)\quad \begin{cases} y^{(1)}_{(-\infty,0)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(1-\delta_\infty)}\,y^{(1)}_{(\infty,1)}, & y^{(2)}_{(-\infty,0)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(1+\delta_\infty)}\,y^{(2)}_{(\infty,1)}, \\ y^{(1)}_{(0,1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1+\delta_0)}\,y^{(1)}_{(0,-\infty)}, & y^{(2)}_{(0,1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1-\delta_0)}\,y^{(2)}_{(0,-\infty)}, \\ y^{(1)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1+\delta_1)}\,y^{(1)}_{(1,0)}, & y^{(2)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1-\delta_1)}\,y^{(2)}_{(1,0)}. \end{cases}$$

4.3. Liouville-Transformationen. Gemäß 2.1 schreiben wir die Differentialgleichung (4.1.1) in der Form

$$\frac{y''}{y} = r(x) + \varrho^2\,\varphi(x)$$

und üben darauf die Liouville-Transformation aus:

$$\xi(x) = \varrho \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(x)}\,dx, \qquad u(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\,y(x).$$

Wegen der in 2.2 aufgeführten Bedingungen kommen für $\varrho^2\varphi(x)$ nur eine endliche Zahl von rationalen Funktionen in Betracht. Darüber hinaus werden wir die Funktionen $\varrho^2\varphi(x)$ als nicht voneinander verschieden ansehen, die durch bloße Vertauschung der δ_ν und der dazugehörigen linearen Transformation der x-Ebene auseinander hervorgehen (vgl. 4.1 Fußnote 3). Es sind dann nur die folgenden drei Fälle zu untersuchen:

$$(4.3.1)\qquad \varrho^2\varphi(x) = \frac{\delta_\infty^2}{4x(x-1)},$$

$$(4.3.2)\qquad \varrho^2\varphi(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{\delta_1^2}{(x-1)^2} + \frac{\delta_\infty^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right],$$

$$(4.3.3)\qquad \varrho^2\varphi(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{\delta_0^2}{x^2} + \frac{\delta_1^2}{(x-1)^2} + \frac{\delta_\infty^2-\delta_0^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right].$$

Die Größe ϱ ist dabei beliebig wählbar, sie hat nur die Bedeutung eines Maßes für die Güte der Näherung durch die asymptotische Integration. Dies ist so zu verstehen, daß bei festem $\varphi(x)$ die Näherung um so besser wird, je größer ϱ ist. So ist im Falle der Transformation (4.3.1) die Näherung um so besser, je größer $|\delta_\infty|$ ist, im Falle (4.3.2) müssen $|\delta_\infty|$ und $|\delta_1|$ groß sein und im Falle (4.3.3) $|\delta_\infty|$, $|\delta_1|$ und $|\delta_0|$. In den beiden letzten Fällen sind dabei nur solche Näherungen untereinander vergleichbar, bei denen die betreffenden δ_ν im festen Verhältnis zueinander stehen.

Die aus diesen Liouville-Transformationen sich ergebenden Differentialgleichungen werden in den folgenden Paragraphen genauer untersucht. Einige Ergänzungen zu unseren Ausführungen in § 2 und § 3 der ersten Mitteilung seien vorangestellt.

4.4. Zunächst einige Festsetzungen, welche die *Eindeutigkeit* der durch asymptotische Integration gewonnenen Lösungen gewährleisten. Gemäß 3.6 werde das vorgelegte ξ-Polygon in gewisse Teilbereiche, nämlich Rechtecke R_ν, Halbstreifen S_ν und Quadranten Q_ν eingeteilt. Diese Teilbereiche haben nach Voraussetzung in höchstens einer Ecke eine Singularität der Differentialgleichung. Für das Folgende können wir annehmen, daß genau eine Ecke des Teilbereichs als singuläre Ecke ξ_0 ausgezeichnet ist[5]). Sei

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^2 Q(\xi) = -\frac{1-(2m)^2}{4}, \tag{4.4.1}$$

dann möge die Größe $m - m$ positiv reell oder positiv imaginär — als Index der singulären Stelle ξ_0 bezeichnet werden.

Wir wählen in dem betrachteten Teilbereich die Differentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1-(2m)^2}{4}\,\frac{1}{(\xi-\xi_0)^2} \tag{4.4.2}$$

als Hilfsdifferentialgleichung und insbesondere als Hilfsfunktionen die schon in (3.8) betrachteten Lösungen der Differentialgleichung (4.4.2):

$$\begin{cases} v_1(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi(\xi-\xi_0)}{2}}\, e^{\frac{i\pi m}{2}} H_m^{(1)}\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}(\xi-\xi_0)\right) = e^{\xi-\xi_0}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\xi-\xi_0}\right)\right), \\ \qquad 0 \le \arg(\xi-\xi_0) \le 2\pi, \\ v_2(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi(\xi-\xi_0)}{2}}\, e^{i\pi\frac{m+1}{2}} H_m^{(1)}\left(e^{\frac{i\pi}{2}}(\xi-\xi_0)\right) = e^{-(\xi-\xi_0)}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\xi-\xi_0}\right)\right), \\ \qquad -\pi \le \arg(\xi-\xi_0) \le +\pi, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

($H_m^{(1)}$ Hankelfunktion m-ter Ordnung).

Diese Funktionen verhalten sich also in dem betrachteten Teilbereich hinreichend weit von der Singularität ξ_0 entfernt wie $e^{\pm(\xi-\xi_0)}$.

---

[5]) Es ist nicht unbedingt erforderlich, daß ξ_0 wirklich *singuläre* Stelle der Differentialgleichung ist; es läßt sich ja jede reguläre Stelle als singuläre mit dem Index $m = \frac{1}{2}$ auffassen. Die Stelle ξ_0 muß nur irgendwie vor den übrigen — regulären — Ecken ausgezeichnet sein, was z. B. dann der Fall ist, wenn ξ_0 nur bei speziellen Parameterwerten reguläre, sonst aber singuläre Stelle der Differentialgleichung ist.

Bezüglich des Anfangspunktes für die asymptotische Integration mußten wir in 3.1 voraussetzen, daß der zu $v_1(\xi)$ gehörige Anfangspunkt $\xi_1^{(1)}$ auf dem linken Rand, der zu $v_2(\xi)$ gehörige Anfangspunkt $\xi_1^{(2)}$ auf dem rechten Rand des Teilbereichs liegt. Zusätzlich wollen wir noch fordern, daß die Anfangspunkte möglichst weit von der singulären Stelle entfernt liegen; hierdurch ist die Lage der Anfangspunkte eindeutig bestimmt. Die asymptotische Integration ergibt dann wie in (3.9) im ganzen Teilbereich gültige Abschätzungen der Lösungen von der Form

$$(4.4.4) \qquad u_1(\xi) = v_1(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \qquad u_2(\xi) = v_2(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).$$

Für die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}$ gilt genauer:

$$(4.4.5) \qquad \begin{cases} u_1(\xi_1^{(1)}) = v_1(\xi_1^{(1)}), & u_2(\xi_1^{(2)}) = v_2(\xi_1^{(2)}), \\ u_1'(\xi_1^{(1)}) = v_1'(\xi_1^{(1)}), & u_2'(\xi_2^{(2)}) = v_2'(\xi_1^{(2)}); \end{cases}$$

durch diese Anfangsbedingungen sind die Lösungen *eindeutig bestimmt.*

Eine zusätzliche Überlegung erfordert noch der Fall, daß der Anfangspunkt nach den eben angeführten Bedingungen im Unendlichen liegt. Diese Lage des Anfangspunktes ist zulässig, da nach 2.12 die in (2.19) betrachteten Integrale dort konvergieren. Nur die Anfangsbedingungen (4.4.5) werden dort sinnlos, weil die $v_{1,2}(\xi)$ für $\xi = \infty$ wesentlich singulär sind. An ihre Stelle tritt eine asymptotische Abschätzung von $u(\xi)$ für $\xi \to \infty$ bei Annäherung längs des Integrationsweges von der Form:

$$(4.4.6) \qquad u(\xi) = v(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) = e^{\pm(\xi - \xi_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right).$$

Diese Abschätzung läßt sich leicht nach den Ausführungen in 2.12 aus der Abschätzung (2.41) ableiten. In den hier betrachteten Fällen legt die Abschätzung (4.5.3) die Lösung $u(\xi)$ ebenfalls eindeutig fest.

4.5. Wir verabreden noch folgende Bezeichnungsweise: Die Lösungen der transformierten Riemannschen Differentialgleichung seien — im Hinblick auf eine mögliche Verwendung dieser Funktionen als Hilfsfunktionen — mit $v(\xi)$ bezeichnet. Genauer sei $v_\nu^{(1)}(\xi), v_\nu^{(2)}(\xi)$ ein Paar von Lösungen, die im ν-ten Teilbereich des ξ-Polygons R_ν, S_ν oder Q_ν mit den in (4.4.3) definierten Hilfsfunktionen $v_1(\xi), v_2(\xi)$ durch asymptotische Integration gewonnen wurden. Wie erwähnt, sei dabei in jedem Falle eine Ecke des Teilbereichs als singuläre Ecke ausgezeichnet und die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}$ mögen den eben besprochenen Bedingungen genügen.

Das ξ-Polygon ist definitionsgemäß das Abbild der oberen x-Halbebene bei Abbildung durch $\xi(x)$. Die untere Halbebene wird durch $\xi(x)$, wenn wir diese Funktion in irgendwie vorgegebener Weise analytisch dorthin fortsetzen, auf ein Polygon abgebildet, das aus dem ursprünglichen durch Spiegelung an einer Geraden parallel zur reellen oder imaginären Achse hervorgeht. Bei dieser Spiegelung — die dem Übergang vom Punkt x zum konjugiert

komplexen $\bar{x}$ in der x-Ebene entspricht — möge ein Punkt ξ in den Punkt $\tilde{\xi}$, die Teilbereiche R_ν, S_ν, Q_ν in die Teilbereiche $\tilde{R}_\nu$, $\tilde{S}_\nu$, $\tilde{Q}_\nu$ übergehen. Die in diesen neuen Teilbereichen durch asymptotische Integration gewonnenen Paare von Lösungen mögen entsprechend mit $\tilde{v}_\nu^{(1)}(\xi)$, $\tilde{v}_\nu^{(2)}(\xi)$ bezeichnet werden in Analogie zu den in 4.2 betrachteten $\tilde{y}_{(\alpha,\beta)}^{(i)}(x)$.

4.6. Relationen. Wir wollen hier noch — in Ergänzung der Ausführungen in 3.6 — die Relationen abschätzen, die zwischen den in benachbarten Teilbereichen durch asymptotische Integration gewonnenen Lösungen bestehen. Die benachbarten Teilbereiche mögen die Rechtecke R_1 und R_2 sein — die

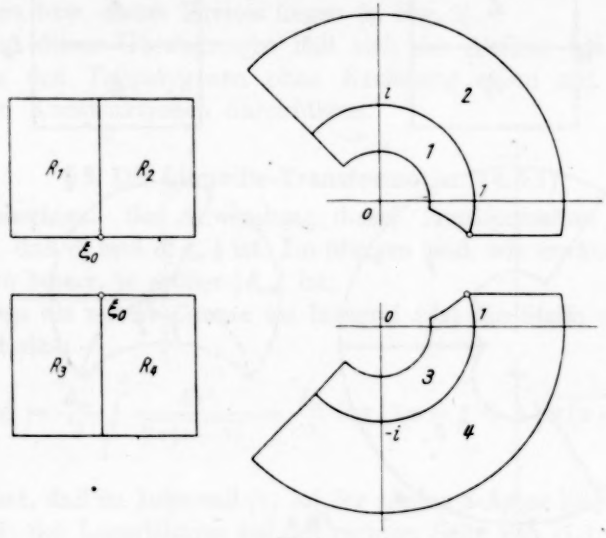

Fig. 1

Überlegungen gelten dann in gleicher Weise auch für Halbstreifen und Quadranten. $v_1^{(1)}, v_1^{(2)}$ und $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ seien die nach 4.5 in den Teilbereichen definierten Lösungen. $\xi_0^{(1)}$ sei die zu R_1, $\xi_0^{(2)}$ die zu R_2 gehörige singuläre Stelle.

Liegen die Stellen $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}$ getrennt, so gilt für die Relationen zwischen den Lösungen die folgende Abschätzung[6]):

$$(4.6.1)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{\xi_0^{(2)} - \xi_0^{(1)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(1)} + e^{\xi_0^{(1)} - \xi_0^{(2)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Die gleiche Relation gilt auch, wenn $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)}$ ist, und die Teilrechtecke längs einer Kante parallel zur imaginären ξ-Achse zusammenhängen. Es ist

[6]) Es ist hier vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt $\frac{\xi_0^{(1)} + \xi_0^{(2)}}{2}$ auf der gemeinsamen Kante liegt, für die nach 3.6 die Relationen berechnet werden. (Vgl. auch STALLMANN [6] S. 14, insbesondere die Formel (29).) Dies ist in der Regel der Fall oder läßt sich doch ohne Schwierigkeiten erreichen.

dann genauer:

$$\text{(4.6.2)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Ist $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)}$ eine singuläre Stelle mit dem Index m und hängen die Teilbereiche längs einer Kante zusammen, die parallel zur reellen ξ-Achse verläuft, so ist zu unterscheiden, ob sich die gemeinsame Kante von der singulären

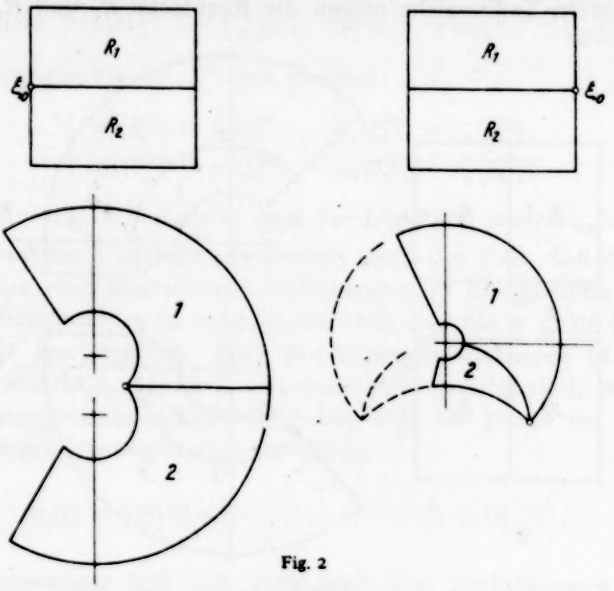

Fig. 2

Stelle aus nach rechts oder nach links erstreckt. Im ersten Fall wird:

$$\text{(4.6.3)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} - \left(2i \cos \pi m + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\varrho^{\gamma}\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Im zweiten Fall gilt:

$$\text{(4.6.4)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} + \left(O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = \left(2i \cos \pi m + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Dabei soll in jedem Fall R_1 oben, R_2 unten liegen. Die Größe γ mit $-1 \leq \gamma < 0$ bestimmt sich aus (2.40).

Für die Zusammensetzung des Kreisbogenpolygons aus Teilpolygonen gemäß 3.6 ist die *geometrische Deutung* der Relationen (4.6.1) bis (4.6.4) wichtig. Nach 3.2 werden die Teilrechtecke durch $\eta(\xi)$ näherungsweise auf gewisse Kreisbogenvierecke abgebildet. Betrachtet man speziell den Quotienten

$$\eta_\nu(\xi) = \frac{v_\nu^{(1)}(\xi)}{v_\nu^{(2)}(\xi)}$$

der in 4.4 festgelegten Lösungen, so erhält man — je nach Lage der singulären Ecke eines der in Fig. 1 dargestellten Vierecke.

Geometrisch bedeutet nun die Relation (4.6.1) eine Drehstreckung. Diese muß so beschaffen sein, daß sich das eine Viereck in richtiger Lage an das andere anschließt.

Die Relationen (4.6.3) und (4.6.4) sind der analytische Ausdruck des Schwarzschen Spiegelungsprinzips. Die gemeinsame Kante geht durch $\eta_1(\xi)$ näherungsweise über in die Gerade $\Im(\eta_1)=\cos\pi m$ bzw. den Kreis $|2\eta_1\cos\pi m+i|=1$. Die Relationen (4.6.3) und (4.6.4) sagen dann aus, daß die benachbarten Kreisbogenvierecke näherungsweise spiegelbildlich bezüglich dieser Geraden bzw. dieses Kreises liegen (s. Fig. 2).

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich der Aufbau des Kreisbogenpolygons aus den Teilpolygonen ohne Rechnung allein mit elementaren geometrischen Konstruktionen durchführen.

§ 5. Die Liouville-Transformation (4.3.1)

5.1. Allgemeines. Bei Anwendung dieser Transformation müssen wir voraussetzen, daß δ_0^2 und $\delta_1^2 \leq \frac{1}{4}$ ist. Im übrigen sind, wie erwähnt, die Näherungen um so besser, je größer $|\delta_\infty|$ ist.

Wir wählen als untere Grenze im Integral $\xi(x)$ die Stelle $x_0=1$; ausgewertet ergibt das:

$$(5.1.1)\qquad \xi(x)=\frac{\delta_\infty}{2}\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}=\frac{\delta_\infty}{2}\log\left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right).$$

Wir setzen fest, daß im Intervall $(1,\infty)$ der reellen x-Achse $\sqrt{x(x-1)}$ positiv reell sein soll; der Logarithmus auf der rechten Seite von (5.1.1) kann dann dort ebenfalls positiv reell gewählt werden.

Die obere x-Halbebene wird durch $\xi(x)$ auf einen Halbstreifen abgebildet, und zwar nach unseren Festsetzungen bei reellem δ_∞ auf

$$\Re(\xi)\geq 0,\qquad 0\leq\Im(\xi)\leq\frac{\pi\delta_\infty}{2}$$

und bei imaginärem δ_∞ auf

$$-\frac{\pi|\delta_\infty|}{2}\leq\Re(\xi)\leq 0,\qquad \Im(\xi)\geq 0.$$

Strebt $x\to\infty$ in der oberen Halbebene, so wird

$$(5.1.2)\qquad \xi(x)=\frac{\delta_\infty}{2}\left(\log x+\log 4+O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Die Differentialgleichung (4.1.1) geht bei dieser Transformation über in[7])

$$(5.1.3)\qquad \frac{v''}{v}=1+\frac{1-(2\delta_0)^2}{4\delta_\infty^2\,\mathfrak{Cof}^2\dfrac{\xi}{\delta_\infty}}-\frac{1-(2\delta_1)^2}{4\delta_\infty^2\,\mathfrak{Sin}^2\dfrac{\xi}{\delta_\infty}}.$$

[7]) Darbouxsche Differentialgleichung, vgl. v. Koppenfels [4].

Auf den betrachteten Halbstreifen hat diese Differentialgleichung singuläre Stellen bei $\xi = 0$ mit dem Index δ_1 und bei $\xi = \frac{i\pi\delta_\infty}{2}$ mit dem Index δ_0, die den singulären Stellen $x = 1$ und $x = 0$ der ursprünglichen Differentialgleichung (4.1.1) entsprechen. Für die asymptotische Integration teilen wir den Halbstreifen in zwei Teilhalbstreifen S_1 und S_2 auf, so daß die Stelle $\xi = \frac{i\pi\delta_\infty}{2}$ auf S_1, die Stelle $\xi = 0$ auf S_2 liegt (vgl. Fig. 3 und 4 in den folgenden Abschnitten). Für die weitere Untersuchung müssen wir unterscheiden, ob δ_∞ reell oder imaginär ist.

5.2. δ_∞ reell. Nach unseren Festsetzungen in 4.6 lassen sich durch asymptotische Integration in S_1 die Lösungen $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ und in S_2 die Lösungen $v_2^{(1)}$, $v_2^{(2)}$ der Differentialgleichung (5.1.3) definieren. Die zu $v_1^{(2)}$ und $v_2^{(2)}$ gehörigen Anfangspunkte liegen nach 4.5 im Unendlichen, und es gilt wegen (4.4.6)[8]:

$$\text{(5.2.1)} \qquad \begin{cases} v_1^{(2)} = e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ v_2^{(2)} = e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\text{(5.2.2)} \qquad v_2^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}} v_1^{(2)}.$$

Die Abschätzungen (5.2.1) erlauben es, die im ξ-Polygon definierten Lösungen $v_k^{(i)}$ mit den kanonischen Lösungen (4.1.2) bis (4.1.4) zu vergleichen. Zusammen mit (5.1.2) ergibt sich nämlich hieraus das Verhalten der $v_k^{(i)}$ für $x \to \infty$. Wegen

$$v(\xi) = [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y(x)$$

muß dann etwa sein:

$$\text{(5.2.3)} \qquad v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x).$$

Damit haben wir eine in S_1 gültige Abschätzung von $y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x)$ für große δ_∞ gewonnen, die sich wegen (5.2.2) auf das ganze ξ-Polygon bzw. die ganze obere x-Halbebene analytisch fortsetzen läßt.

Eine entsprechende Abschätzung für $y^{(2)}_{(-\infty,0)}$ läßt sich nicht so einfach gewinnen. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, daß diese kanonischen Lösungen für ganze δ_∞ sinnlos werden[9] und logarithmische Glieder auftreten. Diese Schwierigkeiten lassen sich überwinden bei Betrachtung der analytischen Fortsetzung aus der unteren x-Halbebene.

---

[8] Genauer müßte es heißen

$$v_1^{(2)} = e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)}\left(1 + O\left(e^{-\left|\frac{2\xi}{\delta_\infty}\right|}\right)\right) \ldots,$$

was sich bei sorgfältiger Abschätzung mit der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion leicht nachweisen läßt. Analoges gilt für alle derartigen Abschätzungen im Halbstreifen, was ja auch mit den kanonischen Reihenentwicklungen übereinstimmt.

[9] Es ist klar, daß (5.2.3) auch für ganze δ_∞ gilt.

9272-68

Setzt man $\xi(x)$ über das Intervall $(0, 1)$ hinweg in die untere x-Halbebene fort, so wird diese auf den Halbstreifen abgebildet, der den ursprünglichen zu einem vollen Streifen ergänzt (vgl. Fig. 3). Wie in 4.5 besprochen, werde dieser Halbstreifen in die Teilhalbstreifen $\tilde{S}_1$ und $\tilde{S}_2$ eingeteilt, und in ihnen durch asymptotische Integration die Lösungen $\tilde{v}_1^{(1)}$, $\tilde{v}_1^{(2)}$ und $\tilde{v}_2^{(1)}$, $\tilde{v}_2^{(2)}$ definiert. Es liegen jetzt die Anfangspunkte von $\tilde{v}_1^{(1)}$ und $\tilde{v}_2^{(1)}$ im Unendlichen, so daß gilt:

$$\text{(5.2.4)} \qquad \begin{cases} \tilde{v}_1^{(1)} = e^{\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ \tilde{v}_2^{(1)} = e^{\xi} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich ähnlich wie in (5.2.3):

$$\text{(5.2.5)} \qquad \tilde{v}_1^{(1)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} \tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)}(x).$$

Mit Hilfe von Formel (4.6.2) läßt sich $\tilde{v}_1^{(1)}$ von $\tilde{S}_1$ nach S_1 analytisch fortsetzen. Es ist in S_1

$$\text{(5.2.6)} \qquad \tilde{v}_1^{(1)} = v_1^{(1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + v_1^{(2)} O\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Abschätzung von $\tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)}(x)$ bei analytischer Fortsetzung über das Intervall $(0, 1)$ hinweg in die obere Halbebene. Andererseits gilt hierfür eine Relation vom Typus (4.2.2); wir schreiben sie nach leichter Umformung so:

$$\text{(5.2.7)} \qquad \begin{cases} y^{(2)}_{(-\infty, 0)} = \dfrac{1}{2\pi i H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)} \times \\ \qquad \times \left[\tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)} + \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1)\, y^{(1)}_{(-\infty, 0)}\right]. \end{cases}$$

Setzt man hierin die Lösungen $v(\xi)$ aus (5.2.3) und (5.2.5) ein, berücksichtigt (5.2.6), die analytische Fortsetzung von $[x(x-1)]^{-\frac{1}{4}}$ und schließlich noch die Tatsache, daß

$$4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1) = 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

ist, so erhält man die folgende Abschätzung für $y^{(2)}_{(-\infty, 0)}$:

$$\text{(5.2.8)} \qquad \begin{cases} 4^{\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(2)}_{(-\infty, 0)}(x) = v_1^{(1)}(\xi) \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + v_1^{(2)}(\xi) \left[\dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Man sieht, daß wegen des Ausdrucks $\sin \pi \delta_\infty$ im Nenner die Formel (5.2.8) für ganze δ_∞ ihren Sinn verliert[10]).

[10]) Es sei denn, daß auch der Ausdruck $e^{\pm i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1$ verschwindet; die kanonischen Lösungen zu $x = \infty$ sind dann beide logarithmenfrei. Die Formel (5.2.8) läßt sich übrigens auch aus rein geometrischen Überlegungen heraus ableiten ohne Benutzung von (4.2.3) (4.2.4). Man vergleicht hierzu die konforme Abbildung von $\eta = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}}$ mit der von $\eta^* = \frac{y^{(1)}}{y^{(2)}}$.

9272-68

Mit Hilfe der Relation (4.2.2) und der Potenzreihenentwicklung für $\tilde{y}^{(2)}_{(-\infty,0)}$ kann man nun andererseits eine Abschätzung für die analytische Fortsetzung von $v_1^{(2)}$ nach $\tilde{S}_1$ gewinnen, die im Gegensatz zu (5.2.7) für beliebige δ_∞ aber große ξ gilt. Solche Abschätzungen sind bei Verwendung dieser Lösungen als Hilfsfunktionen wichtig. Sie lautet:

$$(5.2.9) \qquad v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right),$$

in $\tilde{S}_1$ und $\tilde{S}_2$.

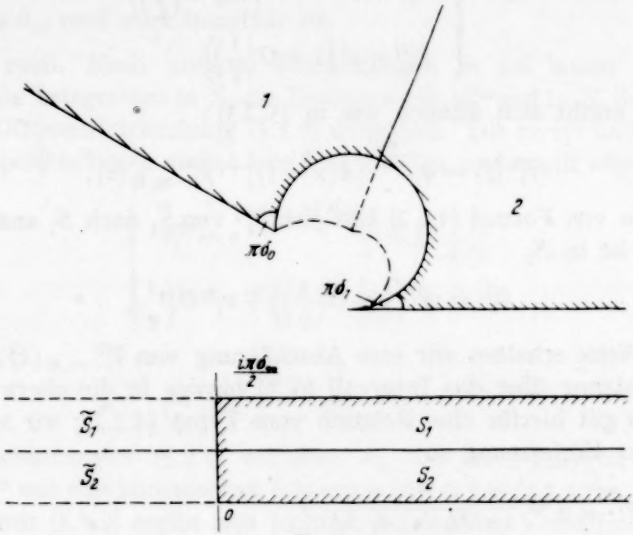

Fig. 3

Schließlich wäre noch die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zu betrachten. Die in diesem Fall sehr einfache Konstruktion des Kreisbogendreiecks ist Fig. 3 zu entnehmen[11]).

5.3. δ_∞ imaginär. Die Einteilung des ξ-Polygons in Teilbereiche ist hier dieselbe wie bei reellem δ_∞. Die Halbstreifen S_1, S_2 liegen aber jetzt parallel zur imaginären Achse, so daß die Anfangspunkte der asymptotischen Integration sowohl für $v^{(1)}_{1,2}$ als auch für $v^{(2)}_{1,2}$ im Unendlichen liegen. Dadurch wird es möglich, alle diese Lösungen durch kanonische Lösungen von (4.1.1) auszudrücken. So wird etwa[12]):

$$(5.3.1) \qquad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = 4^{\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(2)}_{(-\infty,0)}(x) \\ v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x). \end{cases}$$

[11]) Diese Konstruktionen mögen im Falle der Riemannschen Differentialgleichung überflüssig erscheinen, weil man hier ohne Benutzung der Differentialgleichung auf rein geometrischem Wege die zugehörigen Kreisbogendreiecke konstruieren kann. Doch ist dies keineswegs einfach, wie die Untersuchungen von SCHILLING [5] zeigen.

[12]) Es ist hier natürlich für $4^{\pm\delta_\infty}$ der Wert $e^{\pm\delta_\infty \log 4}$ zu wählen bei reellem $\log 4$.

Entsprechende Beziehungen gelten zwischen den in $\tilde{S}_1$ definierten $\tilde{v}_1^{(1)(2)}$ und den $\tilde{y}_{(-\infty,0)}^{(1)(2)}$. Die Relation vom Typus (4.2.2) drückt sich dann folgendermaßen als Relation zwischen den v und $\tilde{v}$ aus:

$$(5.3.2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = 4^{\delta_\infty} 2\pi H_0(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = \dfrac{-1}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + 4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

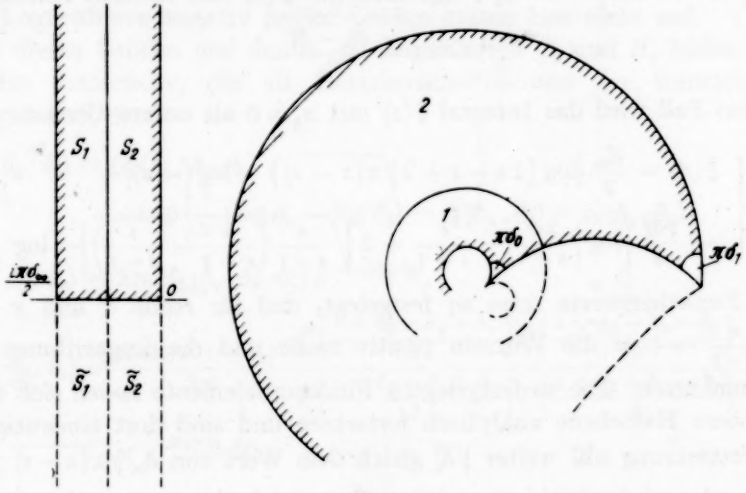

Fig. 4

Diese Relation gilt — im Gegensatz etwa zu (5.2.6) — exakt für alle δ_∞. Natürlich läßt sie sich auch mit Hilfe der in 4.7 aufgeführten Relation für große $|\delta_\infty|$ abschätzen. Man erhält auf diese Weise eine gewisse Anschauung für die Größe des zu erwartenden Fehlers bei Abschätzung durch asymptotische Integration.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zeigt Fig. 4.

§ 6. Die Liouville-Transformation (4.3.2)

6.1. Mit den in § 5 angegebenen Methoden lassen sich auch die Liouville-Transformationen (4.3.2) und (4.3.3) behandeln. Da hierbei keine wesentliche neuen Gesichtspunkte auftreten, können wir uns darauf beschränken, die Ergebnisse anzugeben. Wie schon in der Einleitung betont, bestehen diese Ergebnisse

1. in asymptotischen Abschätzungen der kanonischen Lösungen der Riemannschen Differentialgleichung, d.h. wir geben die Beziehungen zwischen den $y_{(\alpha,\beta)}^{(i)}$ und den $v_k^{(i)}$ an, und

2. in den Fortsetzungsrelationen der $v_k^{(i)}$; diese werden gebraucht bei Verwendung der transformierten Riemannschen Differentialgleichung als

Hilfsdifferentialgleichung zur asymptotischen Abschätzung der Lösungen komplizierterer Differentialgleichungen.

Die hierfür erforderlichen Rechnungen sind zwar methodisch einfach aber einigermaßen mühsam; wir haben uns daher bemüht, die Ergebnisse so vollständig wie möglich anzugeben, auch wenn hierdurch eine etwas monotone Aufzählung zustande kam. Es zeigt sich aber, daß jeder Einzelfall kleine Besonderheiten aufweist, die man von vornherein nicht hätte erkennen können.

6.2. Wie schon erwähnt, ist die Transformation (4.3.2) in den Fällen angezeigt, in denen sowohl $|\delta_\infty|$ als auch $|\delta_1|$ groß sind. Dagegen muß $\delta_0^2 \leq \frac{1}{4}$ vorausgesetzt werden. Ist $\delta_1 \neq \delta_\infty$, dann hat $\varphi(x)$ eine einfache Nullstelle bei

$$x = s = \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2}{\delta_\infty^2}.$$

In diesem Fall wird das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = 0$ als untere Grenze:

$$(6.2.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = \dfrac{\delta_\infty}{2}\left[\log\left(2x - s + 2\sqrt{x(x-s)}\right) - \log(-s)\right] - \\ - \dfrac{\sqrt{\delta_1^2}}{2}\left[\log\left[\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{s}{s-1} + 2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{s}{s-1}\right)}\right] - \log\dfrac{s}{1-s}\right]. \end{cases}$$

Die Funktionswerte seien so festgelegt, daß für reelle x und $x \to +\infty$ bzw. $\frac{x}{x-1} \to +\infty$ die Wurzeln positiv reelle und die Logarithmen reelle Werte annehmen. Die so festgelegten Funktionselemente lassen sich überall in die obere Halbebene analytisch fortsetzen und sind dort eindeutig. Mit dieser Festsetzung soll weiter $\sqrt{\delta_1^2}$ gleich dem Wert von $\delta_\infty\sqrt{x(x-s)}$ an der Stelle $x = 1$ und die $\log(-s)$ und $\log\frac{s}{1-s}$ gleich dem vorangehenden Ausdruck an der Stelle $x = 0$ sein.

Ist $\delta_1 = \delta_\infty$ so wird einfach

$$(6.2.2)\qquad \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\left(\log(x-1) - i\pi\right).$$

Das ξ-Polygon ist dann ein Streifen und die transformierte Differentialgleichung hat dort nur eine Singularität an der Stelle $\xi = 0$ mit dem Index $\delta_0/2$. Diese Differentialgleichung hat die Form (5.1.3), wenn dort $\delta_0 = \frac{1}{2}$ und $\delta_1 = \delta_0/2$ gesetzt wird.

Im allgemeinen Fall $\delta_1 \neq \delta_\infty$ läßt sich die transformierte Differentialgleichung nicht mehr explizit angeben. Sie hat im ξ-Polygon Singularitäten bei $\xi(0) = 0$ mit dem Index δ_0 und bei $\xi(s)$ mit dem Index $\frac{1}{2}$.

Abgesehen von einer Vertauschung der δ_ν sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. δ_∞, δ_1 *beide reell*, $\delta_1 < \delta_\infty$.
2. δ_∞, δ_1 *beide reell*, $\delta_1 = \delta_\infty$.
3. δ_∞, δ_1 *beide imaginär*, $|\delta_1| < |\delta_\infty|$.
4. δ_∞, δ_1 *beide imaginär*, $\delta_1 = \delta_\infty$.
5. δ_∞ *reell*, δ_1 *imaginär*.

6.3. Zur Vereinfachung der Formeln führen wir noch einige Hilfsgrößen ein. Wir definieren zunächst als:

$$c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} - \frac{\delta_\alpha - \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha - \delta_\beta}{2}.$$

$$c_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{2} \log \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{2}.$$

Hierbei soll der Logarithmus so festgelegt werden, daß

$$|\Im(\log \ldots)| < \pi$$

wird. Logarithmen negativ reeller Größen treten hier nicht auf.

Mit diesen Größen und den in 4.2 eingeführten G_0 und H_0 bilden wir die folgenden Ausdrücke, die als Relationskoeffizienten der transformierten Lösungen auftreten:

$$G_1(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta) - c_1'(\delta_\beta, \delta_\alpha)\right].$$

$$H_1(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = 2\pi H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\, e^{-2c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta)}.$$

$$H_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)} \times \\ \times e^{-2c_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta)}.$$

Auf Grund der Stirlingschen Formel streben diese Größen im allgemeinen gegen 1, wenn $\varrho \to \infty$ geht (vgl. 4.3). Dies Ergebnis läßt sich auch mit Hilfe der asymptotischen Integration gewinnen. Es eröffnen sich hier sehr reizvolle Ausblicke auf Zusammenhänge zwischen der Theorie der Gammafunktion und der hypergeometrischen Funktionen.

Weiter definieren wir die folgenden Funktionen von x, die bis auf Konstanten mit der Größe $\sqrt[4]{\varphi(x)}$ übereinstimmen:

$$\psi_\infty^{(1)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-c_1(\delta_\infty, \delta_1)},$$

$$\psi_\infty^{(2)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{c_1(\delta_\infty, \delta_1)},$$

$$\psi_1^{(1)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x(1-s)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-c_1(\delta_1, \delta_\infty)},$$

$$\psi_1^{(2)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x(1-s)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{c_1(\delta_1, \delta_\infty)}.$$

Dieselben Größen, aber mit c_1' statt mit c_1 gebildet, seien als $\psi_\alpha'^{(i)}$ bezeichnet. Für die auftretenden Potenzen seien wie in (4.1.2) die Hauptwerte gewählt, d.h. in diesem Fall positiv reelle Werte für positiv reelle Argumente, und deren analytische Fortsetzung in die obere Halbebene.

6.4. δ_∞, δ_1 **beide reell,** $\delta_1 < \delta_\infty$. Es ist hier $0 < s < 1$ und $\sqrt{\delta_1^2} = \delta_1$. Ferner wird $\xi(s) = -\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)$.

Die obere Halbebene wird durch $\xi(x)$ auf das in Fig. 5 dargestellte ξ-Polygon abgebildet. Dieses ξ-Polygon möge in der dort gezeigten Weise in vier Halbstreifen $S_1 - S_4$ eingeteilt werden. Mit den in diesen Halbstreifen definierten

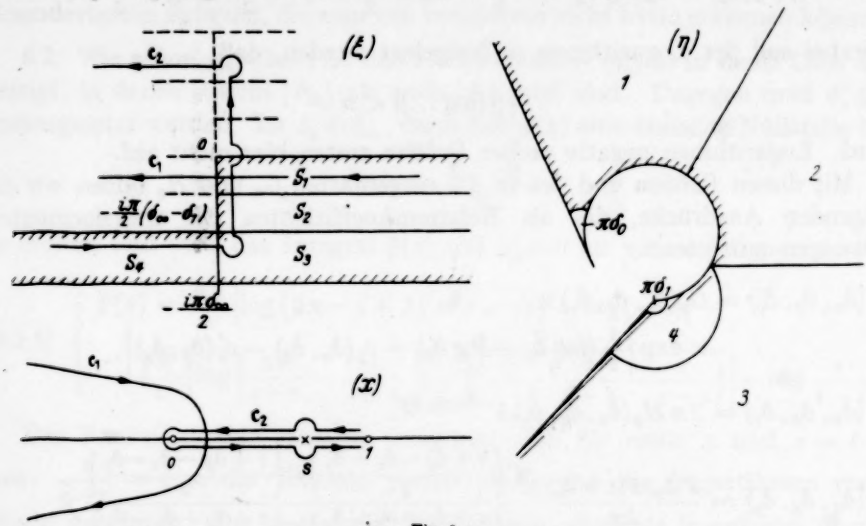

Fig. 5

$v_k^{(s)}$ lassen sich die kanonischen Lösungen der Riemannschen Differentialgleichung wie folgt abschätzen [vgl. (5.2.3) und (5.2.8)]:

$$(6.4.1)\quad \begin{cases} \psi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \\ \psi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\delta_0}{H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\sin\pi\delta_\infty} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases}$$

$$(6.4.2)\quad \begin{cases} \psi_1'^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(1)}, \\ \psi_1'^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(1)}\left(\frac{1}{2H_1'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\sin\pi\delta_1} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \end{cases}$$

Für die analytische Fortsetzung innerhalb des ξ-Polygons gelten — neben den trivialen Relationen[13])

$$(6.4.3)\qquad v_1^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)}, \qquad v_2^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)}\, v_3^{(2)}$$

[13]) Wir werden derartige Relationen im folgenden nicht mehr besonders angeben.

die beiden folgenden, die wie (5.2.9) auch für kleine δ_∞ und δ_1 gültig sind. Es ist

$$(6.4.4)\quad \begin{cases} v_3^{(2)}(\xi) = G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-\left(\xi + \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) & \text{in } S_4, \\ v_4^{(1)}(\xi) = G_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\left(\xi + \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) & \text{in } S_3. \end{cases}$$

Für die analytische Fortsetzung aus dem ξ-Polygon heraus auf Wegen $\mathfrak{C}_\nu$, die geschlossenen Umläufen in der x-Ebene entsprechen (vgl. Fig. 5) gelten, die folgenden Relationen:
Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.4.5)\qquad v_1^{(2)}(\xi) = H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_1,$$

und auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.4.6)\quad \begin{cases} v_4^{(2)}(\xi) = 2i\left(\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\,\delta_0\right) H_1'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) \times \\ \qquad \times\, e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_4. \end{cases}$$

Hierbei sind die $\tilde{S}_\nu$ natürlich jeweils so definiert, wie es der analytischen Fortsetzung von $\xi(x)$ längs der betrachteten Wege entspricht, d. h. $\tilde{S}_\nu$ geht aus S_ν durch Spiegelung an der Seite des ξ-Polygon hervor, die durch die Kurve $\mathfrak{C}_\mu$ jeweils überschritten wird.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zeigt Fig. 5. Bemerkenswert ist hier, daß die Berandung des ξ-Polygons in der Umgebung von $\xi(s) = -\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)$ durch $\eta(\xi)$ auf einen glatten Kreisbogen abgebildet wird; dies muß natürlich so sein, da die Differentialgleichung (4.1.1) dort keine singuläre Stelle hat, und wird dadurch erreicht, daß die an diesem Punkt zusammenstoßenden singulären Ecken von S_2, S_3 und S_4 jeweils in einen Winkel der Größe $\frac{\pi}{3}$ übergehen, was zusammen den glatten Winkel der Größe π ergibt. Entsprechendes tritt bei allen einfachen Nullstellen von $\varphi(x)$ auf.

6.5. δ_∞, δ_1 beide reell, $\delta_1 = \delta_\infty$. Die im vorigen Abschnitt 6.2 durchgeführten Untersuchungen bleiben größtenteils auch für diesen Fall gültig, wenn man dort den Grenzübergang $\delta_1 \to \delta_\infty$ macht. Ungültig werden bei diesem Grenzübergang nur die Abschätzungen in der Nähe der singulären Stellen, weil diese dabei einander beliebig nahe kommen, was nach 3.8 ausgeschlossen werden mußte. Dies betrifft insbesondere die Konstruktion des Kreisbogenpolygons aus dem ξ-Polygon; die in Fig. 6[14]) für diesen Fall angegebene Konstruktion unterscheidet sich wesentlich von der in Fig. 5 gezeigten. Weiter ist noch zu berücksichtigen, daß jetzt einige der in den

[14]) Das Kreisbogendreieck setzt sich in diesem Fall übrigens zusammen aus zwei zueinander symmetrischen mit den Winkeln $\pi\delta_\infty$, $\frac{\pi\delta_0}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Dem entspricht die in 6.2 erwähnte Rückführung der Differentialgleichung auf die Form (5.1.3).

Formeln auftretenden H_1, H_1' nicht mehr gegen 1 streben für $\varrho \to \infty$. Es gilt nämlich:

$$(6.5.1) \qquad \begin{cases} H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) = 2\cos\pi\dfrac{\delta_0}{2} + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right), \\ H_1'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) = \dfrac{1}{2\cos\pi\dfrac{\delta_0}{2}} + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right). \end{cases}$$

Bei dem Grenzübergang $\delta_1 \to \delta_\infty$ verschwinden die Teilbereiche S_1 und S_2; die übrigbleibenden seien weiter als S_3 und S_4 bezeichnet. Dann bleiben alle

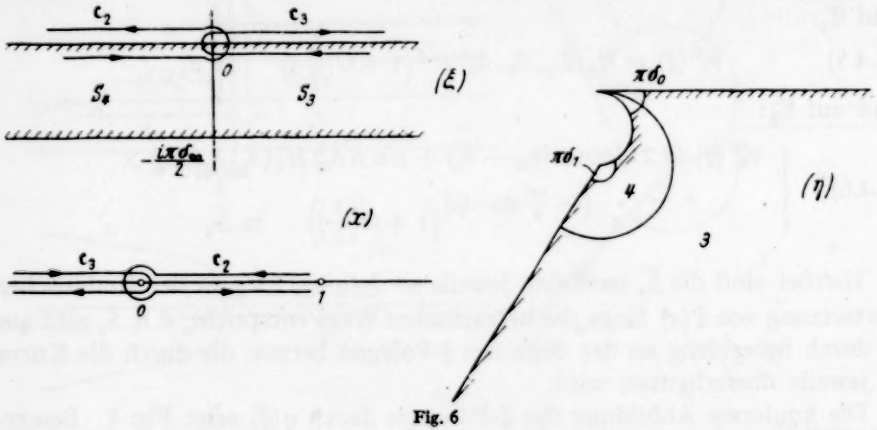

Fig. 6

Formeln des vorigen Abschnitts, bis auf die sinnlos werdende (6.4.5), gültig. An Stelle von (6.4.5) notieren wir die Relation für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$:

$$(6.5.2) \qquad v_3^{(2)}(\xi) = -i\,H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_3.$$

Hier, sowie bei der unverändert gültigen Relation (6.4.6) sorgt (6.5.1) für die Übereinstimmung mit den in 4.6 abgeleiteten Relationen.

6.6. δ_∞, δ_1 beide imaginär, $|\delta_1| < |\delta_\infty|$. Das ξ-Polygon ist hier das gleiche wie in Fig. 5, nur ist es um $\pi/2$ im positiven Sinne gedreht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(6.6.1) \qquad \begin{cases} \psi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \quad \psi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)} \\ \psi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(1)}, \quad \psi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{\frac{-i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(6.6.2) \qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = G_1(-\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} - i\,G_1(\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)} \\ v_3^{(2)} = i\,e^{2i\pi\delta_1} G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} + G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.6.3)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\,(e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} = -\dfrac{1}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

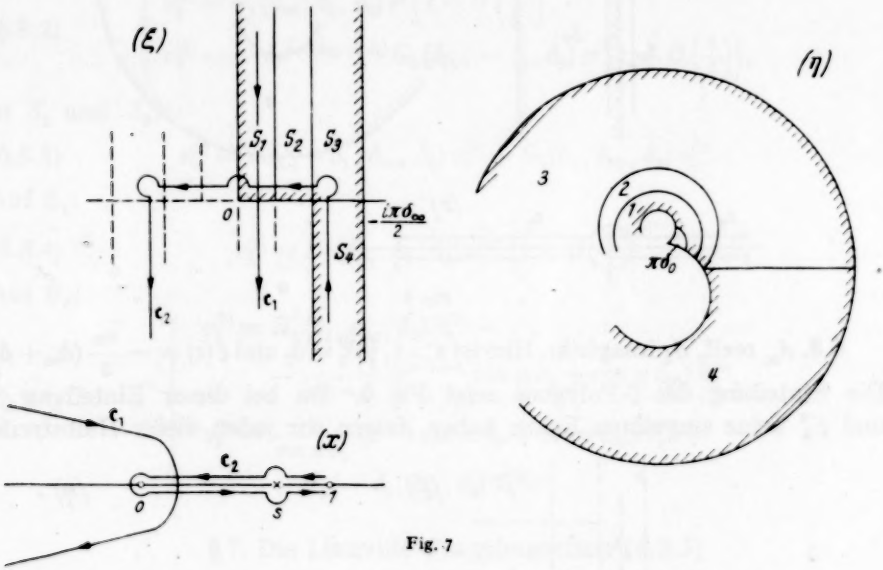

Fig. 7

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.6.4)\qquad \begin{cases} v_4^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

6.7. δ_∞, δ_1 beide imaginär, $\delta_\infty = \delta_1$. Wie in 6.5 bleiben auch hier alle Formeln aus 6.6 bis auf (6.6.3) gültig. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß

$$(6.7.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) \\ G_1(\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0) \\ H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) \\ H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) \end{array}\right\} = 2\cos\pi\frac{\delta_0}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).$$

wird. Formel (6.6.3) wird ersetzt durch die folgende auf $\mathfrak{C}_3$ gültige Relation:

$$(6.7.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_3^{(1)} - i\,H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} = -i\,H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_3^{(1)} + \dfrac{i}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_3^{(2)}. \end{cases}$$

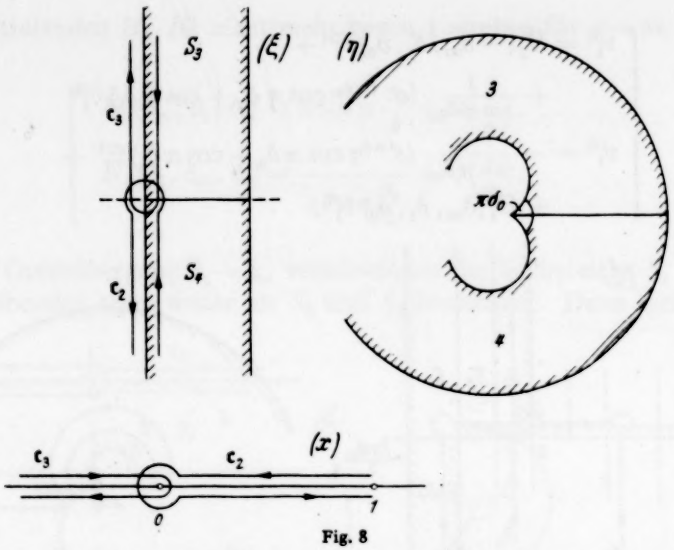

Fig. 8

6.8. δ_∞ reell, δ_1 imaginär. Hier ist $s>1$, $\sqrt{\delta_1^2}=\delta_1$ und $\xi(s)=-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_1)$. Die Einteilung des ξ-Polygons zeigt Fig. 9. Da bei dieser Einteilung S_1^* und S_2^* keine singulären Ecken haben, fassen wir jeden dieser Halbstreifen

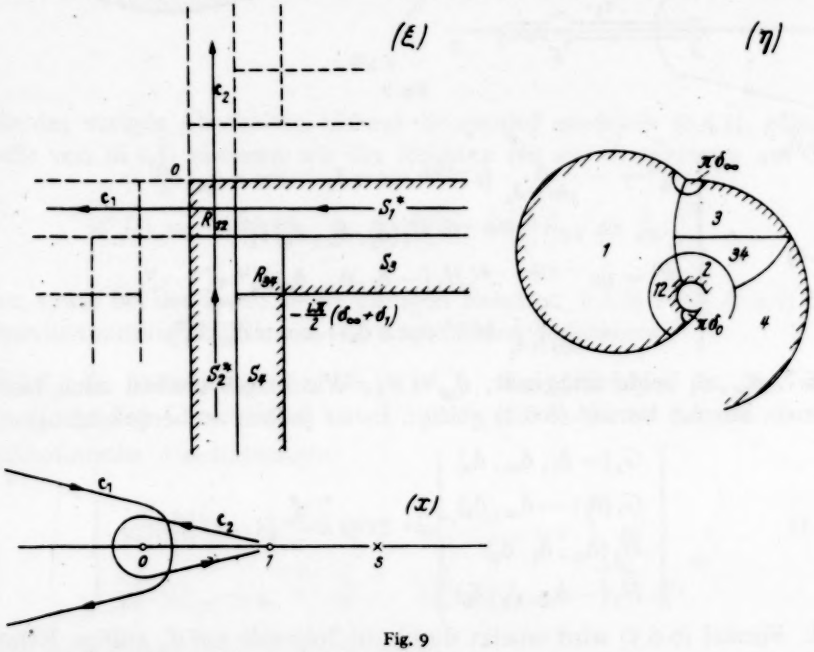

Fig. 9

mit dem Rechteck R_{12} zusammen; die so entstehenden, sich auf R_{12} überdeckenden Halbstreifen bezeichnen wir mit S_1 und S_2. Aut diese Halbstreifen soll sich die Definition der $v_1^{(i)}$, $v_2^{(i)}$ gemäß 4.4, 4.5 beziehen.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(6.8.1)\quad \begin{cases} \psi_1^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,0)} = v_2^{(1)}, \quad \psi_1^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,0)} = v_2^{(2)}, \quad \psi_\infty^{(1)}\, y^{(1)}_{(-\infty,0)} = v_1^{(2)}, \\ \psi_\infty^{(2)}\, y^{(2)}_{(-\infty,0)} = v_1^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + v_1^{(2)}\left(\frac{e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1}{\sin\pi\delta_\infty} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(6.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(2)} = -\, i\, e^{i\pi(\delta_0+\delta_1)}\, G_1(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

in S_1 und S_3.

$$(6.8.3)\qquad v_3^{(2)} = i\, G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} + G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.8.4)\qquad v_1^{(2)} = H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \qquad \text{in } \tilde{S}_1.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.8.5)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = H_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(1)} - \\ \qquad - \frac{1}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = \frac{1}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + H_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

§ 7. Die Liouville-Transformation (4.3.3)

71. Allgemeines. Wie erwähnt, ist diese Transformation anzuwenden, wenn alle drei δ_ν groß sind. $\varphi(x)$ hat die beiden — eventuell zusammenfallenden Nullstellen bei

$$x = s_{1,2} = \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2 + \delta_0^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\delta_\infty^2}.$$

Dabei ist Δ die folgende gegenüber Permutationen der δ_ν invariante Größe

$$\Delta = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_\infty)(\delta_0 + \delta_1 - \delta_\infty)(\delta_0 - \delta_1 + \delta_\infty)(\delta_0 - \delta_1 - \delta_\infty).$$

$\sqrt{\Delta}$ sei positiv reell oder positiv imaginär angenommen. Ist $\Delta \neq 0$, so läßt sich das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = s_1$ als unterer Grenze folgendermaßen auswerten.

$$(7.1.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\left[\log\left(2x - \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2 + \delta_0^2}{\delta_\infty^2} + 2\sqrt{(x-s_1)(x-s_2)}\right) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_\infty^2}\right] + \\ \quad + \frac{\sqrt{\delta_0^2}}{2}\left[\log\left(\frac{2(x-1)}{x} - \frac{\delta_0^2 - \delta_\infty^2 + \delta_1^2}{\delta_0^2} + \right.\right. \\ \quad \left.\left. + 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x} - \frac{s_1-1}{s_1}\right)\left(\frac{x-1}{x} - \frac{s_2-1}{s_2}\right)}\right) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_1^2}\right] - \\ \quad - \frac{\sqrt{\delta_1^2}}{2}\left[\log\left(\frac{2}{1-x} - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2 + \delta_\infty^2}{\delta_1^2} + \right.\right. \\ \quad \left.\left. + 2\sqrt{\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-s_1}\right)\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-s_2}\right)}\right) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_0^2}\right]. \end{cases}$$

Die Funktionswerte seien wieder so festgelegt, daß für reelle x und $x \to +\infty$, bzw. $\frac{x-1}{x} \to +\infty$, $\frac{1}{1-x} \to +\infty$ die Wurzeln positiv reelle, die Logarithmen reelle Werte annehmen. $\sqrt{\delta_0^2}$, $\sqrt{\delta_1^2}$ seien die Werte von $\delta_\infty \sqrt{(x-s_1)(x-s_2)}$ an den Stellen $x=0$ bzw. $x=1$, und die $\log \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_\nu^2}$ seien die Werte des jeweils vorangehenden Ausdrucks an der Stelle $x=s_1$, immer bei analytischer Fortsetzung in der — eventuell aufgeschnittenen[15]) — oberen Halbebene.

Ist $\Delta=0$, so fallen die Nullstellen zusammen, $s_1=s_2=s$ und $\xi(x)$ wird dann:

$$(7.1.2) \qquad \begin{cases} \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\,[s(\log x - \log s) + \\ \qquad + (1-s)\,(\log(x-1) - \log(s-1))]. \end{cases}$$

Die transformierte Differentialgleichung läßt sich auch hier in der Regel nicht explizit angeben. Ihre singulären Stellen liegen bei $\xi(s_1)=0$ und $\xi(s_2)$. Liegen die Nullstellen getrennt, $\Delta \neq 0$, so haben diese Singularitäten den Index $\frac{1}{3}$, fallen sie zusammen, so hat die Singularität den Index $\frac{1}{4}$.

Abgesehen von einer Vertauschung der δ_ν sind die folgenden Fälle zu unterscheiden, die wir der Reihe nach untersuchen wollen:

1. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta>0$, $\delta_0+\delta_1<\delta_\infty$.
2. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta=0$, $\delta_0+\delta_1=\delta_\infty$.
3. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta<0$.
4. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta>0$, $|\delta_\sigma|+|\delta_1|<|\delta_\infty|$.
5. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta=0$, $\delta_0+\delta_1=\delta_\infty$.
6. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta<0$.
7. δ_1, δ_∞ *reell*, δ_0 *imaginär*.
8. δ_1, δ_∞ *imaginär*, δ_0 *reell*.

7.2. Wie in 6.3 führen wir noch einige Hilfsgrößen ein. Wir definieren als

$$\begin{aligned} c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = {} & \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ & - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} - \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ & - \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = {} & \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ & - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} + \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2} + \\ & + \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}. \end{aligned}$$

[15]) Wenn $\Delta<0$ ist, dann sind s_1 und s_2 konjugiert komplex und wir müssen zur eindeutigen Bestimmung von $\xi(x)$ die obere x_ν-Halbebene in geeigneter Weise aufschneiden. Vgl. auch 2.3.

$$c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} -$$
$$- \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} - \frac{\delta_\alpha+\delta_\gamma-\delta_\beta}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\gamma-\delta_\beta}{2} +$$
$$+ \frac{\delta_\beta+\delta_\gamma-\delta_\alpha}{4} \log \frac{\delta_\beta+\delta_\gamma-\delta_\alpha}{2}.$$

$$|\Im(\log \ldots)| < \pi.$$

Weiter sei

$$G_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) \times$$
$$\times \exp\left[\tfrac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) - c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\right].$$

$$G_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\beta)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\gamma-\delta_\alpha-\delta_\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\gamma+\delta_\alpha+\delta_\beta}{2}\right)} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_2'(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta) - c_2'(\delta_\beta, \delta_\gamma, \delta_\alpha)\right].$$

$$H_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = 2\pi H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\, e^{-2c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

$$H_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)} \times$$
$$\times\, e^{-2c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

$$H_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1-\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)} \times$$
$$\times\, e^{-2c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

Schließlich entsprechen den Ausdrücken $\psi_\alpha^{(i)}$ von 6.3 in dieser Liouville-Transformation die folgenden:

$$\chi_\infty^{(1)} = [(x-s_1)(x-s_2)]^{\frac{1}{4}}\,[x(x-1)]^{-\frac{1}{4}}\, e^{-c_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)},$$
$$\chi_1^{(1)} = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)}\right]^{\frac{1}{4}}[x(x-1)]^{-\frac{1}{4}}\, e^{-c_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)},$$
$$\chi_0^{(1)} = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{s_1 s_2}\right]^{\frac{1}{4}}[x(x-1)]^{-\frac{1}{4}}\, e^{-c_2(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)}.$$

$\chi_\alpha^{(2)}$ seien wieder die gleichen Ausdrücke nur mit $e^{+c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}$ statt $e^{-c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}$ gebildet. Ebenso seien $\chi_\alpha'^{(i)}$, $\chi_\alpha''^{(i)}$ die entsprechenden Ausdrücke mit $c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ bzw. $c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ gebildet.

7.3. $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_\infty$ **reell,** $\Delta > 0$, $\vartheta_0 + \vartheta_1 < \vartheta_\infty$. Hier ist $0 < s_1 < s_2 < 1$ und $\sqrt{\delta_0^2} = -\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2} = \delta_1$. Ferner wird $\xi(s_2) = \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)$. Die Teilbereiche im ξ-Polygon seien — um den Übergang zu den folgenden Fällen besser darstellen zu können — von S_2 bis S_7 durchnumeriert.

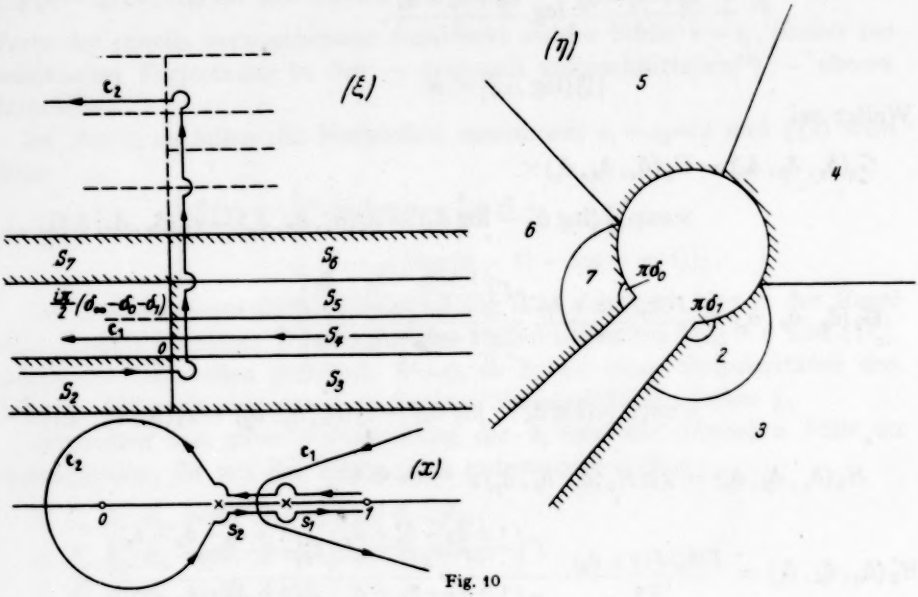

Fig. 10

Asymptotische Abschätzungen:

$$
(7.3.1)\quad
\begin{cases}
\chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \\
\chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\delta_0}{H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\sin\pi\delta_\infty} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_1'^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(1)}, \\
\chi_1'^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(1)}\left(\frac{1}{2H_2'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\sin\pi\delta_1} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_0'^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(1)}, \\
\chi_0'^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(1)}\left(\frac{1}{2H_2'(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)\sin\pi\delta_0} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).
\end{cases}
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(7.3.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_7^{(1)}(\xi) = -2i\cos\pi\frac{\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1}{2}\, G_2'(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_2

$$(7.3.3)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_7^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)\, e^{\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_3 bis S_6.

$$(7.3.4)\qquad \begin{cases} v_6^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(1)}(\xi) = 2i\cos\pi\frac{\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1}{2}\, G_2'(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\times \\ \qquad\qquad \times e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_7.

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.3.5)\qquad v_4^{(2)} = H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_4.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.3.6)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = 2i\left(\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\delta_0\right)\times \\ \qquad \times H_2'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-(\xi - i\pi(\delta_\infty - \delta_1))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \quad \text{in } \tilde{S}_2. \end{cases}$$

7.4. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ reell, $\Delta = 0$, $\delta_0 + \delta_1 = \delta_\infty$. Ähnlich wie in 6.5 bleiben hier alle Formeln des vorigen Abschnitts bis auf (7.3.5) gültig. An Stelle von (7.3.5) notieren wir die folgende Fortsetzungsrelation für den Weg $\mathfrak{C}_3$:

$$(7.4.1)\qquad v_6^{(2)} = i\, H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_6.$$

Zu beachten ist auch hier wieder, daß $H_2^{(\prime)}$ zum Teil jetzt nicht mehr gegen 1 strebt für $\varrho \to \infty$. (Vgl. Fig. 11.)

7.5. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ reell, $\Delta < 0$. Die Nullstellen s_1, s_2 sind jetzt konjugiert komplex; nach unseren Festsetzungen liegt s_1 in der oberen, s_2 in der unteren Halbebene. An diesen Stellen ist $\xi(x)$ verzweigt. Um einen eindeutigen Zweig abzutrennen, legen wir in der oberen Halbebene einen Schnitt zwischen s_1 und einen Punkt der reellen Achse im Intervall $(0, 1)$. Nach unseren

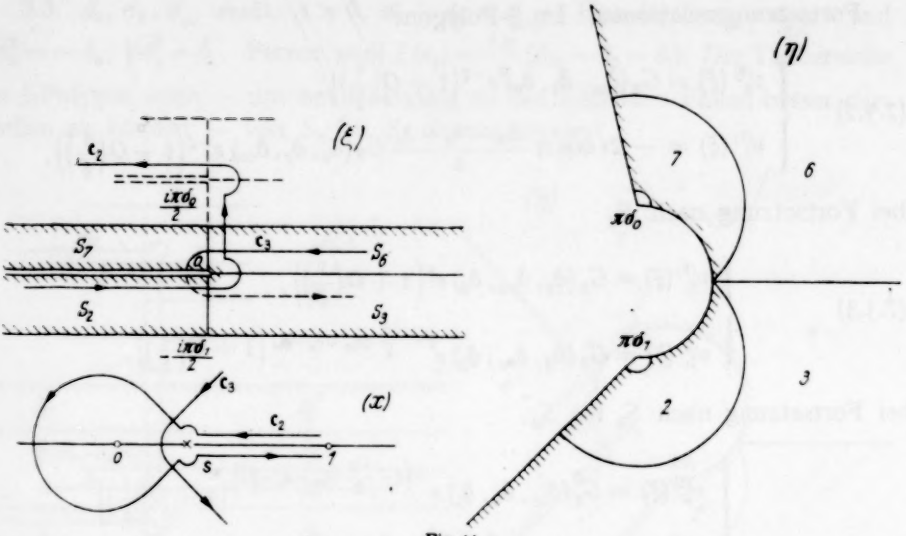

Fig. 11

Festsetzungen in 2.3 sei dieser Schnitt so gelegt, daß sein Bild in der ξ-Ebene parallel zur imaginären Achse verläuft. Das so entstehende — nicht schlichte[16]) — ξ-Polygon ist in Fig. 12 dargestellt. Es werde in Halbstreifen eingeteilt, die wir mit S_1 bis S_3 und S_6 bis S_8 bezeichnen.

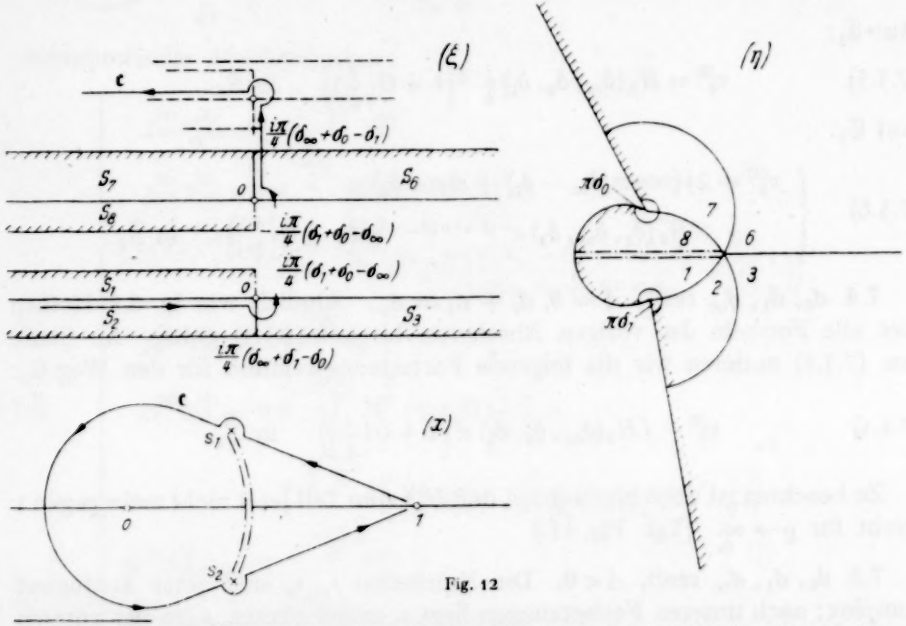

Fig. 12

[16]) Zur besseren Übersicht sind in Fig. 12 die beiden schlichten Teilstücke, aus denen sich das ξ-Polygon zusammensetzt, getrennt nebeneinander dargestellt. Diese Teilstücke sind an der Kante zwischen S_3 und S_6 zusammenzufügen, so daß sich S_1 und S_7 sowie S_2 und S_8 teilweise überdecken.

Asymptotische Abschätzungen:

$$
(7.5.1)\quad \begin{cases}
\chi_\infty''^{(1)}\, y^{(1)}_{(\infty,1)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(2)}, \\
\chi_\infty''^{(2)}\, y^{(2)}_{(\infty,1)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(1)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2}}{H_2''(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\sin\pi\delta_\infty}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_1''^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_1+\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(1)}, \\
\chi_1''^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_1+\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_1+\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(1)}\left(\frac{\cos\pi\,\dfrac{\delta_1+\delta_0-\delta_\infty}{2}}{H_2''(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\sin\pi\delta_1}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_0''^{(1)}\, y^{(1)}_{(0,-\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(1)}, \\
\chi_0''^{(2)}\, y^{(2)}_{(0,-\infty)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(1)}\left(\frac{\cos\pi\,\dfrac{\delta_0+\delta_\infty-\delta_1}{2}}{H_2''(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\sin\pi\delta_0}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).
\end{cases}
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$
(7.5.2)\quad \begin{cases}
v_3^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_1, S_2. \\
v_2^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\
v_7^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_3, S_6. \\
v_6^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_7, S_8.
\end{cases}
$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$
(7.5.3)\quad \begin{cases}
v_2^{(1)}(\xi) = 2i\cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2}\, H_2''(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\times \\
\qquad\qquad \times e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_2.
\end{cases}
$$

7.6. $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty$ imaginär, $\Delta > 0$, $|\sigma_0| + |\sigma_1| < |\sigma_\infty|$. Das ξ-Polygon ist hier das gleiche wie in 7.3, nur ist es um $\pi/2$ gedreht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.6.1)\qquad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \quad \chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}, \\ \chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_2^{(1)}, \quad \chi_1^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(2\delta_0-\delta_\infty)}\, v_7^{(1)}, \quad \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(2\delta_0-\delta_\infty)}\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

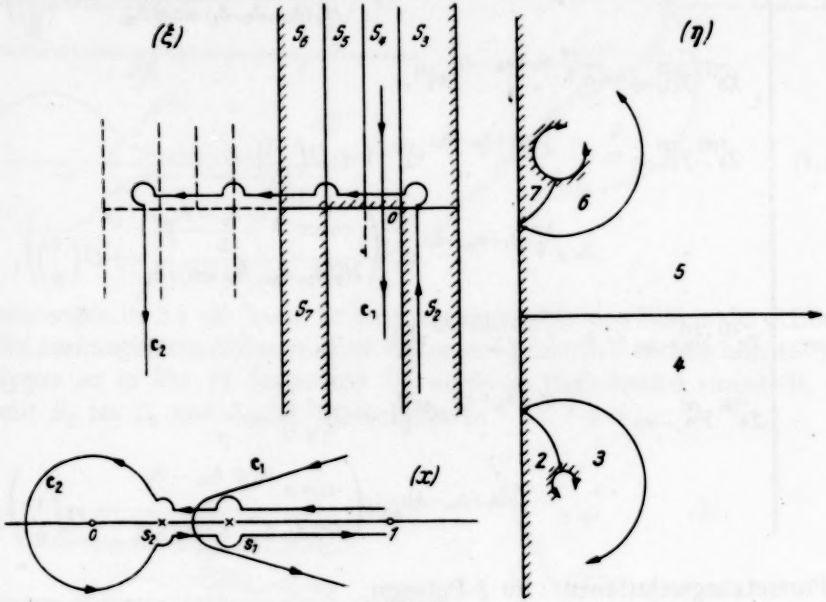

Fig. 13

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon

$$(7.6.2)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -i\, e^{2\pi i \delta_1} G_2(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}. \\ v_7^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + i\, e^{2\pi i \delta_0} G_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}, \\ v_7^{(2)} = -i\, G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}. \\ v_2^{(1)} = -e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(1)} + \\ \qquad + i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(-\delta_0, -\delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(1)} + \\ \qquad + e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(\delta_0, -\delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.6.3)\qquad \begin{cases} v_4^{(1)} = H_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\left(e^{i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} \cos \pi \delta_1 + e^{-i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0\right) \tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = -\dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\left(e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} \cos \pi \delta_1 + e^{i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0\right) \tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.6.4)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin \pi \delta_1}\left(e^{-i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_\infty\right) \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + i\, e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} H_2(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin \pi \delta_1}\left(e^{i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_\infty\right) \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

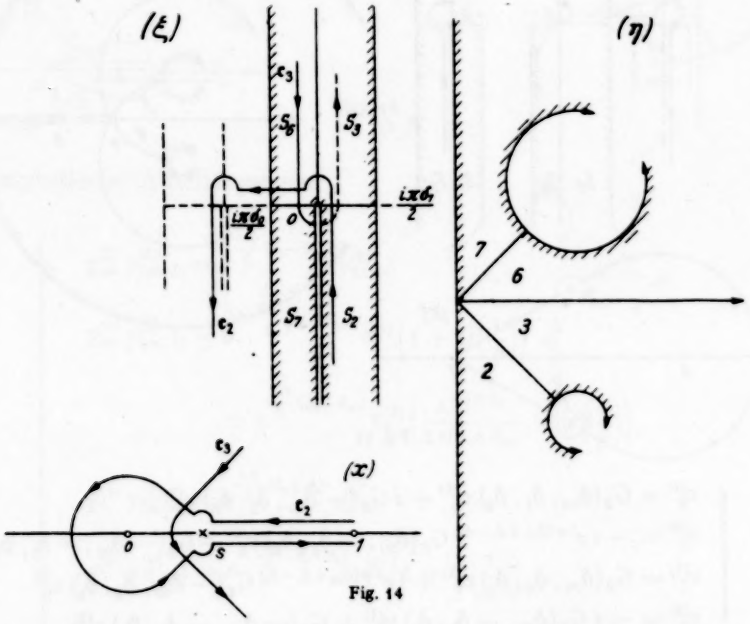

Fig. 14

7.7. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ imaginär, $\Delta = 0$, $\delta_0 + \delta_1 = \delta_\infty$. Alle Formeln von 7.6, bis auf (7.6.3), bleiben gültig. An ihre Stelle tritt die Relation für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$:

$$(7.7.1)\qquad \begin{cases} v_6^{(1)} = \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty}\left(\cos \pi \delta_\infty + e^{i\pi(\delta_0 - \delta_1)}\right) \tilde{v}_6^{(1)} + i\, H_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_6^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\, H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_6^{(1)} - \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty}\left(\cos \pi \delta_\infty + e^{-i\pi(\delta_0 - \delta_1)}\right) \tilde{v}_6^{(2)}. \end{cases}$$

7.8. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ imaginär, $\Delta < 0$. Das ξ-Polygon ist hier wieder das gleiche wie in 7.5.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.8.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_3^{(2)}, & \chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_3^{(1)}, \\ \chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_1^{(1)}, & \chi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_1)}\, v_7^{(1)}, & \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_1)}\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

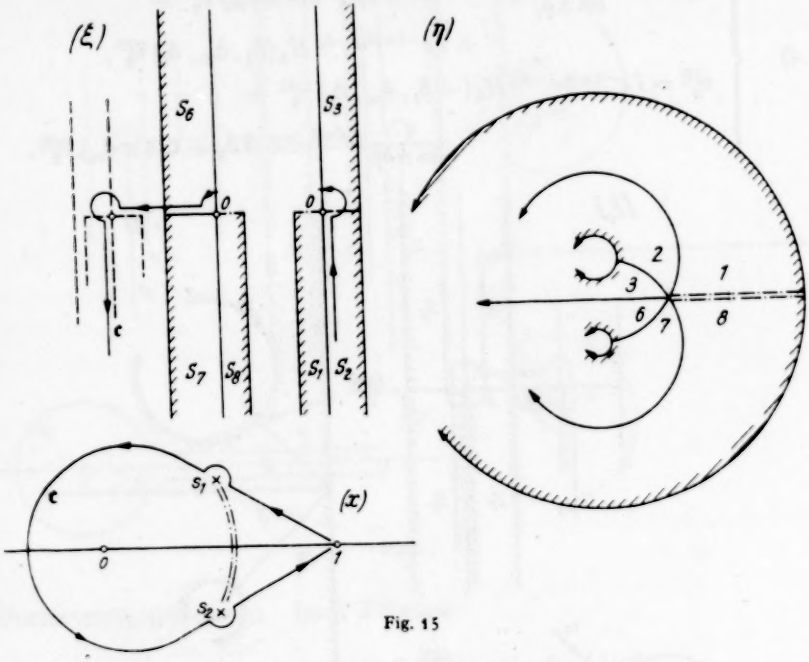

Fig. 15

$$(7.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -i\, e^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, G_2(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}. \\ v_7^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + i\, e^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, G_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)} \\ v_7^{(2)} = -i\, G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(7.8.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = \dfrac{-i}{\sin\pi\,\delta_1}\left(e^{i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}\cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2} + \cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0+\delta_1}{2}\right)\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)}\, H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)}\, H_2(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin\pi\,\delta_1}\left(e^{-i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}\cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2} + \cos\pi\,\dfrac{\delta_\infty+\delta_0+\delta_1}{2}\right)\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

7.9. δ_1, δ_∞ reell, δ_0 imaginär. Hier ist $s_2<0<s_1<1$, $\sqrt{\delta_0^2}=\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2}=\delta_1$ und $\xi(s_2)=\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1-\delta_0)$.

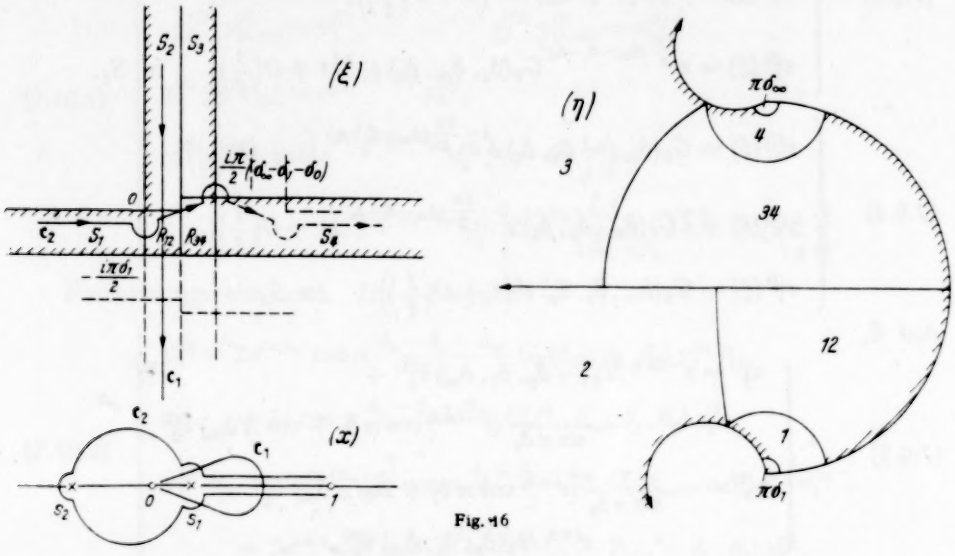

Fig. 16

Asymptotische Abschätzungen:

$$
(7.9.1)\qquad
\begin{cases}
\chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(2)}, \\
\chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(1)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad\qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(2)}\left(\frac{e^{-i\pi\delta_0}}{2\sin\pi\delta_\infty}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(1)}, \\
\chi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad\qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(1)}\left(\frac{e^{-i\pi\delta_0}}{2\sin\pi\delta_1}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_3^{(2)}, \quad \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_3^{(1)}.
\end{cases}
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$
(7.9.2)\qquad
\begin{cases}
v_1^{(1)} = G_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, v_2^{(1)} + i\, G_2(-\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, v_2^{(2)}; \\
v_4^{(2)} = -\,i\, G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, v_3^{(2)}.
\end{cases}
$$

$$(7.9.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)}(\xi) = -i\,G_2(\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1 - \delta_0)} G_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_1. \end{cases}$$

$$(7.9.4)\quad \begin{cases} v_3^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, e^{\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1 - \delta_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_3^{(2)}(\xi) = i\,G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1 - \delta_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \quad \text{in } S_4. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.9.5)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{-i\pi\delta_1} H_2(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \frac{1}{\sin \pi\delta_0}\left(e^{-i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty\right)\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -\frac{1}{\sin\pi\delta_0}\left(e^{i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty\right)\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + e^{i\pi\delta_1} H_2(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.9.6)\quad v_1^{(1)} = H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_1.$$

7.10. δ_1, δ_∞ imaginär, δ_0 reell. Wie in 7.9 ist $s_2 < 0 < s_1 < 1$, jedoch wird $\sqrt{\delta_0^2} = -\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2} = \delta_1$ und $\xi(s_2) = \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1 + \delta_0)$. ξ-Polygon wie in 7.9.

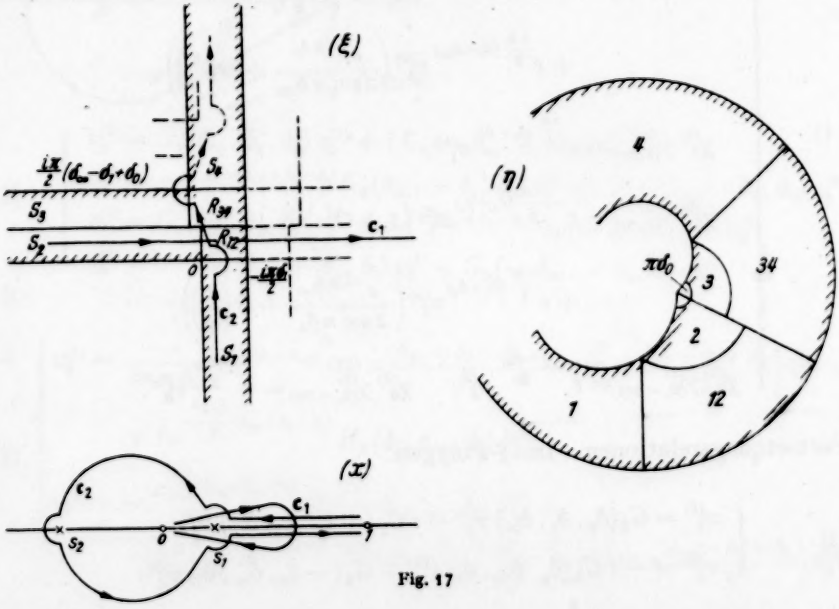

Fig. 17

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.10.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty'^{(1)}\, y^{(1)}_{(\infty,1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(2)}, \quad \chi_\infty'^{(2)}\, y^{(2)}_{(\infty,1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(1)}, \\ \chi_1'^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,\infty)} = v_1^{(1)}, \qquad\qquad \chi_1'^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,\infty)} = v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y^{(1)}_{(0,-\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}\, y^{(2)}_{(0,-\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(1)}\left[\frac{e^{i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}+e^{-i\pi\delta_1}}{2\sin\pi\delta_0}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(7.10.2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = 2e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\dfrac{\delta_0-\delta_1-\delta_\infty}{2}\, G_2'(\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(1)} + \\ \qquad + 2i\cos\pi\dfrac{\delta_0-\delta_1+\delta_\infty}{2}\, G_2'(-\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -2i\, e^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1)}\cos\pi\dfrac{\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}\, G_2'(\delta_\infty,-\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(1)} + \\ \qquad + 2e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\dfrac{\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}\, G_2'(-\delta_\infty,-\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(7.10.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(-\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, v_1^{(1)} - i\, G_2(\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, v_1^{(2)}; \\ v_3^{(1)} = G_2(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, v_4^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(7.10.4)\quad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = i\, G_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_0,-\delta_1,\delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(1)}(\xi) = -i\, G_2(\delta_0,-\delta_\infty,\delta_1)\, e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1+\delta_0)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1+\delta_0)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

gültig in S_2 und S_3.

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.10.5)\qquad v_2^{(1)} = H_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_2.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.10.6)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = 2e^{i\pi\delta_1}(\cos\pi(\delta_0-\delta_1)+\cos\pi\delta_\infty)\, H_2'(\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(1)} - \\ \qquad - \dfrac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0+\cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = \dfrac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0+\cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + 2e^{i\pi\delta_1}(\cos\pi(\delta_0+\delta_1)+\cos\pi\delta_\infty)\, H_2'(-\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

§ 8. Die Whittakersche Differentialgleichung. Allgemeines

8.1. Die Whittakersche Differentialgleichung[17]) lautet in unserer Schreibweise:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-(2m)^2}{x^2} - 1 + \frac{4k}{x}\right], \tag{8.1.1}$$

Sie entsteht bekanntlich durch Konfluenz aus der Riemannschen, indem die Stelle $x=1$ in die Stelle $x=\infty$ hineinrückt und die zugehörigen Winkelgrößen δ_1 und δ_∞ unendlich groß werden; die Differenz $\delta_\infty - \delta_1$ bleibt dabei endlich und wird gleich $2k$ gesetzt. Die Stelle $x=0$ bleibt Stelle der Bestimmtheit, und es wird die zugehörige Winkelgröße $\delta_0 = 2m$ gesetzt. Dementsprechend sei $2m$ positiv reell oder positiv imaginär; ganzzahlig reelle Werte $2m$ seien aus denselben Gründen wie in 4.1 ausgeschlossen.

Die Größe k muß, da wir reelle Koeffizienten der Differentialgleichung vorausgesetzt hatten, reell sein. Imaginäre Werte k berücksichtigen wir, indem wir (8.1.1) durch die Transformation

$$x \to ix, \quad k \to i\varkappa \tag{8.1.2}$$

in eine Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-(2m)^2}{x^2} + 1 - \frac{4\varkappa}{x}\right] \tag{8.1.3}$$

umformen.

8.2. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung (8.1.1), also den Fall *k reell*. Die zu der Stelle $x=0$ gehörigen kanonischen Lösungen werden gewöhnlich mit $M_{k,\pm m}(x)$ bezeichnet; ihre Reihenentwicklungen lauten:

$$\begin{cases} M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} F_1(\frac{1}{2}+m-k, 1+2m; x) \\ M_{k,-m}(x) = x^{\frac{1}{2}-m} e^{-\frac{x}{2}} F_1(\frac{1}{2}-m-k, 1-2m; x). \end{cases} \tag{8.2.1}$$

Dabei ist $F_1(a, b; x)$ die konfluente hypergeometrische Reihe

$$F_1(a, b; x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{b(b+1)\dots(b+\nu-1)} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Die Stelle $x=\infty$ ist wesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung (8.1.1). In ihrer Umgebung werden an Stelle der kanonischen Lösungen solche Lösungen betrachtet, die sich durch besonderes asymptotisches Verhalten auszeichnen. Es sind dies die Funktionen $W_{k,m}(x)$, die durch

$$W_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} M_{k,m}(x) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} M_{k,-m}(x) \tag{8.2.2}$$

definiert werden und für die im Winkelraum $|\arc x| < \frac{3\pi}{2}$ die asymptotische Entwicklung gilt:

$$W_{k,m}(x) \sim e^{-\frac{x}{2}} x^k \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{-\nu}}{\nu!} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left[m^2 - \left(k + \frac{1}{2} - \mu\right)^2\right]\right). \tag{8.2.3}$$

[17]) Siehe etwa BUCHHOLZ [2], insbesondere 1—31.

Die durch (8.2.1), (8.2.2) definierten Funktionselemente betrachten wir zunächst auf der positiv reellen x-Achse; dementsprechend seien wieder für die Potenzen von x die Hauptwerte gewählt. Von dort aus lassen sie sich eindeutig überallhin in die obere Halbebene analytisch fortsetzen. Die bei Fortsetzung in die untere Halbebene entstehenden Funktionszweige mögen in Anlehnung an unsere bisherige Bezeichnungsweise $\widetilde{M}_{k,m}(x)$, $\widetilde{M}_{k,-m}(x)$, $\widetilde{W}_{k,m}(x)$ genannt werden.

Durch die Transformation

$$x \to -x, \quad k \to -k \tag{8.2.4}$$

geht die Differentialgleichung (8.1.1) in sich über. Es sind daher $M_{-k,m}(-x)$, $M_{-k,-m}(-x)$, $W_{-k,m}(-x)$ Lösungen von (8.1.1), die jetzt auf der negativ reellen x-Achse definiert sind und von dort aus in die obere Halbebene fortgesetzt werden können. Die Funktionszweige, die bei Fortsetzung in die untere Halbebene entstehen, mögen wieder mit $\widetilde{M}_{-k,m}(-x)$, $\widetilde{M}_{-k,-k}(-x)$, $\widetilde{W}_{-k,m}(-x)$ bezeichnet werden.

Wie in (4.2.3) gilt die Relation

$$\begin{cases} M_{-k,m}(-x) = e^{-i\pi(\frac{1}{2}+m)} M_{k,m}(x) \\ M_{-k,-m}(-x) = e^{-i\pi(\frac{1}{2}-m)} M_{k,-m}(x). \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Daneben betrachten wir die Relationen zwischen den $W_{\pm k,m}(\pm x)$ und den $\widetilde{W}_{\pm k,m}(\pm x)$ bei Fortsetzung um die Stelle $x=0$ herum. Es gilt hier im Intervall $(-\infty, 0)$

$$W_{k,m}(x) = e^{2\pi i k}\widetilde{W}_{k,m}(x) + \frac{2\pi i e^{i\pi k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\,(\Gamma\frac{1}{2}+m-k)}\widetilde{W}_{-k,m}(-x), \tag{8.2.6}$$

und im Intervall $(0, \infty)$

$$W_{-k,m}(-x) = -\frac{2\pi i e^{i\pi k}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}\widetilde{W}_{k,m}(x) + e^{2\pi i k}\widetilde{W}_{-k,m}(-x). \tag{8.2.7}$$

8.3. k imaginär. Wegen (8.1.2) lassen sich auch die Lösungen der Differentialgleichung (8.1.3) durch die Whittakerfunktionen $M_{\pm k,\pm m}$ und $W_{\pm k,m}$ ausdrücken. Wir definieren — zunächst für die positiv reelle x-Achse:

$$\begin{cases} M_{+}^{(1)}(x) = e^{-\frac{i\pi}{4}(+2m)} M_{ix,m}(ix), \\ M_{+}^{(2)}(x) = e^{-\frac{i\pi}{4}(+2m)} M_{ix,-m}(ix), \end{cases} \tag{8.3.1}$$

$$\begin{cases} W_{+}^{(1)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}x} W_{ix,m}(ix), \\ W_{+}^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}x} W_{-ix,m}(-ix). \end{cases} \tag{8.3.2}$$

Dabei seien zur eindeutigen Bestimmung dieser Lösungen die $M_{ix,\pm m}(ix)$ und $W_{ix,m}(ix)$ zunächst für positiv reelle Argumente — d.h. auf der negativ imaginären x-Achse — gemäß (8.2.1), (8.2.2) gebildet und von dort auf dem

kürzesten Wege zur positiv reellen x-Achse fortgesetzt. Entsprechend werde $W_{-i\varkappa,m}(-ix)$ auf der positiv imaginären x-Achse gebildet und von dort ebenfalls auf dem kürzesten Wege zur positiv reellen x-Achse fortgesetzt.

Auf Grund der Transformation (8.2.4) können wir entsprechende Lösungen von (8.1.3) auch auf der negativ reellen x-Achse definieren. Es sei

$$(8.3.3)\quad M_-^{(1)}(m,\varkappa;x)=M_+^{(1)}(m,-\varkappa;-x)\quad M_-^{(2)}(m,\varkappa;x)=M_+^{(2)}(m,-\varkappa;-x),$$

$$(8.3.4)\quad W_-^{(1)}(m,\varkappa;x)=W_+^{(1)}(m,-\varkappa;-x)\quad W_-^{(2)}(m,\varkappa;x)=W_+^{(2)}(m,-\varkappa;-x).$$

Wie in (4.1.3), (4.1.4) sollen die den $M_\pm^{(1)(2)}$ und $W_\pm^{(1)(2)}$ beigefügten m und $\varkappa$ nur die Art der Transformation andeuten; im folgenden werden wir sie wieder fortlassen.

Zwischen den $W_+^{(1)(2)}$ und $M_+^{(1)(2)}$ gilt die folgende Relation

$$(8.3.5)\quad \begin{cases} W_+^{(1)}=\dfrac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac12-m-i\varkappa)}\,e^{\frac{i\pi}{2}(\frac12+m-i\varkappa)}M_+^{(1)}+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac12+m-i\varkappa)}\,e^{\frac{i\pi}{2}(\frac12-m-i\varkappa)}M_+^{(2)}, \\ W_+^{(2)}=\dfrac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac12-m+i\varkappa)}\,e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac12+m+i\varkappa)}M_+^{(1)}+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac12+m+i\varkappa)}\,e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac12-m+i\varkappa)}M_+^{(2)}. \end{cases}$$

Die entsprechende Relation zwischen den $M_-^{(1)(2)}$ und $W_-^{(1)(2)}$ erhält man, indem man in (8.3.5) überall $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt.

Weiter gilt

$$(8.3.6)\quad W_+^{(1)}=\frac{2\pi i}{\Gamma(\frac12-m-i\varkappa)\,\Gamma(\frac12+m-i\varkappa)}W_-^{(1)}+e^{-\pi\varkappa}W_-^{(2)},\quad W_+^{(2)}=e^{\pi\varkappa}W_-^{(1)}.$$

Schließlich notieren wir noch die Umlaufsrelation der W_+; der Formel (8.2.6) entspricht hier

$$(8.3.7)\quad \begin{cases} W_+^{(1)}=-(2\cos 2\pi m+e^{2\pi\varkappa})\widetilde{W}_+^{(1)}+\dfrac{2\pi i e^{\pi\varkappa}}{\Gamma(\frac12-m-i\varkappa)\,\Gamma(\frac12+m-i\varkappa)}\widetilde{W}_+^{(2)}, \\ W_+^{(2)}=\dfrac{2\pi i e^{\pi\varkappa}}{\Gamma(\frac12+m+i\varkappa)\,\Gamma(\frac12-m+i\varkappa)}\widetilde{W}_+^{(1)}+e^{2\pi\varkappa}\widetilde{W}_+^{(2)}. \end{cases}$$

8.4. Liouville-Transformationen. Zur Vorbereitung der asymptotischen Integration üben wir wieder auf die Differentialgleichungen (8.1.1) und (8.1.3) die Liouville-Transformation aus. Ähnlich wie in 4.3 kommen — auf Grund der Bedingungen in 2.2 — für $\varrho^2\varphi(x)$ nur eine beschränkte Anzahl von rationalen Funktionen in Betracht. Es bestehen die folgenden Möglichkeiten:

$$(8.4.1)\quad \begin{cases} \varrho^2\varphi(x)=\dfrac14-\dfrac{k}{x} & \text{für (8.1.1)} \\ \qquad\quad =-\dfrac14+\dfrac{\varkappa}{x} & \text{für (8.1.3)}, \end{cases}$$

$$(8.4.2)\qquad \begin{cases} \varrho^2 q(x) = \frac{1}{4} - \frac{k}{x} + \frac{m^2}{x^2} & \text{für (8.1.1)} \\ \qquad\quad = -\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{x} + \frac{m^2}{x^2} & \text{für (8.1.3).} \end{cases}$$

Dabei entspricht (8.4.1) der Transformation (4.3.2) und (8.4.2) der Transformation (4.3.3) von 4.3. Wie dort hat auch hier ϱ nur die Bedeutung eines Maßes für die Güte der Näherung bei asymptotischer Integration. So ist also die Transformation (8.4.1) angebracht, wenn k bzw. $\varkappa$ groß ist, während m klein bleibt. Dagegen wird (8.4.2) anzuwenden sein, wenn m und k bzw. $\varkappa$ groß ist[18]; dabei sind wieder nur solche Näherungen miteinander vergleichbar, bei denen m und k bzw. $\varkappa$ in einem festen Verhältnis zueinander stehen.

Der Untersuchung der Whittakerschen Differentialgleichung auf Grund dieser Liouville-Transformationen sind die beiden folgenden Paragraphen gewidmet. Dabei sollen die vorbereitenden Betrachtungen und Festsetzungen von 4.3 bis 4.6 auch für diese Untersuchungen maßgebend sein.

§ 9. Die Liouville-Transformation (8.4.1)

9.1. k reell. Wir müssen voraussetzen, daß $m^2 \leq \frac{1}{16}$ ist. Wegen (8.2.4) können wir k als positiv reell voraussetzen. Auch den Fall $k = 0$ dürfen wir ausschließen; in diesem Fall geht (8.4.1) in die triviale Transformation $\xi(x) = -\frac{x}{2}$ über. Die Whittakersche Differentialgleichung ist dann die bereits in 3.5 betrachtete Differentialgleichung (3.16).

Ist $k \neq 0$, so wird das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = 0$ als unterer Grenze ausgewertet:

$$(9.1.1)\qquad \xi(x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{x(x-4k)} + k\log\left(2x - 4k + \sqrt{x(x-4k)}\right) - k\log(-4k).$$

Die Vorzeichen der Wurzeln und Logarithmen seien wie bisher festgelegt, nämlich positiv reell für $x \to \infty$ auf der positiv reellen Achse.

Das ξ-Polygon erhält dann die Gestalt von Fig. 18. Es kann als Grenzfall von Fig. 5 in 6.4 aufgefaßt werden[19], mit $\delta_1 \to \infty$, $\delta_\infty \to \infty$ und $\delta_\infty - \delta_1 = 2k$. Dementsprechend ist auch die Numerierung der Teilbereiche gewählt, nur werden aus den Halbstreifen S_3, S_4 in Fig. 5 die Quadranten Q_3, Q_4 in Fig. 18.

Die transformierte Differentialgleichung, die sich nicht explizit angeben läßt, hat Singularitäten bei $\xi(0) = 0$ mit dem Index $2m$ und bei $\xi(4k) = -i\pi k$ mit dem Index $\frac{1}{3}$.

Wie bei der Riemannschen Differentialgleichung können wir auch hier die asymptotische Abschätzung kanonischer Lösungen und Fortsetzungs-

[18] Genauer erhalten wir bei dieser Liouville-Transformation asymptotische Abschätzungen für $m \to \infty$ bei festem k/m bzw. $\varkappa/m$. Dabei kann k/m beliebig klein sein, auch $k = 0$ (bzw. $\varkappa = 0$) sind zugelassen.

[19] Die Vorzeichen der Wurzeln im Integral (9.1.1) wurden so gewählt, daß es unmittelbar als Grenzfall des Integrals (6.2.1) aufgefaßt werden kann.

relationen angeben. So wird für große k

$$\text{(9.1.2)} \qquad \begin{cases} \left[\frac{x-4k}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{k(1-\log k)}\, W_{k,m}(x) = v_3^{(1)}, \\ \left[\frac{x-4k}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-k(1-\log k)}\, W_{-k,m}(-x) = v_1^{(2)} \end{cases}$$

und es gilt auf $\mathfrak{C}_1$ [20]):

$$\text{(9.1.3)} \qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = i\,\tilde{v}_3^{(2)}, \\ v_3^{(2)} = i\,\tilde{v}_3^{(1)} + H_3(k,m)\,\tilde{v}_3^{(2)}, \end{cases}$$

und auf $\mathfrak{C}_2$:

$$\text{(9.1.4)} \qquad \begin{cases} v_4^{(1)} = e^{2\pi i k}\,\tilde{v}_4^{(1)} + 2i(\cos 2\pi k + \cos 2\pi m)\, H_3^{-1}(k,m)\,\tilde{v}_4^{(2)} \\ v_4^{(2)} = e^{-2\pi i k}\,\tilde{v}_4^{(1)}. \end{cases}$$

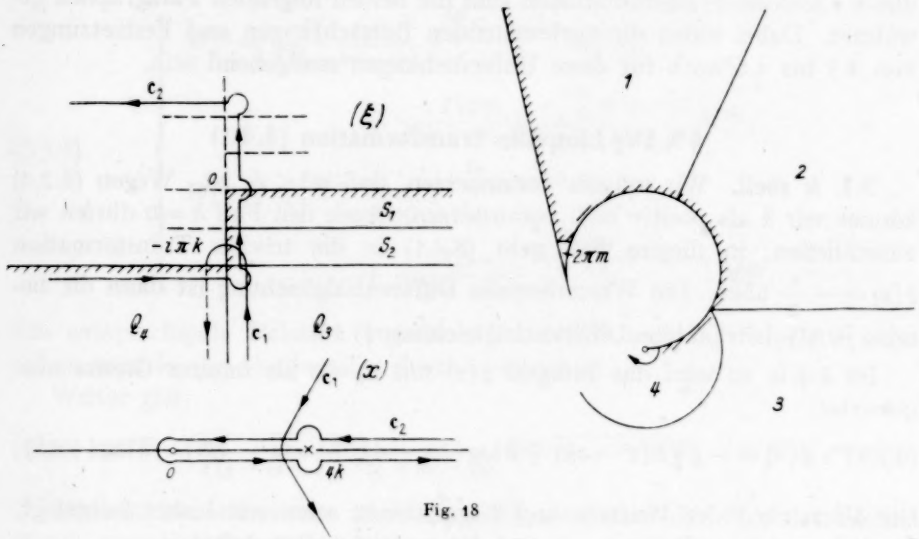

Fig. 18

Dabei soll $H_3(k,m)$ der folgende Ausdruck bedeuten:

$$\text{(9.1.5)} \qquad H_3(k,m) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}\, e^{-2k(1-\log k)}.$$

Die Konstruktion des Kreisbogenpolygons aus dem ξ-Polygon zeigt Fig. 18. Auch dieses außergewöhnliche Polygon läßt sich als Grenzfall eines gewöhnlichen — etwa von Fig. 5 — Kreisbogendreiecks auffassen. Den beiden Ecken mit den unendlich großen Winkeln δ_1 und δ_∞ entsprechen logarithmische Windungspunkte. Jeder diese beiden Windungspunkte verbindender Kreisbogen bildet mit den beiden Seiten des Polygons Winkel, deren Differenz

[20]) Diese Relationen — und entsprechend auch (9.2.4), (9.2.5) — gelten natürlich allgemein, d.h. auch für beliebig kleine k. Sie sind daher besonders wichtig, weil die asymptotische Integration mit den hier betrachteten Hilfsfunktionen auch die Untersuchung solcher Grenzübergänge möglich macht, bei denen ein Pol und eine Nullstelle von $\varphi(x)$ einander beliebig nahe kommen.

$(\delta_\infty - \delta_1)\pi = 2k\pi$ beträgt. Die dritte Ecke des Polygons hat einen Innenwinkel der Größe $2m\pi$.

9.2. k imaginär, $k = i\varkappa$, Wegen (8.2.4) können wir $\varkappa > 0$ voraussetzen. Ferner sei wieder $m^2 \leq \frac{1}{16}$.

Das Integral $\xi(x)$ wird jetzt ausgewertet

$$(9.2.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = -\frac{i}{2}\sqrt{x(x-4\varkappa)} + i\varkappa \log(2x - 4\varkappa + 2\sqrt{x(x-4\varkappa)} - \\ \qquad - i\varkappa \log(-4\varkappa). \end{cases}$$

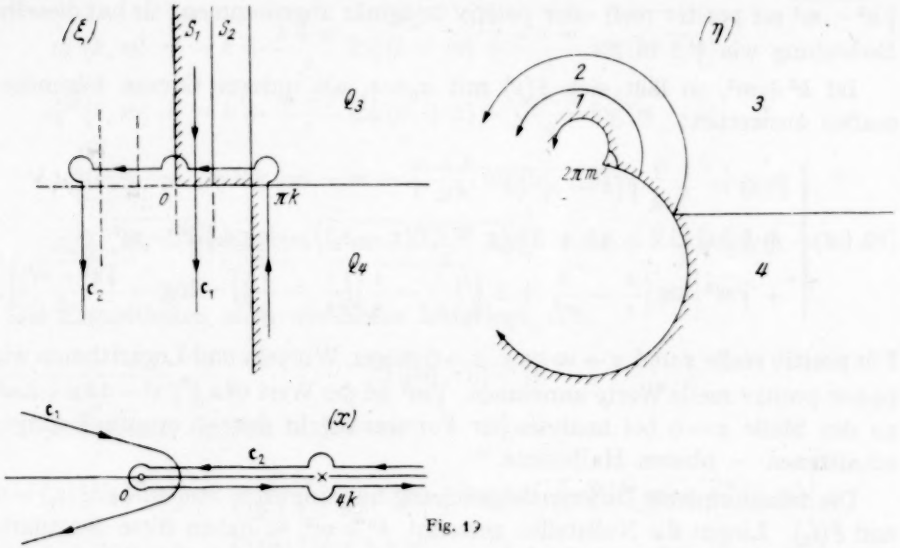

Fig. 19

Das ξ-Polygon ist das gleiche wie in 9.1, nur um $\pi/2$ gedreht. Die Funktionen $W_+^{(1)(2)}$ lassen sich wie folgt abschätzen:

$$(9.2.2)\quad \begin{cases} \left[\frac{x-4\varkappa}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{i\varkappa(1-\log\varkappa)}\, W_+^{(1)} = v_4^{(1)}, \\ \left[\frac{x-4\varkappa}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-i\varkappa(1-\log\varkappa)}\, W_+^{(2)} = v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(9.2.3)\quad \begin{cases} v_3^{(1)} = v_4^{(1)} - i\, H_3(-i\varkappa, m)\, v_4^{(2)}, \\ v_3^{(2)} = v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(9.2.4)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = H_3(-i\varkappa, m)\, \tilde{v}_1^{(1)} - i\,(2\cos 2\pi m + e^{-2\pi\varkappa})\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = i\, e^{-2\pi\varkappa} \tilde{v}_1^{(1)} + H_3(i\varkappa, m)\, \tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(9.2.5)\quad \begin{cases} v_4^{(1)} = -(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\, \tilde{v}_4^{(1)} + i\, e^{2\pi\varkappa} H_3(-i\varkappa, m)\, \tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i\, e^{2\pi\varkappa} H_3(i\varkappa, m)\, \tilde{v}_4^{(1)} + e^{2\pi\varkappa} \tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

§ 10. Die Liouville-Transformation (8.4.2)

10.1. k reell, Allgemeines. Wie erwähnt, ist diese Transformation anzuwenden, wenn m groß ist, dagegen brauchen wir über k keine besonderen Voraussetzungen zu machen; nur wenn wir die Näherungen miteinander vergleichen wollen, müssen k und m in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Insbesondere ist auch der Fall $k=0$ zugelassen.

$\varphi(x)$ hat die beiden — eventuell zusammenfallenden Nullstellen bei

$$x = s_{1,2} = 2k \pm 2\sqrt{k^2 - m^2}.$$

$\sqrt{k^2-m^2}$ sei positiv reell oder positiv imaginär angenommen; sie hat dieselbe Bedeutung wie $\sqrt{\Delta}$ in 7.1.

Ist $k^2 \neq m^2$, so läßt sich $\xi(x)$ mit $x_0 = s_1$ als unterer Grenze folgendermaßen auswerten:

$$(10.1.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{(x-s_1)(x-s_2)} + \\ + k\left[\log\left(2x - 4k + 2\sqrt{(x-s_1)(x-s_2)}\right) - \log 4\sqrt{k^2-m^2}\right] + \\ + \sqrt{m^2}\left[\log\left(\frac{2}{x} - \frac{k}{m^2} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{s_1}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{s_2}\right)}\right) - \log - \frac{\sqrt{k^2-m^2}}{m^2}\right]. \end{cases}$$

Für positiv reelle x und $x \to \infty$ bzw. $x \to 0$ mögen Wurzeln und Logarithmen wie bisher positiv reelle Werte annehmen. $\sqrt{m^2}$ sei der Wert von $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4kx+4m^2}$ an der Stelle $x=0$ bei analytischer Fortsetzung in der — eventuell aufgeschnittenen — oberen Halbebene.

Die transformierte Differentialgleichung hat singuläre Stellen bei $\xi(s_1)=0$ und $\xi(s_2)$. Liegen die Nullstellen getrennt, $k^2 \neq m^2$, so haben diese Singularitäten den Index $\frac{1}{3}$, fallen sie zusammen, so hat die Singularität den Index $\frac{1}{4}$ (vgl. 7.1).

Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. *m reell, $m^2 < k^2$.*
2. *m reell, $m^2 = k^2$.*
3. *m reell, $k^2 < m^2$.*
4. *m imaginär.*

In den Fällen 1. und 2. wollen wir $k>0$ voraussetzen, was wegen (8.2.4) ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist. In den Fällen 3. und 4. ist diese Einschränkung nicht nötig.

Die hier aufgeführten Fälle sind Grenzfälle der in 7.3 bis 7.5 und in 7.9 untersuchten Riemannschen Differentialgleichung. Dies gilt insbesondere auch für die zugehörigen ξ-Polygone; wir werden daher auch dieselbe Einteilung und Numerierung wählen, wobei allerdings statt eines Halbstreifens S_ν ein Quadrant Q_ν und statt eines Rechtecks R_μ ein Halbstreifen S_μ auftreten kann. Auch die im folgenden berechneten Formeln lassen sich größtenteils aus den in § 7 abgeleiteten durch Grenzübergang gewinnen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die im folgenden definierten Lösungen der Whittakerschen Differentialgleichung als Hilfsfunktionen zur asymptotischen Integration der in § 7 transformierten Riemannschen Differentialgleichung herangezogen werden können. Auf diese Weise läßt sich z.B. der Übergang von 7.2 über 7.3 nach 7.4 beherrschen, was mit Hilfe von Bessel-Funktionen als Hilfsfunktionen nicht möglich ist. Der gleiche Zusammenhang besteht übrigens auch zwischen den in § 6 und § 9 behandelten Differentialgleichungen.

10.2. Zur Vereinfachung der Formeln führen wir wieder einige Hilfsgrößen ein. Zunächst sei

$$c_4^{\infty}(k,m) = -k + \frac{k+m}{2}\log(k+m) + \frac{k-m}{2}\log(k-m).$$

$$c_4'^{\infty}(k,m) = -k + \frac{m+k}{2}\log(m+k) - \frac{m-k}{2}\log(m-k).$$

$$c_4^{0}(k,m) = 2m\log 2m - m - \frac{m+k}{2}\log(m+k) - \frac{m-k}{2}\log(m-k).$$

$$c_4'^{0}(k,m) = 2m\log 2m - m - \frac{k+m}{2}\log(k+m) + \frac{k-m}{2}\log(k-m).$$

Die Logarithmen seien wie bisher festgelegt, d.h.

$$|\Im(\log\ldots)| < \pi.$$

Mit diesen Größen bilden wir

$$G_4(k,m) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)}\exp\left[\frac{1}{2}\log 2m + c_4^{\infty}(k,m) - c_4'^{0}(k,m)\right].$$

$$G_4'(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\log 2m - c_4^{\infty}(k,m) - c_4'^{0}(k,m)\right].$$

$$H_4^{\infty}(k,m) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}\,e^{2c_4^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4'^{\infty}(k,m) = \frac{1}{H_4^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4''^{\infty}(k,m) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\,e^{-2c_4'^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4^{0}(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\,e^{-2c_4^{0}(k,m)}.$$

$$H_4'^{0}(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}{2\pi\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}\,e^{-2c_4'^{0}(m,k)}.$$

Den Größen $\chi_{\alpha}^{(i)}$ in 7.2 entsprechen dann die folgenden Ausdrücke:

$$\chi_{\infty}^{(1)}(k) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^{\infty}(k,m)},$$

$$\chi_{0}^{(1)}(k) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{4m^2x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^{0}(k,m)}.$$

Die zugehörigen Ausdrücke $\chi_\alpha^{(2)}(k)$ werden wieder mit $e^{+c_4^\alpha(k,m)}$, die $\chi'^{(i)}_\alpha(k)$ mit $c_4'^\alpha(k,m)$ gebildet.

10.3. m reell, $m^2 < k^2$. Es wird $0<s_2<s_1$ und $\sqrt{m^2} = -m$. Ferner ist $\xi(s_2) = i\pi(k-m)$.

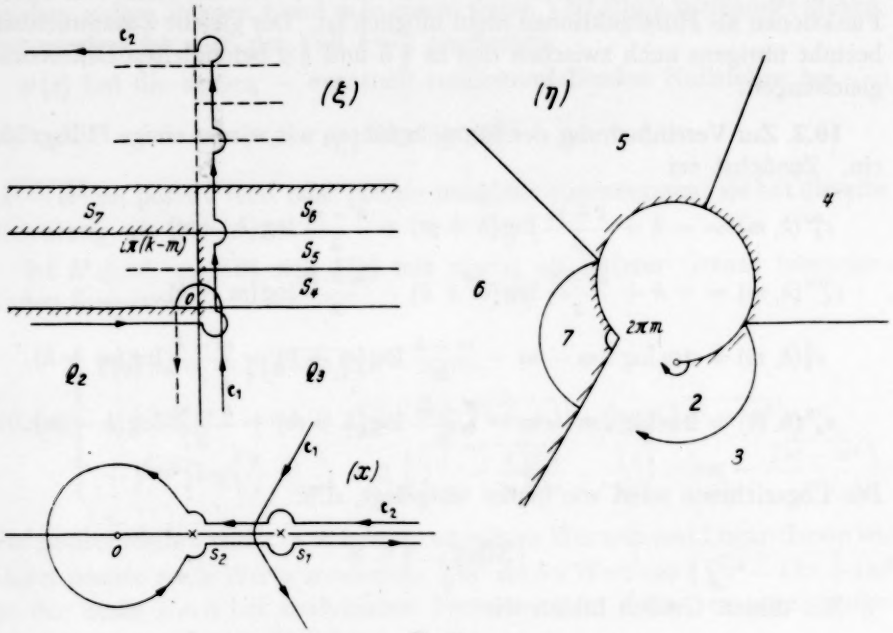

Fig. 20

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.3.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(k)\, W_{k,m}(x) = v_2^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(k)\, W_{-k,m}(-x) = e^{k\pi i} v_2^{(2)}, \\ \chi_0'^{(1)}(k)\, M_{k,m}(x) = v_7^{(1)}, \\ \chi_0'^{(2)}(k)\, M_{k,-m}(x) = v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + v_7^{(1)}\left[\frac{e^{-2\pi i m}}{2H_4'^0(k,m)\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.3.2)\quad \begin{cases} v_6^{(2)}(\xi) = G_4(k,m)\, e^{-(\xi - i\pi(k-m))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(1)}(\xi) = 2i\cos\pi(k-m)\, G_4'(k,m)\, e^{-(\xi - i\pi(k-m))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ \qquad\qquad \text{in } S_i. \end{cases}$$

$$(10.3.3)\quad v_7^{(1)} = e^{-i\pi(k-m)} G_4(k,m)\, v_2^{(1)} - 2i\cos\pi(k-m)\, G_4'(k,m)\, v_2^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(10.3.4)\quad v_3^{(1)} = i\tilde{v}_3^{(2)} v, \quad v_3^{(2)} = i\tilde{v}_3^{(1)} + H_4^\infty(k,m)\,\tilde{v}_3^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(10.3.5)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{2\pi i k}\tilde{v}_2^{(1)} + 2i(\cos 2\pi k + \cos 2\pi m)\, H_4'^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = e^{-2\pi i k}\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

10.4. m reell, $m^2 = k^2$. Alle Formeln von 10.3 bis auf (10.3.4) bleiben gültig. Für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$ gilt:

$$(10.4.1)\quad \begin{cases} v_3^{(1)} = -\tilde{v}_3^{(1)}, \\ v_3^{(2)} = i\,H_4^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_3^{(1)} - \tilde{v}_3^{(2)}. \end{cases}$$

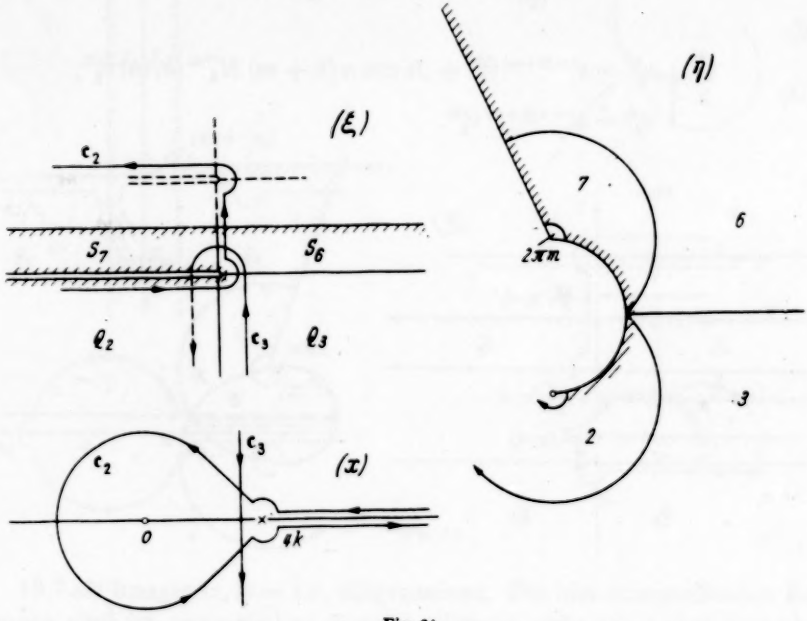

Fig. 21

10.5. m reell, $k^2 < m^2$. s_1 und s_2 sind konjugiert komplex. Die obere x-Halbebene werde zwischen s_1 und der positiv reellen Achse aufgeschnitten, so daß das in Fig. 22 dargestellte ξ-Polygon entsteht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.5.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}^{'(1)}(k)\,W_{k,m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_2^{(1)}, \\ \chi_{\infty}^{'(2)}(k)\,W_{-k,m}(-x) = e^{\frac{i\pi}{2}(m+k)}\,v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(k)\,M_{k,m}(x) = e^{\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(k)\,M_{k,-m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad\qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(1)}\left[\frac{e^{-\pi i m}\cos\pi(m-k)}{H_4^0(k,m)\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.5.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(1)}(\xi) = i\,G_4(-k,m)\,e^{-\xi}\left(1\cdot+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_3^{(2)}(\xi) = G_4(k,m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ \qquad\qquad \text{in } S_7 \text{ und } S_8. \end{cases}$$

$$(10.5.3)\qquad v_7^{(1)} = G_4(k,m)\,v_3^{(1)} - i\,G_4(-k,m)\,v_3^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.5.4)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{i\pi(k+m)}\,\tilde{v}_2^{(1)} + 2i\cos\pi(k+m)\,H_4''^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = e^{-i\pi(k+m)}\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

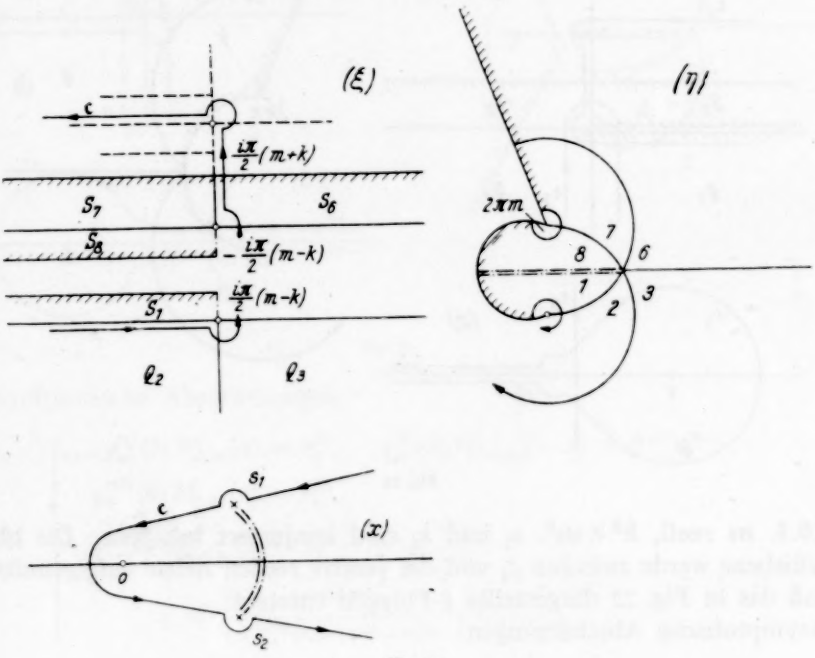

Fig. 22

10.6. m imaginär. Hier ist $s_2<0<s_1$ und $\sqrt{m^2}=m$.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.6.1)\qquad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(k)\,W_{k,m}(x) = v_1^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(k)\,W_{-k,m}(-x) = e^{i\pi k}\,v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(k)\,M_{k,m}(x) = e^{\frac{i\pi}{2}(k-m)}\,v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(2)}(k)\,M_{k,-m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(k-m)}\,v_2^{(1)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$\text{(10.6.2)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = G_4(-k, m)\, v_2^{(1)} + i\, G_4(-k, -m)\, v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -i\, e^{i\pi(m-k)}\, G_4(k, m)\, v_2^{(1)} + G_4(k, -m)\, v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$\text{(10.6.3)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{-2\pi i m}\, H_4^{\infty}(-k, m)\, \tilde{v}_1^{(1)} - i\, e^{2\pi i k}\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -i\, e^{-2\pi i k}\, \tilde{v}_1^{(1)}. \end{cases}$$

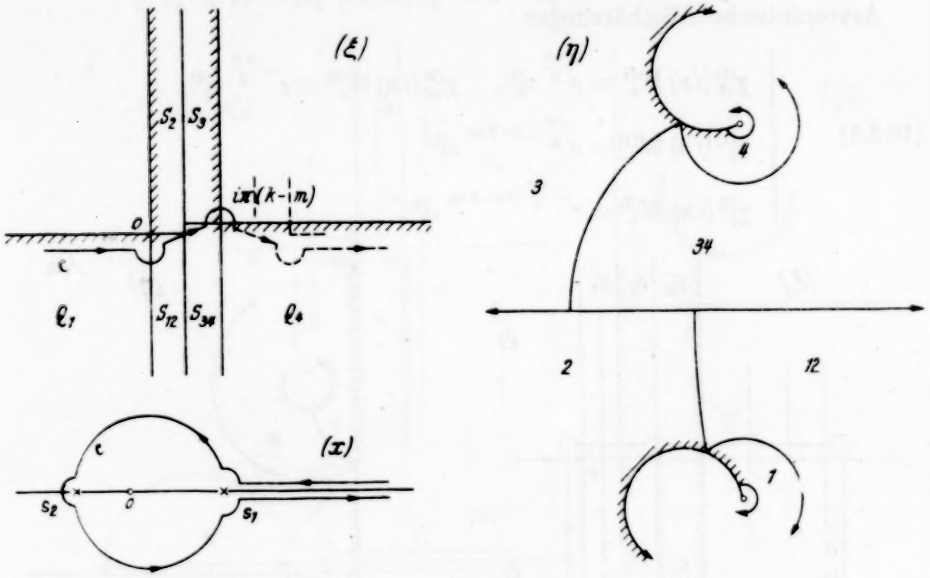

Fig. 23

10.7. k imaginär, $k = i\varkappa$, Allgemeines. Die hier anzustellenden Betrachtungen sind im wesentlichen dieselben wie in 10.1; wir haben nur überall $\varkappa$ statt k und $-m^2$ statt m^2 zu setzen und $\xi(x)$ mit dem Faktor i zu multiplizieren. Dementsprechend sind die zu imaginären k gehörigen ξ-Polygonen dieselben, wie bei reellen k nur um $\pi/2$ gedreht.

Die Nullstellen s_1 und s_2 von $\varphi(x)$ liegen bei

$$x = s_{1,2} = 2\varkappa \pm 2\sqrt{\varkappa^2 + m^2}.$$

Den Fällen 1. bis 4. in 10.1 entsprechen die folgenden Fälle bei imaginärem k:

1. *m imaginär, $|m|^2 < \varkappa^2$.*
2. *m imaginär, $m^2 = -\varkappa^2$.*
3. *m imaginär, $\varkappa^2 < |m|^2$.*
4. *m reell.*

In den Fällen 1. und 2 muß $\varkappa$ positiv reell vorausgesetzt werden, in den Fällen 3. und 4. kann $\varkappa$ wieder beliebig reell sein. Wie in 10.1 sind diese Fälle Grenzfälle von 7.6 bis 7.8 und 7.10.

Die in 10.2 eingeführten $\chi_\alpha^{(i)}(k)$ sind für imaginäre k wie folgt abzuändern:

$$\chi_\infty^{(1)}(i\varkappa) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^\infty(i\varkappa, m)},$$

$$\chi_0^{(1)}(i\varkappa) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{-4m^2x^2}\right] e^{-c_4^0(i\varkappa, m)}.$$

Entsprechend sind die $\chi_\alpha^{(2)}(i\varkappa)$ und $\chi_\alpha'^{(i)}$ zu bilden.

10.8. m imaginär, $|m|^2 < \varkappa^2$.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.8.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(i\varkappa)\, W_+^{(1)} = e^{\frac{\varkappa\pi}{2}} v_2^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(i\varkappa)\, W_+^{(2)} = e^{-\frac{\varkappa\pi}{2}} v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\, M_+^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)} v_7^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\, M_+^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)} v_7^{(2)}. \end{cases}$$

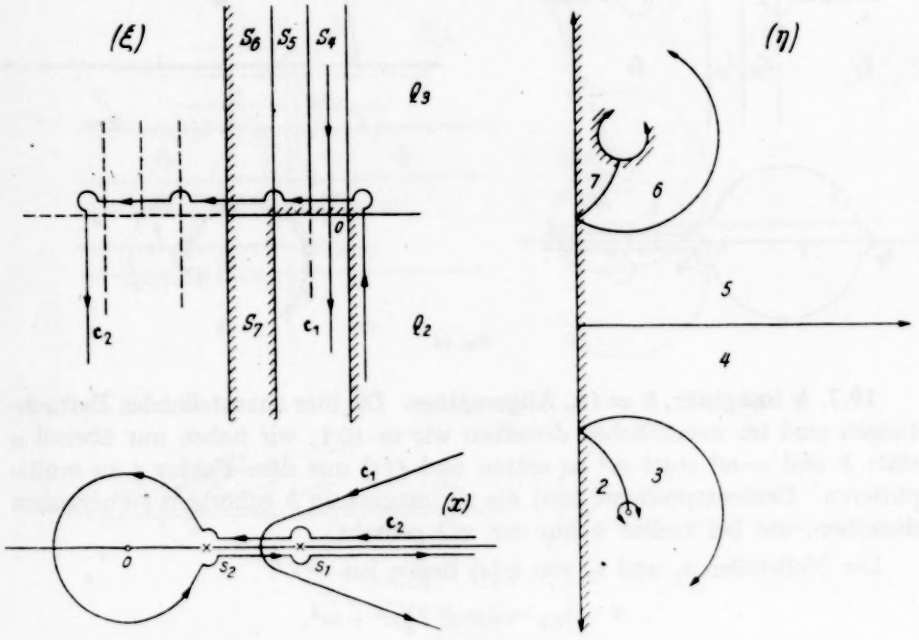

Fig. 24

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = v_3^{(1)} + i\, H_4^\infty(-i\varkappa, m)\, v_3^{(2)}, \quad v_2^{(2)} = v_3^{(2)}. \\ v_2^{(1)} = -e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(-i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + i\, e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(-i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}. \\ v_6^{(1)} = G_4(-i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} - i\, e^{4\pi i m} G_4(-i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\, G_4(i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + G_4(i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(10.8.3)\quad \begin{cases} v_4^{(1)} = H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_4^{(1)} - i\,e^{-2\pi\varkappa}(2\cos 2\pi m + e^{-2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i\,\tilde{v}_4^{(1)} + H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(10.8.4)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = -(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_2^{(1)} + i\,e^{2\pi\varkappa} H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\,e^{2\pi\varkappa} H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_2^{(1)} + e^{2\pi\varkappa}\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

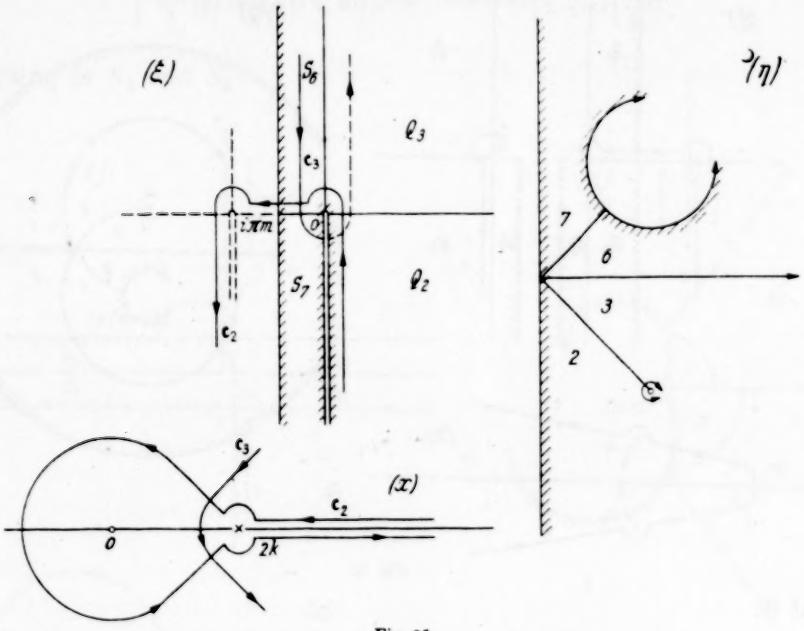

Fig. 25

10.9. m imaginär, $m^2 = -\varkappa^2$. Alle Formeln von 10.8 bis auf (10.8.3) bleiben für diesen Fall gültig. Für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$ gilt:

$$(10.9.1)\quad \begin{cases} v_6^{(1)} = (1 + 2e^{-4\pi\varkappa})\,\tilde{v}_6^{(1)} + i\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_6^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\,H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_6^{(1)} - \tilde{v}_6^{(2)}. \end{cases}$$

10.10. m imaginär, $\varkappa^2 < |m|^2$.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.10.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}^{(1)}(i\varkappa)\,W_+^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_{\infty}^{(2)}(i\varkappa)\,W_+^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)}\,v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\,M_+^{(1)} = e^{\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_7^{(1)}, \qquad \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\,M_+^{(2)} = e^{-\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.10.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = v_3^{(1)} + i\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = v_3^{(2)}. \\ v_6^{(1)} = G_4(-i\varkappa, -m)\,v_7^{(1)} - i\,e^{2\pi i(m+i\varkappa)}\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_7^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\,G_4(i\varkappa, -m)\,v_7^{(1)} + G_4(i\varkappa, m)\,v_7^{(2)}. \end{cases}$$

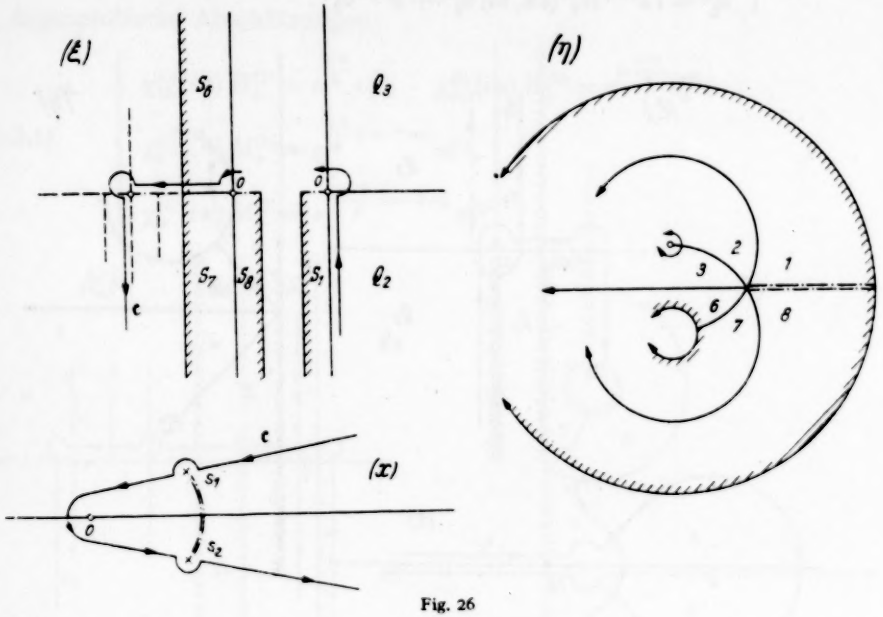

Fig. 26

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.10.3)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = -\,e^{i\pi(m-i\varkappa)}(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad\qquad + i\,e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} = i\,e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(1)} + e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

10.11. m reell. Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.11.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}^{\prime(1)}(i\varkappa)\,W_+^{(1)} = e^{-\frac{i\pi m}{2}}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_{\infty}^{\prime(2)}(i\varkappa)\,W_+^{(2)} = e^{\frac{i\pi m}{2}}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\,M_+^{(1)} = e^{\frac{\varkappa\pi}{2}}\,v_2^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\,M_+^{(2)} = e^{-\frac{\varkappa\pi}{2}}\,v_2^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad\qquad + e^{\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_2^{(1)}\left[\frac{e^{\pi\varkappa} + e^{i\pi(i\varkappa - m)}}{2\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.11.2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = i\,G_4(-i\varkappa, m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = G_4(i\varkappa, m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(1)}(\xi) = -i\,G_4(-i\varkappa, m)\,e^{-(\xi - i\pi(m+i\varkappa))}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = G_4(i\varkappa, m)\,e^{-(\xi - i\pi(m+i\varkappa))}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

alles gültig in S_2 und S_3.

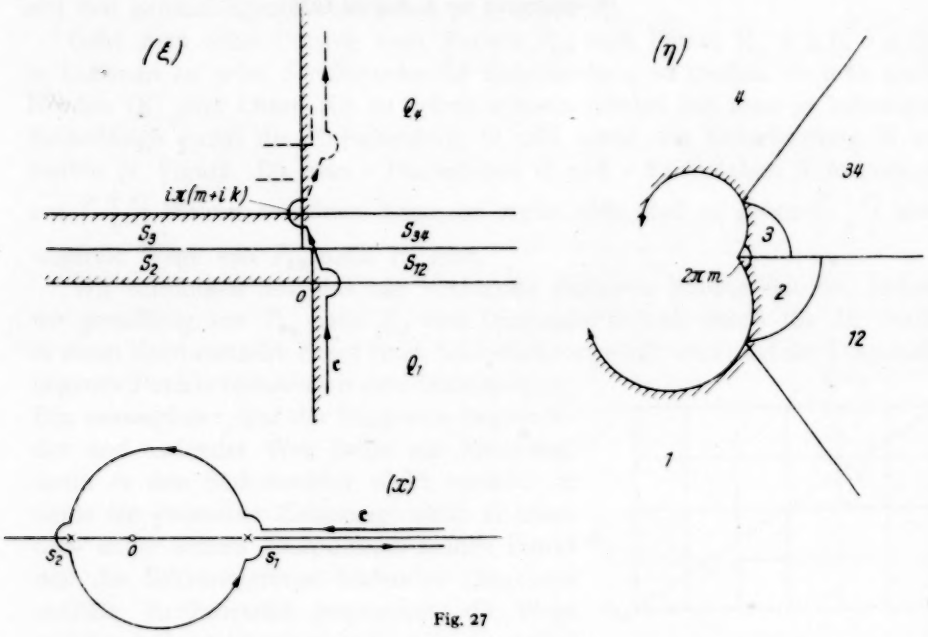

Fig. 27

$$(10.11.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_4(i\varkappa, m)\,v_1^{(1)} - i\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_1^{(2)}; \\ v_3^{(1)} = G_4(i\varkappa, m)\,v_4^{(1)} + i\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(10.11.4)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{i\pi(m+i\varkappa)}\,v_4^{(1)} + 2i\cos\pi(m+i\varkappa)\,H_4''^{\infty}(i\varkappa, m)\,v_4^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.11.5)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = (e^{2\pi\varkappa} + e^{2\pi i m})\,H_4''^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(1)} + i(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -i\,e^{2\pi\varkappa}\tilde{v}_1^{(1)} + (e^{2\pi\varkappa} + e^{2\pi i m})\,H_4''^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

Literatur

[1] BATEMAN, H.: Higher transcendental functions. New York-Toronto-London 1953. — [2] BUCHHOLZ, H.: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [3] KLEIN, F.: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Berlin 1933. — [4] KOPPENFELS, W. v.: Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. **112**, 24—51 (1936). — [5] SCHILLING, F.: Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen *s*-Funktion. Math. Ann. **44**, 161—260 (1894). — [6] STALLMANN, F.: Zum Parameterproblem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Mitt. Math. Seminar Gießen, H. 43, 1952. — [7] STALLMANN, F.: Untersuchung spezieller Funktionen der Potentialtheorie mit Hilfe der konformen Abbildung. Z. angew. Math. Mechan. **34**, 302—303 (1954).

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Johannesstr. 1

(Eingegangen am 3. August 1956)

STÖHR, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 77—81 (1957)

Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Straßennetz

C. L. SIEGEL zum 60. Geburtstag

Von

ALFRED STÖHR

§ 1

In einer Stadt mögen nordsüdlich und westöstlich verlaufende Straßen ein quadratisches Gitter mit der Maschenweite 1 bilden. Die Straßenecke mit den ganzzahligen Koordinaten (r, s) heiße P_{rs}.

Geht man ohne Umweg vom Punkte P_{00} zum Punkt P_{rs} $(r \geqq 0,\ s \geqq 0)$, so hat man an jeder Straßenecke die Entscheidung zu treffen, ob man nach Norden (N) oder Osten (O) zu gehen wünscht; dabei hat man in beliebiger Reihenfolge r-mal die Entscheidung O und s-mal die Entscheidung N zu treffen (s. Figur). Da man r Buchstaben O und s Buchstaben N insgesamt auf $\binom{r+s}{r}$ Weisen anordnen kann, so ergibt sich, daß es genau $\binom{r+s}{r}$ umwegfreie Wege von P_{00} nach P_{rs} gibt.

Wir schränken nun das zur Verfügung stehende Stadtgebiet ein, indem wir geradlinig von P_{00} nach P_{rs} eine Diagonale ziehen, durch die die Stadt in einen Nordwestsektor und einen Südostsektor geteilt wird; auf der Diagonale liegende Punkte rechnen wir zum Südostsektor.

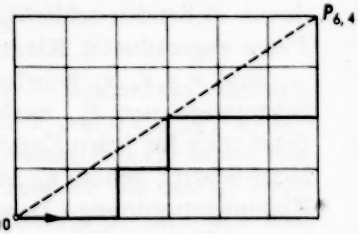

Fig. 1

Ein umwegfreier, auf der Diagonale beginnender und endender Weg heiße ein *Sektorweg*, wenn er den Südostsektor nicht verläßt; er heiße ein *primitiver Sektorweg*, wenn er überdies außer seinen Endpunkten keinen Punkt der die Sektorengrenze bildenden Diagonale enthält. Arithmetisch gesprochen: die Wege sollen nur über Gitterpunkte $P_{\varrho\sigma}$ mit $\varrho s - \sigma r \geqq 0$ bzw. > 0 führen.

Wir fragen nach der Anzahl $b(r, s)$ aller Sektorwege sowie nach der Anzahl $c(r, s)$ aller primitiven Sektorwege, die von P_{00} nach P_{rs} führen. Die Antwort geben wir in Gestalt von Relationen für erzeugende Funktionen. r_0, s_0 seien teilerfremde natürliche Zahlen. Bilden wir dann mit einer Variablen z die Potenzreihen

$$f(z) = f(z|r_0, s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0} z^n,$$

$$g(z) = g(z|r_0, s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n r_0, n s_0)\, z^n,$$

$$h(z) = h(z|r_0, s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n r_0, n s_0)\, z^n,$$

die wegen $0 \leq c(r, s) \leq b(r, s) \leq \binom{r+s}{r}$ jedenfalls für hinreichend kleine positive $|z|$ konvergieren, so werden wir in § 3

$$e^{l(z)} = g(z) = \frac{1}{1 - h(z)} \tag{1}$$

beweisen. Ferner zeigen wir in § 4, daß $g(z)$ eine algebraische Funktion von z ist.

Wir erwähnen noch die Symmetrieeigenschaften

$$\binom{r+s}{r} = \binom{r+s}{s}, \quad b(r, s) = b(s, r), \quad c(r, s) = c(s, r), \tag{2}$$

die man unmittelbar aus Symmetrieeigenschaften unserer Straßennetze ablesen kann. — Die Rechnung in § 4 wird übrigens durchaus unsymmetrisch in r und s sein.

§ 2

Die geschilderte Wegeaufgabe gestattet noch mancherlei andere Einkleidungen. Eine davon betrifft Anordnungen von Klammern.

Zunächst sei $r = s$. Für jeden Ost-Schritt setzen wir eine öffnende Klammer, also (, und für jeden Nord-Schritt setzen wir eine schließende Klammer, also). Beispielsweise ergibt der durch OONONONN gekennzeichnete Weg die Klammernanordnung (()()()). Die Bedeutung der Sektorwege besteht nun darin, daß sie den „sinnvollen Klammeranordnungen" entsprechen, bei denen in gewohnter Weise jede öffnende Klammer eineindeutig einer irgendwo rechts davon stehenden schließenden Klammer so zugeordnet ist, daß sich je zwei Paare zugeordneter Klammern gegenseitig nicht trennen.

Sind r, s, r_0, s_0 beliebige natürliche Zahlen mit $r : s = r_0 : s_0$, so sind die Sektorwege von P_{00} nach P_{rs} durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Setzt man für jeden Ost-Schritt genau s_0 öffnende Klammern und für jeden Nord-Schritt genau r_0 schließende Klammern, so entsteht eine sinnvolle Klammeranordnung. Beispiel: $r = r_0 = 3$, $s = s_0 = 2$; dem durch OONON gekennzeichneten Sektorweg entspricht die sinnvolle Klammeranordnung ((((()))(()))).

§ 3

Von nun an seien die teilerfremden natürlichen Zahlen r_0, s_0 fest gewählt.

Jeder Sektorweg von P_{00} nach $P_{n r_0, n s_0}$ kann offenbar erhalten werden, indem man die Diagonale $P_{00} P_{n r_0, n s_0}$ auf alle möglichen Arten in Abschnitte teilt, die bei irgendwelchen auf der Diagonale liegenden Gitterpunkten beginnen oder enden, und dann Anfangs- und Endpunkt jedes solchen Abschnitts durch einen primitiven Sektorweg verbindet. Die Abzählung aller dabei bestehenden Möglichkeiten liefert die Formel

$$b(n r_0, n s_0) = \sum{}' \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0), \tag{3}$$

wobei sich die Summation $\sum'$ auf alle Systeme natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ erstreckt, die bei beliebigem m der Bedingung $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ genügen. (3) ergibt für die erzeugenden Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ die Relation

$$g(z) = 1 + h(z) + h^2(z) + \cdots = \frac{1}{1-h(z)};$$

das ist ein Teil der Behauptung (1).

Ist W irgendein (umwegfreier) Weg und P ein Gitterpunkt, so sei $W-P$ derjenige Weg, der aus W durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $-\overrightarrow{P_{00}P}$ hervorgeht. Die Gesamtheit der durch Parallelverschiebungen ineinander überführbaren Wege W heiße eine Wegeklasse Ω. Gilt für einen (beiderseits unendlichen) Weg W und eine natürliche Zahl n die Gleichung $W=W-P_{nr_0,ns_0}$, so heiße n eine Periode von W. Im folgenden haben wir es nur mit umwegfreien periodischen Wegen W zu tun. n_0 sei die kleinste natürliche Zahl, die eine Periode von W ist. Da n_0 offenbar nur von der Wegeklasse Ω abhängt, schreiben wir $n_0=n_0(\Omega)$.

Ist Ω eine Wegeklasse mit der kleinsten Periode n_0, ist ferner W ein Weg aus Ω und sind $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ von W aufeinanderfolgend durchlaufene Gitterpunkte, so ist

$$W-P^{(1)}, W-P^{(2)}, \ldots, W-P^{(n_0r_0+n_0s_0)} \tag{4}$$

ein vollständiges System aller voneinander verschiedenen Wege, die zu Ω gehören und durch den Punkt P_{00} gehen. Durchläuft nun Ω alle Wegeklassen, für die $n_0(\Omega)$ ein Teiler von n ist, so erhält man auf diese Weise alle umwegfreien Wege, die von P_{00} nach P_{nr_0,ns_0} gehen. Damit hat man die Relation

$$\sum (r_0+s_0)\, n_0(\Omega) = \binom{nr_0+ns_0}{nr_0}, \tag{5}$$

wobei links über alle Ω mit $n_0(\Omega)/n$ zu summieren ist. — Beschränkt man sich bei den Wegen (4) jedesmal auf das Stück zwischen P_{00} und P_{nr_0,ns_0}, so befindet sich unter ihnen mindestens ein Sektorweg, denn $W-P_{ik}$ leistet das Verlangte, wenn P_{ik} ein solcher auf W gelegener Punkt ist, für den s_0i-r_0k minimal ist. Der erwähnte Sektorweg von P_{00} nach P_{nr_0,ns_0} läßt sich nun wie oben aus primitiven Sektorwegen zusammenstückeln; durch periodisches Wiederholen mit der Periode n erhält man aus dem Sektorweg wieder einen unendlichen Weg, der zur Klasse Ω gehört. Das Wegstück zwischen P_{00} und P_{nr_0,ns_0} sei dabei aus genau m primitiven Sektorwegen zusammengestückelt. Wir permutieren nun diese m primitiven Sektorwege zyklisch auf alle m möglichen Arten, stückeln sie in dieser zyklisch permutierten Reihenfolge zusammen und ergänzen die erhaltenen, die Punkte P_{00} und P_{nr_0,ns_0} verbindenden Wege zu periodischen Wegen mit der Periode n. Alle so erhaltenen Wege gehören der gleichen Wegeklasse Ω an; es befinden sich unter ihnen genau $\frac{mn}{n_0(\Omega)}$ verschiedene Wege. Das liefert die Abzählung

$$\sum{}' \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0) = \sum \frac{n_0(\Omega)}{n}$$

[dabei ist die Summationsbedingung bei $\sum'$ dieselbe wie in (3) und bei $\sum$ dieselbe wie in (5)]. Wegen (5) ist also

$$\sum{}' \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0) = \frac{1}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0}.$$

Geht man zu den erzeugenden Funktionen über, so bedeutet dies

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} h^m(z) = f(z),$$

also

$$f(z) = \log \frac{1}{1 - h(z)}.$$

Damit ist (1) vollständig bewiesen.

§ 4

In diesem Paragraphen bedeutet $\oint$ stets, daß die jeweils genannte Integrationsvariable den Nullpunkt der komplexen Ebene einmal im positiven Sinne umkreist.

Nach Definition ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0} z^n,$$

also

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r_0}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0} z^{n-1} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n r_0 + n s_0 - 1}{n r_0 - 1} z^{n-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{r_0} \binom{n r_0 + n s_0 - 1}{n r_0 - 1}. \tag{6}$$

Wir setzen

$$z = \frac{\eta^{r_0}}{(1+\eta)^{r_0 + s_0}}.$$

Durch diese Gleichung wird η als algebraische Funktion von z definiert. In der Umgebung von $z = 0$ gibt es r_0 Zweige dieser algebraischen Funktion, auf denen η zugleich mit z gegen 0 strebt; diese Zweige $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{r_0}$ hängen an der Stelle $z = 0$ in einem Verzweigungspunkt zusammen. Wir setzen noch (mit dem Hauptwert des Logarithmus)

$$v = \frac{1}{r_0} \sum_{\varrho=1}^{r_0} \log(1 + \eta_\varrho).$$

In der Umgebung des Nullpunkts ist v eine eindeutige Funktion von z, während die η_ϱ eindeutige Funktionen der durch $z = \zeta^{r_0}$ definierten Ortsuniformisierenden ζ sind. r_0-maliges Umkreisen des Nullpunkts durch z bedeutet einmaliges Umkreisen des Nullpunkts durch ζ; dieses wiederum bedeutet einmaliges

Umkreisen des Nullpunkts durch jedes der η_ϱ; also ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dv}{dz}\frac{dz}{z^n} &= \frac{1}{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dv}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z^n}\\ &= \frac{1}{r_0^2}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d}{d\zeta}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\log(1+\eta_\varrho)\frac{d\zeta}{z^n}\\ &= \frac{1}{r_0^2}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{1+\eta_\varrho}\frac{d\eta_\varrho}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z^n}\\ &= \frac{1}{r_0^2}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{(1+\eta_\varrho)^{r_0+s_0}}{\eta_\varrho^{r_0}}\right)^n\frac{d\eta_\varrho}{1+\eta_\varrho}\\ &= \frac{1}{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint (1+\eta)^{nr_0+ns_0-1}\frac{d\eta}{\eta^{nr_0}}\\ &= \frac{1}{r_0}\binom{nr_0+ns_0-1}{nr_0-1}.\end{aligned}$$

Da eine reguläre Funktion von z durch ihre Potenzreihenentwicklung eindeutig bestimmt ist, folgt durch Vergleich mit (6)

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{dv}{dz},$$

und da sowohl $f(z)$ als auch v für $z=0$ verschwindet, folgt $f(z)=v$. Die Relation (1) ergibt nun

$$g(z) = e^{f(z)} = \exp\left\{\frac{1}{r_0}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\log(1+\eta_\varrho)\right\},$$

also

$$g(z) = \prod_{\varrho=1}^{r_0}(1+\eta_\varrho)^{\frac{1}{r_0}}.$$

Da die η_ϱ algebraische Funktionen von z sind, gilt dasselbe für $g(z)$.

Wir betrachten noch den Spezialfall $r_0=1$. Die Formeln werden dann besonders einfach, nämlich $g(z)=1+\eta$ mit $z=\frac{\eta}{(1+\eta)^{1+s_0}}$. Wegen

$$\frac{dg(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,b(n, ns_0)\,z^{n-1}$$

liefert das die Beziehung

$$\begin{aligned}n\,b(n, ns_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dg}{z^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{(1+\eta)^{1+s_0}}{\eta}\right)^n d\eta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint (1+\eta)^{n+ns_0}\frac{d\eta}{\eta^n} = \binom{n+ns_0}{n-1},\end{aligned}$$

also

$$b(n, ns_0) = \frac{1}{n}\binom{n+ns_0}{n-1} = \frac{1}{1+ns_0}\binom{n+ns_0}{n}.$$

Göttingen, Bunsenstr. 3/5

(Eingegangen am 21. Januar 1957)

ATKINSON, F. V.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 82—99 (1957)

Estimation of an Eigen-Value Occurring in a Stability Problem

By
F. V. ATKINSON

1. Introduction

It is well-known that the differential equation

$$y'' = -\lambda p(x)\, y, \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.1}$$

in which $p(x)$ is real, suitably continuous and of period 2π, has at least one solution such that $y(x+2\pi)/y(x) = \text{const} = \varrho$ (say) (see e.g. BIEBERBACH [1], § 11.2). The case in which $|\varrho| = 1$ is of especial interest in view of the implication that y is bounded as $x \to \pm\infty$. This paper deals with the eigen-value problem in which for given ϱ with $|\varrho| = 1$, λ is to be found.

Making the conventional restrictions

$$\int_0^{2\pi} p(x)\, dx \geqq 0, \quad p(x) \not\equiv 0, \tag{1.2}$$

and putting $\varrho = \exp(2\pi i\mu)$ we can assert that for given real μ there will be an infinity of positive λ-values $\lambda_r(\mu)$ for which (1.1) has a non-trivial solution satisfying

$$y(x + 2\pi) = \exp(2\pi i\mu)\, y(x). \tag{1.3}$$

The aim of this paper is to establish bounds for $\lambda_1(\mu)$, the smallest such positive eigen-value. Known information includes lower bounds for $\lambda_1(\mu)$, particularly for the case $\mu = \frac{1}{2}$ and for the cases of non-negative $p(x)$ and odd $p(x)$. Here I extend these lower bounds, and supplement them with upper bounds, with a view to ascertaining the actual order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$.

The $\lambda_1(\mu)$, especially in the cases $\mu = 0, \frac{1}{2}$, have a known connection with the location of "stability-zones" on the real λ-axis, within which the solutions of (1.1) are all bounded (LYAPUNOV [2]). In particular, the $\lambda_1(\mu)$ for $0 < \mu < \frac{1}{2}$ constitute the first stability zone in the positive λ-axis. The interest attaching to questions of stability has led to estimates of $\lambda_1(\mu)$ being partly obscured n the form of stability criteria. Denoting by Λ the largest number such that (1.1) has only bounded solutions for $0 < \lambda < \Lambda$, it is known that $0 < \lambda_1(\frac{1}{2}) \leqq \Lambda$. Thus any lower bound for $\lambda_1(\frac{1}{2})$ is also one for Λ, and thus yields a stability criterion. However many known stability criteria are valid also in the stronger sense of providing lower bounds for $\lambda_1(\frac{1}{2})$. So far as lower bounds are concerned, there is thus a gain in logical precision in expressing these results as bounds for $\lambda_1(\frac{1}{2})$ rather than as bounds for Λ. So far as upper bounds are

concerned, it seems that it is only $\lambda_1(\frac{1}{2})$ that we can expect to bound; the difficulty of bounding Λ from above arises from the possibility of separate stability-zones joining up under continuous variation of $p(x)$; an extreme example is given by $p(x) \equiv 1$, in which $\Lambda = \infty$.

The theory of (1.1) with periodic $p(x)$ has been largely developed by the methods of FLOQUET and STURM and, particularly by LYAPUNOV, by the use of power-series in λ. Here I revert to HILL's method of reduction to an infinite system of linear equations. This has the advantage that one can treat in place of (1.1) the more general equation

$$d^{2k} y / dx^{2k} = (-)^k \lambda p(x) y, \tag{1.4}$$

without additional difficulty; this will accordingly be done here. It would also be possible to treat the extension in which y and p denote vectors and matrices, but here I confine myself to the ordinary case.

2. Precision of estimates for $\lambda_1(\mu)$

We seek bounds of the form

$$F(p, \mu) \leq \lambda_1(\mu) \leq G(p, \mu), \tag{2.1–2}$$

where the functionals F, G will in fact be expressed in terms of the Fourier coefficients of $p(x)$, and $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. The most common way in which such estimates are "precise" or "best possible" is that they should not admit of improvement by constant factors, i.e. (2.1–2) should become false for some $p(x)$ if F and G are multiplied by numbers greater than and less than unity, respectively.

To some extent it is however possible to find bounds of this form satisfying further requirements, such as:

(i) the bounds should fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$, that is to say the ratio $G(p, \mu)/F(p, \mu)$ should have an upper bound independent of $p(x)$, and possibly of k and μ also,

(ii) the bounds should fix the asymptotic behaviour of $\lambda_1(\mu)$ for small μ, i.e. they should imply a formula

$$\lambda_1(\mu) \sim H(p, \mu) \tag{2.3}$$

as $\mu \to 0$,

(iii) for each of the bounds (2.1–2) there should be one case, and if possible two distinct cases, of functions $p(x)$ for which the bounds are precise.

The main cases of special $p(x)$ relevant to (iii) are

(a) the case $p(x) \equiv 1$, and

(b) the case in which $p(x)$ is a periodic "impulse-function", defined formally by $p(x)\,dx = d\sigma(x)$, where $\sigma(x)$ is a step-function with unit jumps where x is a multiple of 2π. There are two ways of utilising case (b) for the study of the bounds (2.1–2). We may treat the impulse-function as a limiting case of a sequence of continuous functions, so as to produce a limiting ratio of

unity in (2.1) or (2.2), or both. Alternatively, we may generalise (1.4) to an integral equation, in which the place of $p(x)$ is taken by its integral, iterated if necessary.

The latter aspect ties up with the question of the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. In trying to generalise the theory beyond the domain of continuous $p(x)$, it is natural to admit for $p(x)$, if possible, any of the class of functions for which the functional, giving the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$, is finite. It turns out that this entails an extension from the set of continuous $p(x)$ to the set of $p(x)$ which have a k-th iterated integral belonging to $L^2(0, 2\pi)$, and so beyond such cases as impulse-functions. At the end of this paper I indicate a possible version of the integral equation generalising (1.4).

3. LYAPUNOV'S results, and certain extensions

The earliest examples of bounds of the form (2.1) were given by LYAPUNOV, for the case $k=1$ and $\mu=\frac{1}{2}$. Strictly speaking, these were given as stability criteria, but hold in the present, stronger sense.

The best-known result deals with the case of non-negative $p(x)$, and asserts that

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}) \geq \left\{\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} p(x)\, dx\right\}^{-1}; \tag{3.1}$$

proofs, formulated for the stability interpretation, are given in the recent texts of BIEBERBACH ([1], § 11.3) and BELLMAN ([3], pp. 123–125). That the constant $\frac{1}{2}\pi$ on the right cannot be improved was shown by WINTNER and VAN KAMPEN [4].

Certain extensions are possible to the case in which $p(x)$ may take both signs, still satisfying (1.2). In this case we may replace $p(x)$ on the right of (3.1) by $|p(x)|$ (BORG [5]), or (better) by $\frac{1}{2}\{p(x)+|p(x)|\}$ (KREĬN [6]); in the latter work KREĬN also gives still sharper criteria, postulating a knowledge of $\max|p(x)|$. HARTMAN and WINTNER [7] have shown that the expression on the right of (3.1) is but one of a variety of possible functionals, for each of which a best possible constant factor can be specified; their result is formulated as an oscillation criterion.

Another result of LYAPUNOV [8], for the case of odd $p(x)$, has received less attention. This states that

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}) \geq \left\{\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} (P(x))^2\, dx\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

where $P(x)$ is that integral of $p(x)$ which has zero mean-value over a period. Again, the constant $\frac{1}{2}\pi$ on the right cannot be improved.

In this paper it will be shown that both these results are correct as regards order of magnitude, for the special cases of non-negative $p(x)$ and odd $p(x)$. For the case of general $p(x)$, the expression for the order of magnitude of resembles (3.2) rather than (3.1).

4. Results for the case $p(x) \geq 0$

For this case, and for general integral $k \geq 1$, we have.

Theorem 1. *Let $p(x)$ be continuous and real-valued, non-negative and not identically zero Let its complex Fourier expansion be*

$$p(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} p_n e^{nix}. \tag{4.1}$$

Then $\lambda_1(\mu)$, the least positive λ for which (1.4) *has a non-trivial solution satisfying* (1.3), *has, for $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, the bounds*

$$p_0^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r+\mu)^{-2k} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r+\mu)^{-2k} (s+\mu)^{-2k}}. \tag{4.2-3}$$

Less precisely,

$$p_0 \mu^{-2k} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq p_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (r+\mu)^{-2k}. \tag{4.4-5}$$

Before proving Theorem 1, I deduce (4.4–5) from (4.2–3), and discuss the precision of these results.

The deduction of (4.4) from (4.2) is trivial, $p_0 \mu^{-2k}$ being merely one of the terms on the right of (4.2). We get (4.5) from (4.3) by replacing all the $|p_n|$ by p_0; this is legitimate since

$$|p_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} p(x)\, e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x)\, dx = p_0 \tag{4.6}$$

for non-negative $p(x)$.

The result (4.4) and hence also (4.2), is precise in the case $p(x) = \text{const} > 0$. Actually (4.2) is precise in a distinct case also, that of the periodic "impulse-function", discussed in § 2, obtained formally by putting $p_n = 1$ for all n; in this case the lower and upper bounds (4.2), (4.5) clearly become the same. To reach this result in a limiting sense, confining ourselves to continuous $p(x)$, we may for example make $p(x)$ run through the sequence of non-negative trigonometric polynomials $N^{-1} \sin^2 \frac{1}{2} N x \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} x$ $(N = 1, 2, \ldots)$. The case of the periodic impulse-function also makes (4.3) precise.

Passing to the two other notions of precision referred to in § 2, it is clear that (4.4–5) imply that as $\mu \to 0$ through positive values

$$\lambda_1(\mu) \sim \mu^{2k} p_0^{-1} \tag{4.7}$$

and further that (4.4–5) fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. The ratio of the two bounds in (4.4–5) lies between 1 and $\frac{1}{4}\pi^2$.

The LYAPUNOV result (3.1) is included in (4.5), as may be verified on putting $k = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$.

The conditions of Theorem 1 can be slightly weakened, in as much as (4.3–4) hold if $p(x)$ satisfies (1.2), without being restricted to be non-negative. However these two results do not suffice to fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$.

I pass to the proof of Theorem 1, which falls into three stages, the reduction to a set of linear equations, the estimation of eigen-values of such equations, and the estimation of some elementary sums.

5. Reduction to a system of linear equations

This is accomplished by

Lemma 1. *The number $\lambda_1(\mu)$, defined for $0<\mu\leq\frac{1}{2}$ as the smallest positive λ for which* (1.4) *has a non-trivial solution satisfying* (1.3), *is also the smallest positive λ for which the system of equations*

$$(5.1)\quad a_m = \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{m-n} a_n (m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k}, \qquad (m = \cdots, -1, 0, 1, \ldots),$$

has a non-trivial solution $\{a_m\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfying

$$(5.2)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty.$$

Here the p_r are the complex Fourier coefficients given by (4.1) *of $p(x)$, assumed continuous and satisfying* (1.2).

Assume first that y is a non-trivial solution of (1.4) satisfying (1.3), and put

$$(5.3)\qquad z = d^k y/dx^k = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{ix(m+\mu)};$$

since z is continuously differentiable k times the a_m will satisfy (5.2). Substituting in (1.4) we have, formally,

$$(5.4)\quad \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (im + i\mu)^k e^{ix(m+\mu)} = (-)^k \lambda \sum_{-\infty}^{\infty} p_r e^{irx} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (in + i\mu)^{-k} e^{ix(n+\mu)}.$$

Here the series on the left and the first series on the right will certainly exist in the L^2-sense, while the remaining series is absolutely convergent. The process of comparing coefficients is then easily justified, and we deduce that we have a solution of (5.1) satisfying (5.2).

Assume conversely that we have a non-trivial solution of (5.1) satisfying (5.2). Applying the Cauchy inequality to (5.1) and summing over m we have

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_m|^2 (m+\mu)^{2k} \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 (n+\mu)^{-2k} < \infty.$$

Thus the series on the left of (5.4) exists in the L^2-sense, while those on the right represent continuous functions. Hence it is easy to show that the two series on the right may be multiplied out and arranged in powers of e^{ix}, the result being identified with the series on the left in view of (5.1). Thus, defining y as equal to the series on the extreme right of (5.4), we derive a non-trivial solution of (1.4) satisfying (1.3).

Thus the two eigen-value problems have the same spectra, and the lemma is proved. The requirement (1.2) serves to ensure the existence of $\lambda_1(\mu)$.

6. Properties of infinite matrices

In this section I replace (5.1) by the system

$$a_m = \lambda \sum_n c_{mn} a_n, \tag{6.1}$$

summations being over $(-\infty, \infty)$ except where otherwise indicated. We write this in the form

$$\vartheta = \lambda C \vartheta \tag{6.2}$$

considering this as a linear equation in the HILBERT space T of sequences $\vartheta = \{a_m\}$ satisfying (5.2), the inner product being of course given by

$$(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}) = \sum a_m^{(1)} \overline{a_m^{(2)}}. \tag{6.3}$$

It will be sufficient to consider the case in which

$$\sum\sum |c_{mn}|^2 < \infty, \tag{6.4}$$

and in which C has Hermitean symmetry

$$c_{rs} = \overline{c_{sr}}. \tag{6.5}$$

We note first

Lemma 2. *If C satisfies* (6.4), *then it is a bounded operator on T into T, being in fact completely continuous.*

Writing $\vartheta = \{a_m\}$, $\varphi = C\vartheta = \{b_m\}$, an application of the CAUCHY inequality shows that

$$\sum |b_m|^2 \leq \{\sum\sum |c_{mn}|^2\}\{\sum |a_m|^2\} \tag{6.6}$$

which proves the first part of the lemma.

To show that C is completely continuous, let $\vartheta_r = \{a_m^{(r)}\}$, $r = 1, 2, \ldots$, be a sequence of elements of T with $\|\vartheta_r\| = 1$, and let $\varphi_r = \{b_m^{(r)}\}$ be given by $\varphi_r = C\vartheta_r$. It follows from (6.6) that all the $|b_m^{(r)}|$ have a common upper bound, so that, for any fixed m, any infinite subsequence of the $b_m^{(r)}$ will be compact. Hence, by the diagonal process, one can find a subsequence S of r-values such that for every m, the sequence $b_m^{(r)}$ converges as $r \to \infty$, $r \in S$. To show that the sequence φ_r, $r \in S$, converges we observe that

$$\|\varphi_{r'} - \varphi_{r''}\|^2 = \sum |b_n^{(r')} - b_n^{(r'')}|^2 \leq \sum_{|n| \leq N} |b_n^{(r')} - b_n^{(r'')}|^2 + 2 \sum_{|n| > N} \{|b_n^{(r')}|^2 + |b_n^{(r'')}|^2\}. \tag{6.7}$$

Now for any $\varepsilon > 0$ the last sum can be made less than $\frac{1}{3}\varepsilon$ by choosing N large, since [cf. (6.6)]

$$\sum_{|n| > N} |b_n^{(r)}|^2 \leq \left\{\sum_{|m| > N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{mn}|^2\right\}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right\}.$$

Having chosen N in this way, the first sum on the right of (6.7) can be made less than $\frac{1}{3}\varepsilon$ by choosing $r', r'' \in S$ sufficiently large. Hence the sequence φ_r, $r \in S$, satisfies the Cauchy convergence criterion, and therefore converges in T since T is complete. This completes the proof of Lemma 2.

We deduce that if (6.4) holds, then C has a discrete set of eigen-values, for which (6.2) has a non-trivial solution. If in addition (6.5) holds, these eigen-values will be all real. I denote them by λ_r, numbered so that

$$\cdots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \tag{6.8}$$

each corresponding to a distinct eigen-vector. I denote the latter by η_r, supposed normalised, and also orthogonalised in the case of coincident λ_r. I note that λ_1, the quantity of interest for the present purpose, will certainly exist if

$$c_{rr} \geq 0 \text{ for all } r, \quad \sum\sum |c_{rs}|^2 > 0, \tag{6.9–10}$$

which conditions are guaranteed by (1.2).

To estimate λ_1 from below we use

Lemma 3. *Let C satisfy* (6.4–5). *Then*

$$\sum \lambda_r^{-2} = \sum\sum |c_{rs}|^2. \tag{6.11}$$

Let ζ_r, $(r = \cdots, -1, 0, 1, \ldots)$, be the element $\{a_m\}$ of T given by $a_r = 1$, $a_m = 0$ for $m \neq r$. Since C is self-adjoint and completely continuous we have the eigen-vector expansion

$$C\zeta_r = \sum_s (C\zeta_r, \eta_s)\eta_r = \sum_s (\zeta_r, C\eta_s)\eta_s = \sum_s \lambda_s^{-1}(\zeta_r, \eta_s)\eta_s, \tag{6.12}$$

and so

$$(C\zeta_r, C\zeta_r) = \sum_s \lambda_s^{-2} |(\zeta_r, \eta_s)|^2$$

or, evaluating the left-hand side,

$$\sum_m |c_{mr}|^2 = \sum_s \lambda_s^{-2} |(\zeta_r, \eta_s)|^2.$$

The result now follows on summing with respect to r; we have, of course,

$$\sum_r |(\zeta_r, \eta_s)|^2 = 1$$

since the ζ_r form a complete orthonormal system.

As lower bounds for λ_1 we have

Lemma 4. *Let C satisfy* (6.4–5), *and also* (6.9–10). *Then*

$$\lambda_1^{-1} \leq \sqrt{\sum\sum |c_{rs}|^2}. \tag{6.13}$$

In particular, if $C \geq 0$, then

$$\lambda_1^{-1} \leq \sum c_{rr}. \tag{6.14}$$

The bound (6.13) follows immediately from Lemma 3; the hypotheses (6.9–10) serve merely to ensure the existence of λ_1.

In the case $C \geq 0$, we have $|c_{rs}|^2 \leq c_{rr}c_{ss}$, and inserting this on the right of (6.13) we get (6.14).

The bound (6.13) is well-known in the case of finite matrices, and could have been derived more simply by use of (6.6). The sharper result (6.11)

will be needed for the case of odd $p(x)$. The bound (6.14) could have been deduced from the ordinary trace-property

$$\sum \lambda_r^{-1} = \sum c_{rr} \tag{6.15}$$

which is certainly valid if $C \geq 0$ and $\sum c_{rr}$ is finite, and may be proved in the same way as (6.11).

As upper bounds for λ_1 we have

Lemma 5. *Let C satisfy* (6.4–5). *If $c_{00} > 0$, then*

$$\lambda_1^{-1} \geq c_{00}. \tag{6.16}$$

If $c_{00} > 0$, $C \geq 0$, then

$$\lambda_1^{-1} \geq c_{00}^{-1} \sum_r |c_{r0}|^2. \tag{6.17}$$

Since the η_s are an orthonormal system we have, by the BESSEL inequality,

$$(\zeta_0, \zeta_0) \geq \sum_s |(\zeta_0, \eta_s)|^2.$$

Also, by (6.12),

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = \sum_s \lambda_s^{-1} |(\zeta_0, \eta_s)|^2$$

so that

$$(C\zeta_0, \zeta_0) \leq \lambda_1^{-1} \sum |(\zeta_0, \eta_s)|^2 \leq \lambda_1^{-1} (\zeta_0, \zeta_0).$$

Since $(C\zeta_0, \zeta_0) = c_{00}$, $(\zeta_0, \zeta_0) = 1$, (6.16) follows.

If $C \geq 0$, there are no negative λ_r, and so

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = \sum_1^\infty \lambda_s^{-1} |(\zeta_0, \eta_s)|^2, \qquad (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum_1^\infty \lambda_s^{-2} |(\zeta_0, \eta_s)|^2,$$

whence $(C\zeta_0, C\zeta_0) \leq \lambda_1^{-1} (C\zeta_0, \zeta_0)$. The result (6.17) now follows since

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = c_{00}, \qquad (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum |c_{r0}|^2.$$

I conclude this section with sufficient conditions for some of the above bounds to be precise.

Lemma 6. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let $\lambda_1 > 0$ exist. Then for equality to hold in* (6.13) *it is necessary and sufficient that C should have the form $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$. With the additional assumption that $C \geq 0$, the same conditions are necessary and sufficient for equality in* (6.14).

Assume that (6.4–5) hold, that $\lambda_1 > 0$ exists and that equality holds in (6.13). It follows by Lemma 3 that λ_1 is the only eigen-value of (6.2), and so that C is one-dimensional. Hence the rows of C are mutually proportional. There must be at least one element on the leading diagonal which is non-zero; without loss of generality we may assume this to be c_{00}. We must then have $c_{00} > 0$; if $c_{00} < 0$ there would be at least one negative eigen-value, since the form $(C\vartheta, \vartheta)$ would then be capable of negative values, and this is impossible.

We then have, since the rows of C are proportional, $c_{rs}/c_{0s}=c_{r0}/c_{00}$, which gives the required representation with $d_r=c_{r0}\,c_{00}^{-\frac{1}{2}}$.

Conversely, if C satisfies (6.4–5), $\lambda_1>0$ exists and $c_{rs}=d_r\bar{d}_s$, it is readily found that (6.1) has the unique eigen-value

$$\lambda_1=\{\sum|d_r|^2\}^{-1}=\{\sum\sum|c_{rs}|^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

If we assume that (6.4–5) hold, that $\lambda_1>0$ exists and that $C\geq 0$, then precision in (6.14) will imply precision in (6.13), and we deduce that $c_{rs}=d_r\bar{d}_s$, as before. This could have been deduced from (6.15) also.

Conversely, we need only observe that the form $c_{rs}=d_r\bar{d}_s$ makes the bounds (6.13–14) identical.

Lemma 7. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let $c_{00}>0$. Then for* (6.16) *to be precise it is necessary that $c_{r0}=0$ for $r\neq 0$, and sufficient that $c_{rs}=0$ for $r\neq s$ with $c_{rr}\leq c_{00}$ for $r\neq 0$.*

It is clear that if $C\geq 0$, so that (6.17) holds, then (6.16) can be precise only if $c_{r0}=0$ for $r\neq 0$. The necessity of this condition, without the assumption that $C\geq 0$, follows from a later result (Lemma 11).

The sufficiency of the conditions stated in the Lemma is obvious; in the application in question, these are the same as the necessary conditions.

7. Some elementary sums

In connection with the matrix implied in (5.1) we need.

Lemma 8. *For integral $r\neq 0$, $0<\mu\leq\frac{1}{2}$, we have*

$$(7.1)\qquad \sum_{s=-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}\leq\tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\}.$$

We use the partial fraction representation

$$(7.2)\qquad x^{-2k}(x+r)^{-2k}=\sum_{l=0}^{2k-1}\binom{-2k}{l}r^{-2k-l}\{x^{l-2k}+(-)^l(x+r)^{l-2k}\};$$

the coefficients on the right may be found by considering expansions near $x=0$ and $x=-r$. Putting $x=s+\mu$ in (7.2) and summing over s we get

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}=2\sum_{m=0}^{k-1}\binom{-2k}{2m}r^{-2k-2m}\sum_{-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{2m-2k},$$

the terms involving odd negative exponents cancelling out. Since

$$\mu^2(s+\mu)^{-2}\leq 1$$

for $0<\mu\leq\frac{1}{2}$ we have, for $0\leq m\leq k-1$,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{2m-2k}=\mu^{2m-2k}\sum_{-\infty}^{\infty}\{\mu/(s+\mu)\}^{2k-2m}\leq\mu^{2m-2k}\sum_{-\infty}^{\infty}\{\mu/(s+\mu)\}^2$$
$$=\mu^{2m-2k}(\pi\mu\operatorname{cosec}\pi\mu)^2\leq\tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{2m-2k}.$$

Hence

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k} \leq \frac{1}{2}\pi^2 \sum_{m=0}^{k-1}\binom{-2k}{2m} r^{-2k-2m}\mu^{2m-2k} <$$

$$< \frac{1}{2}\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-2k}{2m} r^{-2k-2m}\mu^{2m-2k}$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\},$$

which proves (7.1).

In the special case $k=1$ we have the more precise result,

Lemma 9. *For integral* $r \neq 0$, $0<\mu\leq\frac{1}{2}$,

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2}(r+s+\mu)^{-2} = 2\pi^2 r^{-2}\operatorname{cosec}^2\pi\mu. \tag{7.3}$$

This may be proved, as Lemma 8, by putting the expressions on the left into partial fractions.

8. Deduction of Theorem 1

We have merely to justify applying to the system of equations the results of § 6. We assumed throughout that (6.4–5) held when estimating λ_1. As regards (6.5), this applies to the case

$$c_{mn} = p_{m-n}(m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k} \tag{8.1}$$

since $p_r = \bar{p}_{-r}$, $p(x)$ being a real-valued function. As regards (6.4) we have

$$\sum\sum|c_{mn}|^2 = \sum\sum|p_{m-n}|^2(m+\mu)^{-2k}(n+\mu)^{-2k}$$

$$= \sum_r |p_r|^2 \sum_s (s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}$$

$$\leq p_0^2\sum(s+\mu)^{-4k} + \tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\sum|p_r|^2\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\},$$

and the right-hand side is finite, at any rate for continuous $p(x)$, since the p_r are then bounded. The requirement $C \geq 0$ is fulfilled if $p(x)$ is non-negative; for if $\vartheta = \{a_m\}$ denotes an element of T, then

$$(C\vartheta,\vartheta) = \sum\sum p_{m-n}a_m\bar{a}_n(m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k}$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} p(x)\,|\sum a_m(m+\mu)^{-k}\exp(i\,m\,x)|^2\,dx,$$

which is non-negative if $p(x)$ is so.

Of the assertions of Theorem 1, (4.3) and (4.5) follow directly from (6.13–14), while (4.2), (4.4) follow from (6.16–17).

The precision of (4.3), (4.5) is governed by Lemma 6. For comparing the representation $c_{rs} = d_r\bar{d}_s$ with (8.1), we see that the p_n must admit a representation of the form $p_{r-s} = e_r\bar{e}_s$. It is easily deduced that the e_r must form a geometrical progression, whose common ratio must have modulus

unity, since the bound (4.3) would otherwise be infinite. It follows that (4.3), with $\lambda_1(\mu)$ derived from (5.1), can be precise only if the p_r have the form $p_r = p_0 \exp(ir x_0)$, which is effectively the case of the "periodic impulse-function".

The precision of (4.4) is governed by Lemma 7. The requirement $c_{r0} = 0$ for $r \neq 0$ is fulfilled only if $p(x)$ is a constant, and then the matrix C is diagonal, with for $c_{rr} \leq c_{00}$ if $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. In this case (4.2) is also precise, but is again precise for the periodic impulse-function.

It has been mentioned that (4.3) holds for $p(x)$ satisfying (1.2), without $p(x)$ being required to be non-negative; further, the transition to (4.5) depended on p_0 being the greatest of the $|p_n|$. Generalising this argument we have

Theorem 2. *Let $p(x)$ be continuous, of period 2π, and satisfy* (1.2). *Then*

$$1/\lambda_1(\mu) \leq \left\{ \max_{-\infty < n < \infty} |p_n| \right\} \sum_{-\infty}^{\infty} (r + \mu)^{-2k}. \tag{8.2}$$

I note that this includes BORG's extension [5] of LYAPUNOV's result (3.1), though perhaps not necessarily KREĬN's [6].

9. The case of odd $p(x)$

This case was investigated by LYAPUNOV (see § 3). A generalisation of his result is readily deduced from

Lemma 10. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let further*

$$c_{sr} = -c_{rs} \tag{9.1}$$

$$\sum\sum |c_{rs}|^2 > 0. \tag{9.2}$$

Then

$$\sqrt{\sum_r |c_{r0}|^2} \leq \lambda_1^{-1} \leq \sqrt{\sum_r \sum_{r>s} \sum_s |c_{rs}|^2}. \tag{9.3–4}$$

This depends on the property that if η_r, λ_r are an eigen-vector and an eigen-value of C, then so are $\bar{\eta}_r, -\lambda_r$. For if $\eta_r = \{a_m^{(r)}\}$, then

$$a_m^{(r)} = \lambda_r \sum_n c_{mn} a_n^{(r)},$$

and so

$$\begin{aligned} \bar{a}_n^{(r)} &= \lambda_r \sum_n \bar{c}_{mn} \bar{a}_n^{(r)} \\ &= \lambda_r \sum_n c_{nm} \bar{a}_n^{(r)} = -\lambda_r \sum_n c_{mn} \bar{a}_n^{(r)}, \end{aligned}$$

as asserted.

It follows that $\lambda_{-1} = -\lambda_1$, and so, from (6.11),

$$2\lambda_1^2 \leq \sum\sum |c_{rs}|^2,$$

which proves (9.4).

For (9.3) we use the results, already used in § 6,

$$1 = (\zeta_0, \zeta_0) \geq \sum |(\zeta_0, \eta_s)|^2, \quad \sum |c_{r0}|^2 = (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum \lambda_s^{-2} |(\zeta_0, \eta_s)|^2.$$

Since $\lambda_s^{-2} \leq \lambda_1^{-2}$ for all s, (9.3) follows.

The conditions of Lemma 10 are satisfied by (8.1) if $p(x)$ is continuous, of period 2π, and odd. Hence

Theorem 3. *If $p(x)$ is continuous, of period 2π, and odd, then*

$$(9.5\text{–}6) \quad \mu^{-k}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r+\mu)^{-2k}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{-\infty \\ r>s}}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r+\mu)^{-2k} (s+\mu)^{-2k}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

In the case $k=1$ (9.6) becomes, using Lemma 9,

$$(9.7) \qquad 1/\lambda_1(\mu) \leq \left\{2\pi^2 \operatorname{cosec}^2(\pi\mu) \sum_{1}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

and putting $\mu = \frac{1}{2}$ we derive as a special case the LYAPUNOV result (3.2).

Considering the precision of the bounds (9.5–6) after the manner of § 2, it may be shown, using Lemma 8, that the ratio of the bounds (i.e. upper bound over lower bound) does not exceed $\frac{1}{2}\pi$; the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ is therefore fixed in this case. For small positive μ we have [cf. (4.7)]

$$(9.8) \qquad \lambda_1(\mu) \sim \mu^k \left\{\sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2k}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

There remains the question of whether the bounds (9.5–6) are actually attained. This would not seem to occur for (9.5) but for (9.6) the position resembles that regarding (4.5); (9.6) is not attained for continuous $p(x)$, but is so in a limiting sense or for a suitable generalisation of the differential equation. The argument of Lemma 10 shows that (9.4) is precise if C is two-dimensional, in addition to the other requirements of Lemma 10, which can be achieved by taking C to be the sum of two one-dimensional operators. The latter was shown to lead to the case of the "periodic impulse-function", and so we are led to choose for $p(x)$ what may be termed an "alternating periodic impulse-function", formed by a succession of positive and negative impulses; formally, we choose as the Fourier coefficients of $p(x)$ the numbers $p_r = 2i \sin r x_0$, for some real x_0. In particular, this argument shows that the constant $\frac{1}{2}\pi$ appearing in (3.2) cannot be improved.

10. The case of general $p(x)$

It has been mentioned that LYAPUNOV's bound (3.1) for the case $p(x) \geq 0$ admits of modification to the case in which $p(x)$ satisfies the weaker condition (1.2). However these modified results are open to the objection that they do not always indicate the actual order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. This may be seen from the example $p(x) = \sin n x$, for large integral n. The result (3.1),

as modified by BORG [5] or by KREĬN [6], gives a fixed lower bound for $\lambda_1(\frac{1}{2})$, whereas it follows from (3.2) that $\lambda_1(\frac{1}{2})$ is of order of magnitude n in this case. To determine the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ in the more general case of (1.2) I prove

Theorem 4. *Let $p(x)$ be continuous and of period 2π, and let (1.2) hold. Then for $0<\mu\leq\frac{1}{2}$ we have*

$$\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)+\sqrt{\left\{\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)^2+\beta^2\right\}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\sqrt{\left\{\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\right\}}, \tag{10.1–2}$$

where

$$\alpha = p_0\mu^{-2k}, \tag{10.3}$$

$$\beta = \mu^{-k}\sqrt{\sum_{\substack{-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \tag{10.4}$$

and

$$\gamma = \sqrt{\sum_{\substack{-\infty\\ rs\neq 0}}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}|p_{r-s}|^2(r+\mu)^{-2k}(s+\mu)^{-2k}}. \tag{10.5}$$

The conclusion regarding the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ is

Theorem 5. *Under the assumptions of Theorem 4,*

$$A\mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq B\mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \tag{10.6–7}$$

where the positive constants A, B are independent of the choices of $p(x)$, $k\geq 1$ and μ with $0<\mu\leq\frac{1}{2}$.

The conclusion regarding asymptotic behaviour for small positive μ is

Theorem 6. *Under the assumptions of Theorem 4 we have, as $\mu\to 0$,*

$$1/\lambda_1(\mu) = p_0\mu^{-2k}+O(1) \tag{10.8}$$

if $p_0>0$, and

$$1/\lambda_1(\mu) = \mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}}+O(1) \tag{10.9}$$

if $p_0=0$.

This includes as special cases (4.7) and (9.8), for the cases of non-negative and of odd $p(x)$.

Passing to the question of when the bounds (10.1–2) are actually attained, I note that the case $p(x)=\text{const}>0$, when $\beta=0$, makes (10.1) precise; it also makes (10.2) precise if $\gamma\leq\alpha$, and so if μ is sufficiently small. The case of the "periodic impulse-function" makes (10.2) precise for all μ with $0<\mu\leq\frac{1}{2}$, with similar qualifications as to interpretation as for (4.3) and (4.5).

11. Proof of Theorem 4

Theorem 4 follows immediately from the corresponding general result for matrices, which is

Lemma 11. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let* $c_{00} \geq 0$. *Then*

(11.1–2) $\quad \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)+\sqrt{\{\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)^2+\beta^2\}} \leq 1/\lambda_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\sqrt{\{\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\}}$,

where

(11.3–5) $\qquad \alpha = c_{00}, \quad \beta = \sqrt{\sum_{r\neq 0} |c_{r0}|^2}, \quad \gamma = \sqrt{\sum\sum_{rs\neq 0} |c_{rs}|^2}$,

it being assumed that α, β and γ are not all zero.

We use the property that

(11.6) $\qquad 1/\lambda_1 = \max\{(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta)\}$,

taken over non-null $\vartheta \in T$. Putting $\vartheta = \{a_m\}$ we write

(11.7) $\qquad (C\vartheta,\vartheta) = c_{00}|a_0|^2 + a_0\sum_{r\neq 0} c_{r0}\bar{a}_r + \bar{a}_0\sum_{r\neq 0} c_{0r}a_r + \sum\sum_{rs\neq 0} c_{rs}\bar{a}_r a_s$.

To obtain the bound (11.2) we write $u = \sqrt{\sum_{r\neq 0}|a_r|^2}$, so that, by the CAUCHY inequality,

$$\left|\sum_{r\neq 0} c_{r0}\bar{a}_r\right| \leq u\beta, \qquad \left|\sum_{r\neq 0} c_{0r}a_r\right| \leq u\beta,$$

and

$$\left|\sum\sum_{rs\neq 0} c_{rs}\bar{a}_r a_s\right| \leq \gamma u^2.$$

Hence $(C\vartheta,\vartheta) \leq \alpha|a_0|^2 + 2\beta|a_0|u + \gamma u^2$, while $(\vartheta,\vartheta) = |a_0|^2 + u^2$, and so

$$(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta) \leq \{\alpha|a_0|^2 + 2\beta|a_0|u + \gamma u^2\}/\{|a_0|^2 + u^2\}.$$

Now the maximum of the expression on the right, for varying real $|a_0|$ and u, may be found by elementary arguments, and equals the bound given on the right of (11.2), which is therefore proved.

We prove (11.1) by showing that the expression which is maximised in (11.6) exceeds the value on the left of (11.1) for a particular ϑ. We take in act $a_m = c_{m0}$ for $m \neq 0$, a_0 being some real number to be fixed later. Then (11.7) gives

$$(C\vartheta,\vartheta) = \alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 + \sum\sum c_{rs}\bar{c}_{r0}c_{s0} \geq \alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 - \gamma\beta^2,$$

so that, with such a choice of ϑ,

$$(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta) \geq \{\alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 - \gamma\beta^2\}/\{a_0^2 + \beta^2\},$$

and the maximum of this for varying real a_0 is given by the expression on the left of (11.1). This completes the proof of Lemma 11.

Theorem 4 follows; that conditions (6.4–5) are verified for continuous real $p(x)$ was shown in proving Theorem 1, while the condition $c_{00} \geq 0$ follows from (1.2).

12. Deduction of Theorem 5

The results to be proved, (10.6–7), may be written, in the notation of (10.3–4),

(12.1–2) $\qquad A\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq B\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$,

where A and B are absolute positive constants. To prove this we first deduce from (10.1–2) the simpler but less sharp bounds

$$(12.3\text{–}4)\quad \tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2\right)}-\tfrac{1}{2}\gamma\leq\frac{1}{\lambda_1(\mu)}\leq\tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2\right)}+\gamma,$$

and, secondly, prove that

$$(12.5)\qquad \gamma^2\leq\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)(\alpha^2+2\beta^2).$$

It is obvious that (12.4–5) together imply a bound of the form (12.2). As regards (12.1) we have

$$\tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2)}-\tfrac{1}{2}\gamma\geq\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\tfrac{1}{2}\gamma,$$

and furthermore, since $\pi^2<10$, from (12.5) we have $\gamma^2\leq\frac{3}{2}\alpha^2+3\beta^2$. Hence rom (12.3) we derive

$$1/\lambda_1(\mu)\geq\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\sqrt{(\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{3}{4}\beta^2)}$$

which implies a bound of the form (12.1). For the proof of Theorem 5 it only remains to establish (12.3–5).

To prove (12.3–4) let us write

$$F(v)=\tfrac{1}{2}(\alpha+v)+\sqrt{\{\tfrac{1}{4}(\alpha-v)^2+\beta^2\}},$$

so that (10.1–2) may be written

$$(12.6\text{–}7)\qquad F(-\gamma)\leq 1/\lambda_1(\mu)\leq F(\gamma).$$

Now

$$F'(v)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}(v-\alpha)\{\tfrac{1}{4}(v-\alpha)^2+\beta^2\},$$

and so $0\leq F'(v)\leq\frac{1}{2}$ for $v\leq\alpha$, $\frac{1}{2}\leq F'(v)\leq 1$ for $v\geq\alpha$. Hence

$$F(-\gamma)\geq F(0)-\tfrac{1}{2}\gamma,\qquad F(\gamma)\leq F(0)+\gamma,$$

which together with (12.6–7) establish (12.3–4).

For the proof of (12.5) we put

$$(12.8)\qquad \gamma^2=(\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^2+2\beta^2).$$

Now

$$\begin{aligned}\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2&=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}|p_{r-s}|^2(r+\mu)^{-2k}(s+\mu)^{-2k}\\&=p_0^2\sum_{-\infty}^{\infty}(r+\mu)^{-4k}+\sum_{\substack{r=-\infty\\r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}\\&\leq\tfrac{1}{4}\pi^2p_0^2\mu^{-4k}+\tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\sum_{\substack{-\infty\\r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\};\end{aligned}$$

here in the last sum we have used Lemma 8, and in the term involving p_0 have used the inequality $\sum (s+\mu)^{-4k} \leq \frac{1}{4}\pi^2 \mu^{-4k}$, which is sufficiently accurate for our purpose, and which is contained in a similar inequality established in the course of the proof of Lemma 8. We may write this result as

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \leq \tfrac{1}{4}\pi^2(\alpha^2 + 2\beta^2),$$

which proves (12.5) and so completes the proof of Theorem 5.

13. Deduction of Theorem 6

For fixed $p(x)$, satisfying the conditions of Theorem 4, we have as $\mu \to 0$, $\gamma = O(1)$. Hence from (12.3–4)

$$1/\lambda_1(\mu) = \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2)} + O(1).$$

Now if $p_0 > 0$, so that $\alpha = p_0 \mu^{-2k} > 0$, we have $\beta^2 \alpha^{-1} = O(1)$ as $\mu \to 0$, and so

$$1/\lambda_1(\mu) = \alpha + O(1),$$

while if $p_0 = 0$, $\alpha = 0$ and so

$$1/\lambda_1(\mu) = \beta + O(1),$$

which are the results of Theorem 6.

14. Generalisation of the coefficient function $p(x)$

In proceeding from the differential equation (1.4) to the system of linear equations (5.1), and again when considering the positive-definiteness of the matrix (8.1), it was assumed that $p(x)$ was continuous. This can easily be extended to piecewise continuity, and further extensions are possible in which $p(x)$ retains its character of a function. However a wider extension turned out to be necessary in considering the precision of estimates for $\lambda_1(\mu)$, namely to impulse-functions which are, so to speak, the derivatives of step-functions. In the case $k = 1$, the appropriate generalisation of the differential equation has been investigated by KREĬN [9, and elsewhere], with particular reference to the dynamical interpretation in terms of a vibrating loaded string. In KREĬN'S work this extension is of importance in connection with inverse spectral problems.

In the present case, the argument leading from the system of equations (5.1) to the bounds of Theorems 4, 5 and 6 retain their validity if the Fourier coefficients p_r satisfy the requirements $p_0 \geq 0$, $p_{-r} = \overline{p}_r$, and

$$0 < p_0^2 + \sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2k} < \infty.$$

The question arises of whether a corresponding extension is possible for the differential equation (1.4), and what, if any, other parts of the theory of differential equations of this form survive the extension. Here I confine myself to indicating a possible extension of (1.4). The set of solutions of (1.4) is in fact the same as the set of solutions of the integral equation

$$z(x) = (-)^k \lambda \int_0^x \Gamma(x,t)\{z(t) + q_1(t)\}\,dt + q_2(x),$$

where

$$\Gamma(x,t) = \{(k-1)!\}^{-2} \int_t^x (x-u)^{k-1}(u-t)^{k-1} p(u)\,du,$$

$$y(x) = \{(k-1)!\}^{-1} \int_0^x (x-t)^{k-1}\{z(t) + q_1(t)\}\,dt,$$

and q_1, q_2 are arbitrary polynomials of degree less than k, corresponding to the $2k$ constants of integration in (1.4). It is plain that if we integrate by parts k times in the expression for $\Gamma(x,t)$, the result involves only the k-th terated integral of $p(x)$, say $p_k(x)$. The integral equation therefore has sense, in the space of functions which are of L^2 over any finite interval, if $p_k(x)$ is also of L^2. As to periodicity, we should require there to exist a polynomial of degree at most k, say $p_k^*(x)$, such that $p_k(x) - p_k^*(x)$ had period 2π.

15. The connection with stability

We have shown that for continuous periodic $p(x)$ satisfying (1.2), $\lambda_1(\mu) \to 0$ as $\mu \to 0$, $\lambda_1(\mu)$ being positive. If in addition we show that $\lambda_1(\mu)$ depends continuously on μ in $0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$, we can assert that (1.4) has two distinct solutions for $0 < \lambda < \lambda_1(\frac{1}{2})$ which are bounded as $x \to \pm\infty$. For $k \geqq 2$, this will not constitute a "stability-zone" in the ordinary sense, since there may exists unbounded solutions as well, as may be verified from the simple case $p(x) = 1$.

The requisite continuity of $\lambda_1(\mu)$ may be deduced from the extremal expression for $\lambda_1(\mu)$ [cf. (11.6)] which is

$$1/\lambda_1(\mu) = \max\{\sum\sum p_{r-s}\bar{a}_r a_s (r+\mu)^{-k}(s+\mu)^{-k} / \sum |a_r|^2\},$$

or, in the case of suitably continuous $p(x)$,

$$1/\lambda_1(\mu) = \max\left\{\int_0^{2\pi} p(x)\,|f(x)|^2\,dx \Big/ \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2\,dx\right\},$$

taken over functions $f(x)$ such that $f(x+2\pi) = e^{2\pi i\mu} f(x)$, and such that $f^{(k)}(x) = d^k f/dx^k$ is of $L^2(0, 2\pi)$.

References

[1] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin 1953.— [2] LYAPUNOV, A. M.: C. R. Acad. Sci. Paris **128**, 1085—1088 (1899). — [3] BELLMAN, R.: Stability theory of differential equations. New York 1953. — [4] KAMPEN, E. R. VAN, and A. WINTNER: Amer. J. Math. **59**, 270—274 (1937). — [5] BORG, G.: Amer. J. Math. **71**, 67—70 (1949). — [6] KREĬN, M. G.: Priklad. Mat. i Meh. **15**, 323—348 (1951). — [7] HARTMAN, P., and A. WINTNER: Amer. J. Math. **73**, 885—890 (1951). — [8] LYAPUNOV, A. M.: C. R. Acad. Sci. Paris **123**, 1248—1252 (1896). — [9] KREĬN, M. G.: Doklady Akad. Nauk SSSR. **93**, 767—770 (1953).

Canberra University College, Canberra, A.C.T., Australia

(Eingegangen am 28. Januar 1957)

MIKOLÁS, M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 100—110 (1957)

Über gewisse Lambertsche Reihen, I: Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel

Von

MIKLÓS MIKOLÁS

1. Seitdem DEDEKIND in seinen Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen [5] die Bedeutung von $\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau})$ für die allgemeine Theorie der elliptischen Modulfunktionen gezeigt und das Verhalten von[1]) $\operatorname{Log}\eta(\tau)$ gegenüber Modulsubstitutionen festgestellt hat, sind diese Ergebnisse bekanntlich die Anfangspunkte zahlreicher Untersuchungen geworden. Es seien vor allem die Theorie der Partitionen und diejenige der gewöhnlichen und generalisierten Dedekindschen Summen erwähnt[2]).

Das genannte Transformationsgesetz für $\frac{\pi i\tau}{12}-\operatorname{Log}\eta(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{2\pi i n\tau}}$ liegt ziemlich tief; erst 1955 gab RADEMACHER [12] einen verhältnismäßig kurzen, eleganten Beweis für diese Formel[3]). Vor einigen Jahren entdeckte APOSTOL, von der Verallgemeinerung der Dedekindschen Summenausdrücke ausgehend, daß auch alle Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(2r+1)}e^{2\pi i n\tau}/(1-e^{2\pi i n\tau})$ $(r=1,2,\ldots)$ entsprechenden Relationen Genüge leisten[4]).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet nun die Untersuchung der Erzeugungsfunktion $\tilde{Q}(\tau,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\frac{e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{2\pi i n\tau}}$; die Möglichkeit einer solchen Erweiterung ist mir durch die Kenntnis von [12] suggeriert worden. Die erhaltene Funktionalgleichung [vgl. (3.1), (3.2)] impliziert sowohl DEDEKINDs Transformationsformel, als die Apostolschen Relationen. — Das

---

[1]) Es leuchtet ein, daß $\pi i\tau/12-\sum_{m,n=1}^{\infty}n^{-1}e^{2\pi i m n\tau}$ unter den Logarithmen von $\eta(\tau)$ enthalten ist; der durch diese Differenz eindeutig definierte Zweig soll durchwegs mit „Log" bezeichnet werden.

[2]) Vgl. z. B. das Literaturverzeichnis.

[3]) Vgl. auch [15], welche sich auf einen Spezialfall bezieht. Siehe noch Math. Rev. **17**, 15—16 (1956).

[4]) [1]; hierin wird die ältere, mit Mellinschen Integralen und der Hurwitzschen Zetafunktion verknüpfte Methode von RADEMACHER [10] benutzt. Auf demselben Weg wurden analoge, komplizierte Transformationsformeln bei erweiterten Partitionproblemen, z. B. in [14] gefunden.

Vorkommen einer Summe von der Form $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y)=(e^{2\pi i x}-1)^{-1}(e^{2\pi i y}-1)^{-1}\cdot\sum_{\lambda=0}^{c-1}e^{2\pi i(\overline{\lambda a/c}\,x+\overline{\lambda b/c}\,y)}$ — wobei a, b und $c>0$ ganze Zahlen mit $(a,c)=(b,c)=1$ und $\bar{u}=u-[u]$ (hier und durchwegs) den gebrochenen Teil von u (beliebig reell) bedeutet[5]) — sowie die Benutzung der *Gruppeneigenschaft* der Modulsubstitutionen liefern auch *Anwendungen* in Verbindung *mit* den unlängst publizierten Resultaten [9]; insbesondere ergeben sich mehrere Formeln bzw. Reziprozitätsgesetze von APOSTOL, CARLITZ, DEDEKIND und RADEMACHER über Dedekindsche Summen (vgl. §§ 5, 6).

2. Im folgenden werden x, y, z, t, τ, ω komplexe Variablen bezeichnen; setzt man $x=e^{2\pi i\tau}$ in einer Funktion $f(x,\ldots)$, so schreiben wir für die entstehende Funktion: $\tilde{f}(\tau,\ldots)$. Wir verwenden noch die übliche Abkürzung $e^{2\pi i\tau}=e(\tau)$; das Zeichen „log" bedeutet überall den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus.

Es sei die Lambertsche Reihe $G(x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}x^{mn}$ betrachtet; sie konvergiert nach einem wohlbekannten Satz[6]) bei einem beliebigen festen $\omega\neq 1,2,\ldots$ für $|x|<1$, und zwar in jedem Teilkreis $|x|\leq\varrho$ mit $0<\varrho<1$ gleichmäßig. Man hat wegen $\frac{1}{n-\omega}=\frac{1}{\omega}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)^p$ $(n=1,2,\ldots;\ |\omega|<1)$ die Entwicklung

$$G(x,\omega)=\sum_{p=1}^{\infty}\omega^{p-1}g_p(x)\qquad(|x|<1,\ |\omega|<1),\tag{2.1}$$

indem $g_p(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left|\frac{\partial^{p-1}}{\partial\omega^{p-1}}G(x,\omega)\right|_{\omega=0}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}x^n/(1-x^n)$ $(p=1,2,\ldots)$ gesetzt wird. Insbesondere ist

$$g_1(x)=G(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}x^n/(1-x^n)=-\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-x^m)\qquad(|x|<1)$$

und

$$\tilde{g}_1(\tau)=\tilde{G}(\tau,0)=-\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-e(m\tau))=\frac{\pi i\tau}{12}-\operatorname{Log}\eta(\tau).$$

Wir schreiben noch

$$Q(x,\omega)=G(x,\omega)+G(x,-\omega)\qquad(|x|<1,\ \omega\neq\pm1,\pm2,\ldots),$$

so daß wegen (2.1)

$$Q(x,\omega)=2[g_1(x)+g_3(x)\omega^2+g_5(x)\omega^4+\cdots]\qquad(|x|<1,\ |\omega|<1).\tag{2.2}$$

[5]) $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y)$ erzeugt alle (verallgemeinerten) Dedekindschen Summen in dem Sinn, daß die letzteren in den Koeffizienten der Entwicklung nach x^my^n $(m,n=0,1,2,\ldots)$ auftreten. [Vgl. (4.4), (4.5).] — Diese $\mathfrak{S}$-Summen sind in meiner Arbeit [9] eingehend untersucht.

[6]) Vgl. [8], S. 464; für eine ausführlichere Behandlung der Lambertschen Reihen sei auf [7] hingewiesen, wo unter anderem auch die Nichtfortsetzbarkeit der Reihensummen $\sum n^{-s}x^n/(1-x^n)$ (s fest, $\Re(s)\neq 0$, $|x|<1$) gezeigt wurde (§ 7).

3. Nun behaupten wir den folgenden

Satz. *Sind h, h' und k ganze Zahlen mit $k>0$, $(h,k)=1$ und $hh' \equiv -1 \pmod k$, so gilt für $\Im(z)>0$ und $\omega \neq n$, nz^{-1} $(n=0, \pm 1, \ldots)$ die Relation*

$$(3.1)\quad \begin{cases} \tilde{Q}\left(\frac{h+z}{k}, \omega\right) - \tilde{Q}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}, z\omega\right) = \frac{1}{2}[Y(\omega) - Y(z\omega)] + \log z + \\ + 2\pi i\, \mathfrak{C}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \pi i\left[(e(\omega)-1)^{-1} + (e(z\omega)-1)^{-1}\right] - \frac{k}{2\pi i}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}. \end{cases}$$

Hierin ist $\mathfrak{C}_k^{h,1}(\omega, z\omega) = [e(\omega)-1]^{-1}[e(z\omega)-1]^{-1}\sum_{\lambda=0}^{k-1} e(\omega\overline{\lambda h/k} + z\omega\cdot\lambda/k)$ *und* $Y(\omega) = \Psi(\omega) + \Psi(-\omega)$ *mit* $\Psi(\omega) = \Gamma'(\omega)/\Gamma(\omega)$. *— Es gilt speziell für* $h=h'=0$, $k=1$:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \tilde{Q}(z,\omega) - \tilde{Q}\left(-\frac{1}{z}, z\omega\right) = \frac{1}{2}[Y(\omega) - Y(z\omega)] + \log\frac{z}{i} - \\ \qquad - \frac{\pi i}{2}\operatorname{ctg}\pi\omega\cdot\operatorname{ctg}\pi z\omega - \frac{1}{2\pi i}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}. \end{cases}$$

Beweis. Es seien h, h', k, ω, z den genannten Beschränkungen unterworfen. Wegen $|e(z)|<1$ kann man schreiben

$$(3.3)\quad \begin{cases} \tilde{G}\left(\frac{h+z}{k}, \omega\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}e\left(mn\frac{h+z}{k}\right) \\ \qquad = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}e\left(\frac{\lambda n h}{k}\right)\cdot e\left((qk+\lambda)\frac{nz}{k}\right) \\ \qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}[1-e(nz)]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k}e\left(n\frac{\lambda h}{k} + nz\frac{\lambda}{k}\right) \end{cases}$$

und das Entsprechende mit h' und $-z^{-1}$ statt h bzw. z.

Wir betrachten in der x-Ebene ein Viereck $\mathfrak{p}_N$ mit den Eckpunkten $\pm M$, $\pm Mz^{-1}$ mit $M=N+\frac{1}{2}$, wobei N eine so groß gewählte natürliche Zahl bedeutet, daß $\pm\omega$ im Inneren unseres Parallelogramms liegen; es soll in positivem Umlaufsinn

$$(3.4)\qquad I_N = \int_{(\mathfrak{p}_N)} \Phi(x,\omega)\,dx$$

mit

$$\Phi(x,\omega) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\omega}+\frac{1}{x-\omega}\right)\operatorname{ctg}\pi x\cdot\operatorname{ctg}\pi z x + \\ + \frac{1}{x-\omega}[e(x)-1]^{-1}[e(zx)-1]^{-1}\cdot\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(x\overline{\lambda h/k} + zx\cdot\lambda/k)$$

gebildet werden[7]).

Sämtliche Singularitäten (Pole) von $\Phi(x,\omega)$ innerhalb und auf $\mathfrak{p}_N$ liegen in $\pm\omega$ und in den Punkten n, nz^{-1} $(n=0, \pm 1, \ldots, \pm N)$; unter diesen ist

[7]) Im Fall $k=1$ soll eine „leere" Summe $\sum_{\lambda=1}^{k-1}$ natürlich 0 bedeuten.

$x=0$ zweiter Ordnung, die übrigen besitzen die Ordnung 1. Man findet unschwer mittels $\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{\pi}x^{-1}-\frac{\pi}{3}x+\cdots$ und $[e(x)-1)^{-1}=\frac{1}{2\pi i}x^{-1}-\frac{1}{2}+\cdots$ $(0<|x|<1)$

$$\operatorname*{Res}_{x=0}\Phi(x,\omega)=kz^{-1}(2\pi\omega)^{-2}; \tag{3.5}$$

es folgt noch unmittelbar

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=\pm\omega}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\pi\omega\cdot\operatorname{ctg}\pi z\omega+\\ \qquad+\delta_{\pm}\cdot[e(\omega)-1]^{-1}[e(z\omega)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(\omega\,\overline{\lambda h/k}+z\omega\cdot\lambda/k)\end{cases} \tag{3.6}$$

mit $\delta_+=1$, $\delta_-=0$. Ferner ist für $n=1,2,\ldots$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=n}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-\omega}[e(nz)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(n\cdot\lambda h/k+nz\cdot\lambda/k),\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=-n}\Phi(x,\omega)=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}(-n\pi z)-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+\omega}[1-e(nz)]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e\left(-n\cdot\lambda h/k+nz(k-\lambda)/k\right)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+\omega}[e(nz)-1]^{-1}\sum_{\mu=1}^{k-1}e(n\cdot\mu h/k+nz\cdot\mu/k);\end{cases} \tag{3.8}$$

und ähnlich wegen $\overline{\lambda h' h/k}=\overline{-\lambda/k}=1-\lambda/k$ $(1\leq\lambda\leq k-1)$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=nz^{-1}}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-z\omega}+\frac{1}{n+z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-z\omega}[e(nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(nz^{-1}\,\overline{\lambda h/k}+n\cdot\lambda/k)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-z\omega}+\frac{1}{n+z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(n\cdot\lambda h'/k-nz^{-1}\cdot\lambda/k)\,^{8}),\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=-nz^{-1}}\Phi(x,\omega)=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}\right)\operatorname{ctg}(-n\pi z^{-1})-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e\left(-n\cdot\lambda h'/k-nz^{-1}(k-\lambda)/k\right)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\mu=1}^{k-1}e(n\cdot\mu h'/k-nz^{-1}\cdot\mu/k).\end{cases} \tag{3.10}$$

[8]) Wir benützen, daß mit λ auch $\lambda h'$ alle Reste $\not\equiv 0 \bmod k$ durchläuft.

9272-68

Auf Grund von (3.5) bis (3.10) liefert der Residuensatz, falls zugleich $\operatorname{ctg}\pi x = -i\{1+2e(x)[1-e(x)]^{-1}\}$ berücksichtigt wird:

$$\frac{1}{2\pi i}J_N = \frac{k z^{-1}}{4\pi^2\omega^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\{[e(\omega)-1]^{-1} + [e(z\omega)-1]^{-1}\} + \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+z\omega} + \frac{1}{n-z\omega} - \frac{1}{n+\omega} - \frac{1}{n-\omega}\right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+\omega} + \frac{1}{n-\omega}\right)[1-e(nz)]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k} e(n\cdot\lambda h/k + nz\cdot\lambda/k) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+z\omega} + \frac{1}{n-z\omega}\right)[1-e(-nz^{-1})]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k} e(n\cdot\lambda h'/k - nz^{-1}\cdot\lambda/k),$$

so daß man wegen (3.3) und $\Psi(\omega) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\omega}\right)$ [9] die Formel

$$(3.11)\quad \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} J_N = -\frac{k}{2\pi i}\omega^{-1}(z\omega)^{-1} + \frac{\pi i}{2} + \pi i\{[e(\omega)-1]^{-1} + [e(z\omega)-1]^{-1}\} + \\ \qquad + 2\pi i\cdot\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \frac{1}{2}[Y(\omega) - Y(z\omega)] - \\ \qquad - \left[\tilde{Q}\left(\frac{h+z}{k}, \omega\right) - \tilde{Q}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}, z\omega\right)\right] \end{cases}$$

entnehmen kann.

Andererseits ist

$$J_N = \int_{(\mathfrak{p})}\left\{\frac{1}{4}\frac{M^2 t}{\omega^2 - M^2 t^2}\operatorname{ctg} M\pi t\cdot\operatorname{ctg} M\pi z t + \right.$$

$$\left. + \frac{M}{Mt-\omega}[e(Mt)-1]^{-1}[e(Mzt)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1} e\left(Mt\,\overline{\lambda h/k} + Mzt\cdot\lambda/k\right)\right\} dt,$$

wo $\mathfrak{p}$ das in positivem Sinn umgelaufene Parallelogramm mit den Eckpunkten ± 1, $\pm z^{-1}$ bezeichnet. Bei festem $t \neq \pm 1, \pm z^{-1}$ und für $N\to\infty$ strebt das zweite Glied des Integranden ersichtlich gegen 0, während $\operatorname{ctg} M\pi t\cdot\operatorname{ctg} M\pi z t$ (wie leichte Umformungen zeigen) $\to +1$ oder -1 je nachdem t auf den Seiten $(z^{-1}, 1)$, $(-z^{-1}, -1)$ bzw. auf $(1, -z^{-1})$, $(-1, z^{-1})$ gelegen ist. Wir können also schreiben

$$(3.12)\quad \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} J_N = \frac{1}{4}\left(\int_1^{-z^{-1}}\frac{dt}{t} - \int_{-z^{-1}}^{-1}\frac{dt}{t} + \int_{-1}^{z^{-1}}\frac{dt}{t} - \int_{z^{-1}}^{1}\frac{dt}{t}\right) \\ \qquad = \frac{1}{2}[\log z^{-1} + \log(-z^{-1})] = -\log z + \frac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

Vergleicht man (3.11) und (3.12), so ergibt sich unmittelbar (3.1), w.z.b.w.

[9] Hierin bezeichnet γ die Eulersche Konstante.

4. Wir gehen zu den *Anwendungen* des eben bewiesenen Satzes über.

I. Zunächst liefert (3.1) für $\omega \to 0$ wegen $\tilde{Q}(\tau, 0) = 2g_1(\tau) = \frac{\pi i}{6}\tau - 2\operatorname{Log}\eta(\tau)$, $Y(0) = -2\gamma$ und

$$(4.1)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\omega\to 0}\left\{\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \frac{1}{2}\left[(e(\omega)-1)^{-1} + (e(z\omega)-1)^{-1}\right] + \frac{k}{4\pi^2}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}\right\} \\ \qquad = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12k}(z + z^{-1}) + \sum\limits_{\lambda=1}^{k-1}\left(\overline{\lambda h/k} - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda/k - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

folgendes:

$$(4.2)\quad \operatorname{Log}\eta\left(\frac{h' - z^{-1}}{k}\right) - \operatorname{Log}\eta\left(\frac{h+z}{k}\right) = \frac{1}{2}\log z + \pi i \cdot s(h,k) + \frac{\pi i}{12k}(h' - h) - \frac{\pi i}{4},$$

wobei $s(h, k)$ die (Dedekindsche) Summe rechts in (4.1) bedeuten soll. Das ist — von Bezeichnungen abgesehen — die *Transformationsformel von* DEDEKIND [5]. Läßt man in (3.2) $\omega \to 0$ streben, so entspringt der wichtige Spezialfall

$$(4.3)\qquad \eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \eta(z)\sqrt{\frac{z}{i}}.$$

II. Es sei

$$(4.4)\qquad x\,y\,\mathfrak{S}_c^{a,b}(x/2\pi i, y/2\pi i) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}\tilde{\mathfrak{s}}_{m,n}\begin{pmatrix} a & b \\ & c\end{pmatrix} \qquad (|x|, |y| < 2\pi)$$

gesetzt; die Koeffizienten

$$(4.5)\qquad \tilde{\mathfrak{s}}_{m,n}\begin{pmatrix} a & b \\ & c\end{pmatrix} = \sum_{\lambda=0}^{c-1} B_m(\overline{\lambda a/c})\, B_n(\overline{\lambda b/c}) \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)^{10})$$

sind die sog. generalisierten *Dedekindschen Summen*.

(4.4) ergibt die Laurentsche Entwicklung:

$$(4.6)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_k^h(\omega, z\omega) = z^{-1}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\pi i\omega)^{\nu-2}}{\nu!}\sum\limits_{\lambda=0}^{\nu}\binom{\nu}{\lambda}z^{\lambda}\cdot\tilde{\mathfrak{s}}_{\nu-\lambda,\lambda}\begin{pmatrix} h & 1 \\ & k\end{pmatrix} \\ \qquad (z \neq 0;\ 0 < |\omega| < \min\{2\pi, 2\pi/|z|\}). \end{cases}$$

Beachtet man noch [vgl. (2.2)]

$$(4.7)\qquad \tilde{Q}(\tau, \omega) = 2\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{g}_{2r+1}(\tau)\,\omega^{2r} \qquad (\Im(\tau) > 0, |\omega| < 1),$$

$$(4.8)\qquad Y(\omega) = \Psi(1+\omega) + \Psi(1-\omega) = -2\gamma - 2\sum_{r=1}^{\infty}\zeta(2r+1)\,\omega^{2r} \qquad (|\omega| < 1)$$

und

$$(4.9)\qquad \left[e(\omega) - 1\right]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}(2\pi i\omega)^{\nu-1} \qquad (0 < |\omega| < 1),$$

---

[10]) Vgl. [9], (2.5). — Wir benutzen die übliche Definition der Bernoullischen Polynome und Zahlen: $z\,e^{uz}/(e^z - 1) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(u)\,z^\nu/\nu!$ $(|z| < 2\pi)$, $B_\nu = B_\nu(0)$.

so folgen aus (3.1) durch Koeffizientenvergleichung:

$$(4.10)\quad \tilde{g}_1\left(\frac{h+z}{k}\right)-\tilde{g}_1\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}\right)=\frac{1}{2}\log z-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{12k}(z+z^{-1})+\pi i\,\tilde{s}_{11}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right),$$

$$(4.11)\quad \begin{cases}\tilde{g}_{2r+1}\left(\frac{h+z}{k}\right)-\tilde{g}_{2r+1}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}\right)z^{2r}=\zeta(2r+1)(z^{2r}-1)+\\ \qquad+\frac{(2\pi i)^{2r+1}}{(2r+2)!}\sum_{\lambda=0}^{2r+2}\binom{2r+2}{\lambda}z^{2r+1-\lambda}\,\tilde{s}_{\lambda,\,2r+2-\lambda}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)\qquad(r=1,2,\ldots),\end{cases}$$

$$(4.12)\quad \begin{cases}\left(r+\frac{1}{2}\right)B_{2r}\cdot(z^{2r}+z)+\\ \qquad+\sum_{\lambda=0}^{2r+1}\binom{2r+1}{\lambda}z^{2r+1-\lambda}\,\tilde{s}_{\lambda,\,2r+1-\lambda}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=0\qquad(r=1,2,\ldots)\end{cases}$$

falls man, der Reihe nach, die Faktoren von $\omega^0=1$, die von ω^{2r} bzw. von ω^{2r-1} sammelt; alles gilt unter den Prämissen des Satzes.

Nun ist (4.10) ersichtlich mit (4.2) äquivalent, während (4.11) (von Bezeichnungen abgesehen) die *Apostolschen Transformationsgesetze* ([1], Th. 2) darstellt[11]).

Was (4.12) betrifft, so steht hier links ein Polynom von z; dies impliziert aber das Verschwinden aller Koeffizienten, d.h. für $r=1,2,\ldots$

$$(4.13)\quad \tilde{s}_{0,\,2r+1}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=\tilde{s}_{2r+1,\,0}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=0,$$

$$(4.14)\quad \tilde{s}_{\lambda,\,2r+1-\lambda}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=0\qquad(2\leq\lambda\leq 2r-1),$$

$$(4.15)\quad \tilde{s}_{1,\,2r}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=\tilde{s}_{2r,\,1}\left(\begin{matrix}h&1\\k&\end{matrix}\right)=-\frac{1}{2}B_{2r}.$$

Letzteres findet man bei APOSTOL [l. c., Th. 4, (4.13)] ein wenig anders geschrieben. Wir bemerken, daß (4.13) bis (4.15) zusammen mit der Formel

$$(4.16)\quad \begin{cases}\sum_{\lambda=1}^{c-1}B_m(\overline{\lambda a/c})\,B_n(\overline{\lambda b/c})=0\\ (c>0;\,(a,c)=(b,c)=1;\,m,n=0,1,\ldots;\,m\not\equiv n\pmod 2)\end{cases}$$

äquivalent sind, welche sich mittels der Fourier-Entwicklung von $B_r(\bar{u})$ bzw. durch die Eigenschaften der Bernoullischen Polynome auch direkt verifizieren läßt[12]).

5. Setzen wir in unsern Formeln $(h+z)/k=\tau$, $(h'-z^{-1})/k=\tau^*$, $(hh'+1)/k=k'$; dann gilt

$$(5.1)\quad \tau^*=\frac{h'\tau-k'}{k\tau-h},\qquad\begin{vmatrix}h'-k'\\k-h\end{vmatrix}=1,$$

d.h. in (5.1) liegt eine *unimodulare* lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, eine sog. *Modulsubstitution* vor. Bekanntlich bilden die

[11]) Es sei bemerkt, daß ein Glied (mit dem ζ-Faktor) a. a. O. zu fehlen scheint.
[12]) Vgl. noch [2], (2.2) und [9], Th. 2, (6.5).

Substitutionen der Form (5.1) eine Gruppe, die *Modulgruppe*; wenden wir auf τ^* eine andere solche Transformation an:

$$\tau^{**} = \frac{h_1'\tau^* - k_1'}{k_1\tau^* - h_1}, \qquad \begin{vmatrix} h_1' & -k_1' \\ k_1 & -h_1 \end{vmatrix} = 1, \tag{5.2}$$

so ergibt sich

$$\tau^{**} = \frac{H'\tau - K'}{K\tau - H} \tag{5.3}$$

mit $H' = h'h_1' - kk_1'$, $K' = h_1'k' - hk_1'$, $K = h'k_1 - h_1k$, $H = k'k_1 - hh_1$, oder

$$\begin{pmatrix} H' & -K' \\ K & -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1' & -k_1' \\ k_1 & -h_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' & -k' \\ k & -h \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

eine Matrix, die in der Tat wieder die Determinante 1 hat.

Mit den obigen Bezeichnungen gestaltet sich (3.1)[13]:

$$\left\{\begin{aligned} &\widetilde{Q}(\tau,\omega) - \widetilde{Q}(\tau^*,(k\tau-h)\omega) = \tfrac{1}{2}\,[Y(\omega) - Y\big((k\tau-h)\omega\big)] + \\ &\qquad + \log(k\tau-h) + 2\pi i\,\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega) + \\ &\qquad + \pi i\big\{[e(\omega)-1]^{-1} + [e((k\tau-h)\omega)-1]^{-1}\big\} + \frac{k\omega^{-2}}{2\pi i}\,(k\tau-h)^{-1}; \end{aligned}\right. \tag{5.5}$$

schreibt man hierin τ^*, $(k\tau-h)\omega$, h_1, k_1, h_1', k_1' der Reihe nach anstatt τ, ω, h, k, h', k', so entsteht wegen $(k_1\tau^* - h_1)(k\tau - h) = K\tau - H$ die Formel

$$\left\{\begin{aligned} &\widetilde{Q}(\tau^*,(k\tau-h)\omega) - \widetilde{Q}(\tau^{**},(K\tau-H)\omega) \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\,[Y((k\tau-h)\omega) - Y((K\tau-H)\omega)] + \\ &\qquad + \log(k_1\tau^* - h_1) + 2\pi i\,\mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega) + \\ &\qquad + \pi i\big\{[e((k\tau-h)\omega)-1]^{-1} + [e((K\tau-H)\omega)-1]^{-1}\big\} - \\ &\qquad - \frac{k_1\omega^{-2}}{2\pi i}\,(k\tau-h)^{-1}(K\tau-H)^{-1}. \end{aligned}\right. \tag{5.6}$$

Durch Addition folgt aus (5.5), (5.6)

$$\left\{\begin{aligned} &\widetilde{Q}(\tau,\omega) - \widetilde{Q}(\tau^{**},(K\tau-H)\omega) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[Y(\omega) - Y((K\tau-H)\omega)] + \log(K\tau-H) + \\ &\quad + 2\pi i\,[\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega) + \mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)] + \\ &\quad + \pi i\big\{[e(\omega)-1]^{-1} + 2\,[e((k\tau-h)\omega)-1]^{-1} + [e((K\tau-H)\omega)-1]^{-1}\big\} - \\ &\quad - \frac{\omega^{-2}}{2\pi i}\,(k\tau-h)^{-1}[k + k_1(K\tau-H)^{-1}], \end{aligned}\right. \tag{5.7}$$

[13]) Die Gruppeneigenschaft der Modulsubstitutionen ist z.B. auch in [10] und [4] benutzt.

während (5.5) für die „Produktsubstitution" (5.3)

$$(5.8)\quad \begin{cases} \tilde{Q}(\tau,\omega)-\tilde{Q}(\tau^{**},(K\tau-H)\omega)=\frac{1}{2}[Y(\omega)-Y((K\tau-H)\omega)]+ \\ \quad+\log(K\tau-H)+2\pi i\,\mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)+ \\ \quad+\pi i\{[e(\omega)-1]^{-1}+[e((K\tau-H)\omega)-1]^{-1}\}-\frac{\omega^{-2}}{2\pi i}K(K\tau-H)^{-1} \end{cases}$$

liefert. Vergleicht man die rechte Seite von (5.7) bzw. (5.8), so geht nach einigen Vereinfachungen

$$(5.9)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega)+\mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)- \\ \quad-\mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)=[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1} \end{cases}$$

hervor; eine Relation, wobei leicht nachweisbar

$$0<\arg(k\tau-h)<\arg(K\tau-H)<\pi,$$

ferner ω, $(k\tau-h)\omega$, $(K\tau-H)\omega$ nicht ganz und nebst k auch k_1, K positiv sein müssen.

Aus Symmetriegründen ist es zweckmäßig, (5.9) auch mit etwas veränderten Bezeichnungen aufzuschreiben. — Wir setzen $k=a$, $k_1=b$, $K=c$ und nehmen $(a,b)=(k,k_1)=1$ an; hieraus fließen zugleich $(a,c)=(k,h'k_1)=1$ und $(b,c)=(k_1,hk)=1$. Sind a', c', a'' so gewählt, daß $aa'\equiv 1 \pmod b$, $cc'\equiv 1 \pmod a$, $aa''\equiv 1 \pmod c$, so folgen aus den Kongruenzen

$$ch=(h'k_1-h_1k)h\equiv hh'k_1\equiv -b \pmod k,$$
$$ah_1\equiv h_1k-h'k_1=-c \pmod{k_1},$$
$$aH=kk'k_1-hh_1k=hK+k_1\equiv b \pmod K$$

die weiteren

$$(5.10)\quad h\equiv -bc' \pmod a,\quad h_1\equiv -ca' \pmod b,\quad H=ba'' \pmod c.$$

Nun bleibt $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y)$ ersichtlich unverändert, wenn man anstatt a, b mit ihnen mod c kongruenten Zahlen, oder qa bzw. qb mit $(q,c)=1$ schreibt; ferner gilt $\mathfrak{S}_c^{-a,b}(x,y)=-\mathfrak{S}_c^{a,b}(-x,y)+[1-e(y)]^{-1}$. Daher entspringen mit Rücksicht auf (5.10)

$$\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega)=\mathfrak{S}_a^{-b,c}(\omega,(k\tau-h)\omega)=-\mathfrak{S}_a^{b,c}(-\omega,(k\tau-h)\omega)+$$
$$+[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1},$$
$$\mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)=\mathfrak{S}_b^{c,-a}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)$$
$$=-\mathfrak{S}_b^{c,a}((k\tau-h)\omega,-(K\tau-H)\omega)+[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1},$$
$$\mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)=\mathfrak{S}_c^{a,b}((K\tau-H)\omega,\omega).$$

Führt man noch $\omega=cy$, $(K\tau-H)\omega=cx$ und mithin

$$(k\tau-h)\omega=kx+(kH-hK)y=ax+by$$

ein, so geht (5.9) in den bemerkenswerten *Dreigliedersatz*

$$(5.11)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_b^{c,a}(ax+by,-cx)+\mathfrak{S}_c^{a,b}(cx,cy)+\mathfrak{S}_a^{b,c}(-cy,ax+by) \\ \qquad =[1-e(ax+by)]^{-1} \end{cases}$$

mit den Bedingungen $\arg cy<\arg(ax+by)<\arg cx$, $\arg cx-\arg cy<\pi$; $cx, cy, ax+by\neq 0, \pm 1, \ldots$ über.

6. (5.11) ist ein Ergebnis meiner Arbeit [9] (Th. 1), wo man (nebst einem independenten Beweis) die Prämissen $0\leq\Re(x)<1$, $-1<\Re(y)\leq 0$ und auch mehrere Anwendungen über Dedekindsche Summen findet. — An dieser Stelle wollen wir zeigen, daß aus (5.9) zugleich eine kürzlich von CARLITZ [4][14]) veröffentlichte allgemeinere Relation folgt, nämlich

$$(6.1)\quad \begin{cases} F_\nu(h,k;\tau)+(k\tau-h)^{\nu-2}F_\nu(h_1,k_1;\tau^*)-F_\nu(H,K;\tau)=-\nu B_{\nu-1}\cdot(k\tau-h)^{\nu-2} \\ (k,k_1,K>0;\ 0<\arg(k\tau-h)<\arg(K\tau-H)<\pi;\ \nu=1,2,\ldots) \end{cases}$$

mit

$$F_\nu(h,k;\tau)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\binom{\nu}{\lambda}(k\tau-h)^{\lambda-1}\mathfrak{s}_{\nu-\lambda,\lambda}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right).$$

In der Tat, wenn man in (5.9) nach Multiplizieren mit $\omega^2(k\tau-h)^2$, die Variable ω mit $\omega/2\pi i$ ersetzt und sich auf die Potenzreihenentwicklung [vgl. (4.6)]

$$\omega^2\,\mathfrak{S}_k^{h,1}\left(\frac{\omega}{2\pi i},(k\tau-h)\frac{\omega}{2\pi i}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^\nu}{\nu!}F_\nu(h,k;\tau)$$

$$\left(k\tau\neq h;\ |\omega|<\min\{1,|k\tau-h|^{-1}\}\right)$$

stützt, so entspringt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^\nu}{\nu!}\left[(k\tau-h)^2F_\nu(h,k;\tau)+(k\tau-h)^\nu F_\nu(h_1,k_1;\tau^*)-(k\tau-h)^2F_\nu(H,K;\tau)\right]$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^{\nu+1}}{\nu!}B_\nu\cdot(k\tau-h)^{\nu+1},$$

woher die betreffende Formel unmittelbar folgt.

(6.1) enthält auch Erweiterungen gewisser *Carlitzschen Reziprozitätssätze* ([2], Th. 1, 2) und somit einer spezielleren, von APOSTOL herrührenden Relation ([1], Th. 1), welche sich auf die generalisierten Dedekindschen Summen $\mathfrak{s}_{m,n}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right)$ beziehen und aus (6.1) für $\nu\geq 2$ durch Koeffizientenvergleichung inbetreff τ bzw. $z=k\tau-h$ gewonnen werden können. Insbesondere sei der einfachste Fall $\nu=2$ erwähnt; dann bekommt man nach einfacher Rechnung

$$(6.2)\quad \mathfrak{s}_{1\,1}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right)+\mathfrak{s}_{1\,1}\left(\begin{matrix}h_1 & 1\\ k_1\end{matrix}\right)-\mathfrak{s}_{1\,1}\left(\begin{matrix}H & 1\\ K\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\left(\frac{K}{kk_1}+\frac{k}{k_1K}+\frac{k_1}{Kk}\right),$$

[14]) Es sei auf mehrere hierin befindliche Druckfehler hingewiesen: z.B. in der für $m=4, 6, 8, \ldots$ geltenden Formeln (1.10) und (1.11) ist n durch m, $2\pi i$ durch $(2\pi i)^{m-1}$ zu ersetzen, bzw. statt h links H zu schreiben und rechts $(-i)^m$ zu streichen.

eine Formel, die dem Wesen nach mit einem eleganten Rademacherschen Resultat (vgl. [11], (30)) bzw. mit meiner *Symmetrierelation* ([9], (5.3))

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ a & \end{smallmatrix}\right) + \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} c & a \\ b & \end{smallmatrix}\right) + \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \\ (a, b; c > 0;\ (a, b) = (b, c) = (c, a) = 1) \end{cases}$$

äquivalent ist. (6.3) liefert für $a = 1$, $b = h$, $c = k$ (vgl. § 4)

$$(6.4)\qquad 12\,s(h, k) + 12\,s(k, h) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk},$$

d.h. das *Reziprozitätsgesetz von* DEDEKIND ([5], S. 442).

7. Die Transformationsformel für $\eta(\tau)$ und einige analoge, kompliziertere Relationen zeigten sich als nützlich bei Singularitätsuntersuchungen auf dem Einheitskreis, welche bekanntlich das asymptotische Verhalten der zugehörigen Partitionsfunktionen liefern[15]). — Im zweiten Teil hoffe ich auf gewisse mit $Q(x, \omega)$ verknüpfte, naheliegende Asymptotikprobleme zurückzukommen.

Literatur

[1] APOSTOL, T. M.: Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. Duke Math. J. **17**, 147—157 (1950). — [2] CARLITZ, L.: Some theorems on generalized Dedekind sums. Pac. J. Math. **3**, 513—522 (1953). — [3] CARLITZ, L.: Dedekind sums and Lambert series. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 580—584 (1954). — [4] CARLITZ, L.: A further note on Dedekind sums. Duke Math. J. **23**, 219—223 (1956). — [5] DEDEKIND, R.: Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen. Ges. math. Werke **1**, Braunschweig 1930, 159—173. — [6] HARDY, G. H., and S. RAMANUJAN: Asymptotic formulae in combinatory analysis. Proc. London Math. Soc. (2) **17**, 75—115 (1917). — [7] KNOPP, K.: Über Lambertsche Reihen. J. reine angew. Math. **142**, 283—315 (1913). — [8] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl. Berlin-Heidelberg 1947. — [9] MIKOLÁS, M.: On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws. Pac. J. Math. (im Erscheinen). — [10] RADEMACHER, H.: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. reine angew. Math. **167**, 312—336 (1931). — [11] RADEMACHER, H.: Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Duke Math. J. **21**, 391—397 (1954). — [12] RADEMACHER, H.: On the transformation of $\log \eta(\tau)$. J. Indian Math. Soc. (2) **19**, 25—30 (1955). — [13] RADEMACHER, H., and A. WHITEMAN: Theorems on Dedekind sums. Amer. J. Math. **63**, 377—407 (1941). — [14] SCHOENFELD, L.: A transformation formula in the theory of partitions. Duke Math. J. **11**, 873—887 (1944). — [15] SIEGEL, C. L.: A simple proof of $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \eta(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}$. Mathematika **1**, 4 (1954).

[15]) Vgl. z. B. [6].

Budapest, Mathematisches Institut der Eötvös Loránd-Universität

(Eingegangen am 9. Februar 1957)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 111–125 (1957)

Über eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus

Von
ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Es bedeute E^n den n-dimensionalen Vektorraum, A, B zwei nichtleere Teilmengen von E^n und x, y zwei Punkte von A bzw. B. Man definiere die Punktmenge $A+B$ durch die Gleichung

$$A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}, \tag{1.1}$$

und für reelles λ die Punktmenge λA durch

$$\lambda A=\{\lambda x \mid x\in A\}. \tag{1.2}$$

Die Operation (1.1), die im folgenden als Minkowskische Addition[1]) geführt wird, definiert den Raum 2^H aller nichtleeren Teilmengen von E^n als eine abelsche additive Halbgruppe, d.h. als einen Halbmodul. Wir sprechen im folgenden vom Minkowskischen Halbmodul 2^H.

Man beschreibe nun E^n durch gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und betrachte eine auf einer sonst beliebigen, nichtleeren, beschränkten Punktmenge M definierte positive, beschränkte Funktion $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$. Eine solche Funktion soll im folgenden als zulässig bezeichnet werden. Liegt nun eine solche Funktion $f(x)$ vor, so definiere man den Ausdruck $I(f \mid M)$ durch folgende Vorschrift:

Es sei zunächst F eine kompakte Punktmenge von E^n. Unter einer Überdeckung W wird die Überdeckung von F durch eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen, achsenparallelen Parallelotopen $I_1, \ldots, I_N$ verstanden. Liegt eine solche Überdeckungsmenge W vor, so wird, wie üblich, ihr Inhalt durch $|W|$ bezeichnet.

Man betrachte jetzt endlich viele abgeschlossene punktfremde Teilmengen $F_1, \ldots, F_m$ von M und wähle die Überdeckungen $W_k \supseteq F_k$ so, daß $W_i \cap W_k = \emptyset$ $(i \neq k)$ wird. Setzt man dann

$$\mu_k = \inf\{f(x) \mid x\in F_k\} \qquad (k=1, \ldots, m), \tag{1.3}$$

[1]) Im folgenden sollen, wie bereits erwähnt, nichtleere Punktmengen in Betracht gezogen werden. Was die Bezeichnung $+$ für die Minkowskische Summe anbetrifft, so habe ich geschwankt, ob ich diese durch $A+B$ oder $A\times B$ bezeichne. Bei der ersten Bezeichnung läuft man Gefahr, eine Verwechslung mit der Vereinigung herbeizuführen, die zweite ist anderweitig in Anspruch genommen. So blieb ich bei der üblichen Bezeichnung. Lediglich im Falle $A+\ldots+A$ (m mal) empfiehlt sich die Bezeichnung $m\times A$, da es hier wegen der Gleichheit der Summanden auf deren Anordnung nicht ankommt. Die Schreibweise mA würde hier zu einer Verwechslung mit der Menge (1.2) führen, die im allgemeinen von $m\times A$ verschieden ist.

so ist der Ausdruck

$$S = \inf\left\{\sum_1^m \mu_k |W_k| \,\middle|\, W_k \geqq F_k\right\}, \tag{1.4}$$

gleich der Summe

$$\mu_1 L(F_1) + \mu_2 L(F_2) + \cdots + \mu_m L(F_m), \tag{1.5}$$

wobei allgemein L das Lebesguesche Maß bedeutet. Ist dieser Schritt getan, so definiere man $I(f|M)$ durch die Gleichung

$$I(f|M) = \sup\left\{\sum_1^m \mu_k L(F_k) \,\middle|\, \bigcup_1^m F_k \subseteqq M\right\}. \tag{1.6}$$

Hierbei soll noch berücksichtigt werden, daß $F_i \cap F_k = \emptyset$ gilt, sobald $i \neq k$ ist. Ist M meßbar, und f meßbar in M, so stellt $I(f|M)$ das Lebesguesche Integral $\int_M f\,dL$ dar.

Man vergegenwärtige sich in der Tat die Definition der L-summierbaren Funktion[2]): Es sei f eine auf M (M meßbar) reellwertige, nichtnegative (in unserem Falle beschränkte) meßbare Funktion von x. Man zerlege M in eine endliche Anzahl, etwa m, von paarweise punktfremden, meßbaren Punktmengen $M_1, \ldots, M_m$ und bezeichne mit $\mu(f|M_k)$ die untere Grenze von f in M_k. Dann gilt

$$\int_M f\,dL = \sup\left\{\sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k)\right\}. \tag{1.7}$$

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$. Dann gilt für eine bestimmte Summe rechts

$$\sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k) \geqq \int_M f\,dL - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man bestimme jetzt zu jedem M_k eine abgeschlossene Teilmenge F_k derart, daß $L(F_k) \geqq L(M_k) - \varepsilon/2^k A$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ gilt, wobei A das Supremum von f auf M bedeutet. Das ist nach klassischen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie stets möglich. Durch Anwendung dieser Ungleichung folgt dann

$$S = \sum_1^m \mu_k L(F_k) \geqq \sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k) - \varepsilon,$$

und somit wird

$$I(f|M) \geqq \int_M f\,dL - \varepsilon. \tag{1.8}$$

Da nun stets

$$I(f|M) \leqq \int_M f\,dL$$

ist, so kann die Behauptung als bewiesen angesehen werden.

[2]) Man vgl. z. B. RADO, T., u. P. V. REICHELDERFER: Continuous Transformations in Analysis, S. 192. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

Die Zurückführung des Lebesgueschen Integrals $\int_M f\,dL$ auf die Summen $\sum_1^m \mu_k |W_k|$ gestattet, nachfolgenden Satz (den Hauptsatz der vorliegenden Arbeit) auf relativ elementarem Wege zu beweisen.

Satz 1. *Es seien A_1, A_2 zwei beschränkte, nichtleere Punktmengen von E^n und es sei $A_1 + A_2 = A_0$ gesetzt. Man betrachte zwei zulässige Funktionen $f_1(x), f_2(x)$, welche auf A_1 bzw. A_2 definiert sein mögen, und bilde bei gegebenem r $(0 < r < +\infty)$ die Funktion*

$$g_0(x) = \sup\{(f_1(x')^{1/r} + f_2(x'')^{1/r})^r \,|\, x' \in A_1,\ x'' \in A_2,\ x' + x'' = x\},$$

für alle $x \in A_0$. Ist dann $f_0(x)$ eine auf A_0 definierte, zulässige Funktion, welche der Bedingung

$$f_0(x) \geq g_0(x) \qquad (x \in A_0) \tag{1.9}$$

genügt, so gilt

$$I(f_0 | A_0)^{1/r+n} \geq I(f_1 | A_1)^{1/r+n} + I(f_2 | A_2)^{1/r+n}. \tag{1.10}$$

Dieser Satz enthält (für $f_1 = f_2 = 1$, $r \to 0$) den klassischen Lusternikschen Satz als Grenzfall.

Einen direkten Beweis dieses Satzes für Borel-meßbare A_1, A_2, gestützt auf die Ergebnisse von HENSTOCK und MACBEATH[3]), findet der Leser in 4. In 6. entwickele ich kurz einen allgemeinen Satz in Zusammenhang mit dem Relativmaß von Punktmengen. Die kurzen Andeutungen in 5. haben lediglich den Zweck, die Schwierigkeiten meiner ursprünglichen Überlegungen anzudeuten und zugleich die Vorteile der in 3. entwickelten Methode herauszustellen.

2. Vorbereitende Tatsachen. Es bedeute zunächst A eine beschränkte Punktmenge von E^n, die sich als Vereinigung von endlich vielen offenen, konvexen Punktmengen darstellen läßt. Ferner sei $g_A(x) = g_A(x_1, \ldots, x_n)$ eine in A definierte, (zunächst) stetige, positive Funktion des Punktes $x(x_1, \ldots, x_n)$. Man setze

$$g_n^A(x) = \begin{cases} g_A(x) \,|\, x \in A \\ 0 \quad |\, x \notin A, \end{cases} \tag{2.1}$$

und bilde die Funktionen

$$g_{k-1}^A(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^A(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\,dv \tag{2.2}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Es bezeichne jetzt W_0 den offenen Würfel

$$0 < \tau_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

[3]) HENSTOCK, R., u. A. M. MACBEATH: On the Measure of Sum-Sets (I). The theorems of BRUNN, MINKOWSKI and LUSTERNIK. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. III 3, 182—195 (1953).

und es bedeute $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ einen Punkt von W_0. Ist $x \in A$, so definieren dann die Gleichungen

$$g_{k-1}^{A}(x_1, \ldots, x_{k-1})\,\tau_k = \int_{-\infty}^{x_k} g_k^{A}(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\,dv \tag{2.4}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$ eine eindeutige und stetige Abbildung von A auf eine offene Teilmenge W_0'. Wie man leicht sieht, entspricht umgekehrt jedem Punkt $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von W_0' ein vermöge der Gln. (2.4) eindeutig definierter Punkt $x(x_1, \ldots, x_n)$ von A. Somit ist die Abbildung $A \leftrightarrow W_0'$ eineindeutig und stetig. Wir nennen sie im folgenden die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung von A auf W_0[4]). Die Annahme, daß $g_A(x)$ in A überall stetig ist, ist unwesentlich. Der Leser wird sofort feststellen können, daß einige Vorteile dieser Abbildung auch dann erhalten bleiben, wenn (unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffes) nur angenommen wird, daß $g_A(x)$ in A positiv und dort meßbar ist.

3. Beweis des Satzes 1. Es seien $F_1', \ldots, F_{m'}'$ bzw. $F_1'', \ldots, F_{m''}''$ paarweise punktfremde, abgeschlossene Teilmengen von A_1 bzw. A_2. Wir überdecken die F_k' bzw. F_k'' durch paarweise punktfremde W-Mengen W_k' bzw. W_k'' und setzen

$$W' = \bigcup_1^{m'} W_k', \qquad W'' = \bigcup_1^{m''} W_k''.$$

Es bedeuten nun $W_k'^{*}$ bzw. $W_l''^{*}$ die offenen Kerne von W_k' bzw. W_l''. Man definiere μ_k', μ_l'' durch die Vorschrift (1.3) und setze

$$g_1(x) = \mu_k' \,|\, x \in W_k'^{*},\ k = 1, 2, \ldots, m' \tag{3.1}$$

bzw.

$$g_2(x) = \mu_l'' \,|\, x \in W_l''^{*},\ l = 1, 2, \ldots, m''. \tag{3.2}$$

Hierbei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß sowohl μ_k' als auch μ_l'' positiv sind. Liegt x in $W' - \bigcup_1^{m'} W_k'^{*}$, so soll $g_1(x)$ gleich der zugehörigen unteren Limesfunktion[5]) genommen werden. Entsprechendes soll für die Funktion $g_2(x)$ gelten. Außerhalb W' bzw. W'' setzen wir $g_1(x) = 0$ bzw. $g_2(x) = 0$.

Man setze jetzt $g_1(x) = g_n^{A_1}(x)$, $g_2(x) = g_n^{A_2}(x)$, und bilde nach dem Vorbild von Nr. 2 die offenen Kerne W'^{*} bzw. W''^{*} von W' bzw. W'' eineindeutig und stetig auf die offenen Teilmengen W_0' bzw. W_0'' von W_0 ab. Eine leichte Überlegung zeigt, daß bei dieser Abbildung die Mengen $W_0 - W_0'$ bzw. $W_0 - W_0''$ auf

[4]) In ihrer einfachsten Form ($g(P) = 1$ für $P \in A$ und A spezieller Struktur) geht diese Transformation auf eine mündliche Mitteilung von ERHARD SCHMIDT aus dem Jahre 1942 zurück. [Man vgl. darüber meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von WULFF für die Gleichgewichtsformen von Kristallen. Z. Kristallogr. (A) **105**, 304—314 (1943).]

[5]) Man vgl. z. B. CARATHEODORY, C.: Reelle Funktionen I, S. 100. Leipzig und Berlin: Teubner 1939.

höchstens endlich vielen (achsenparallelen) Hyperebenen $\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_q = k_q$ liegen und somit $|W_0'| = |W_0''| = 1$ gelten muß. Man setze jetzt $T = W_0' \cap W_0''$, $\xi = \xi(\tau)$ und nehme an, daß der Vektor die Koordinaten

$$\xi_k = x_k^1(\tau_1, \ldots, \tau_k) + x_k^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

habe.

Hierbei sollen x_k^1 bzw. x_k^2 die durch die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung von 2. gewonnenen Funktionen darstellen.

Nun ist die Menge

$$W(T) = \{\xi \mid \xi = \xi(\tau),\ \tau \in T\}$$

in $W' + W''$ enthalten. Verwendet man also die vorhin gebildeten Funktionen $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$, und schreibt man $g_W(x)$ für die Funktion

$$\text{(3.3)} \qquad \operatorname{Max}\{(g_1(x')^{1/r} + g_2(x'')^{1/r})^r \mid x = x' + x'',\ x' \in W',\ x'' \in W''\},$$

und $g_W(\tau)$ für die Funktion

$$\{g_1(x'(\tau))^{1/r} + g_2(x''(\tau))^{1/r}\}^r,$$

so wird zunächst

$$\text{(3.4)} \qquad \int_{W'+W''} g_W(x)\, dx_1 \ldots dx_n \geq \int_{W(T)} g_W(\tau)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Es bezeichne jetzt $D(\xi \mid \tau)$ die Funktionaldeterminante der ξ_i in bezug auf die τ_k. Dann gilt

$$\text{(3.5)} \qquad D(\xi \mid \tau) = \prod_1^n \left\{ \frac{g_{k-1}^{A_1}}{g_k^{A_1}} + \frac{g_{k-1}^{A_2}}{g_k^{A_2}} \right\},$$

und somit ist der Integrand rechts in (3.4) wegen $g_1 = g_n^{A_1}$, $g_2 = g_n^{A_2}$, gleich

$$\text{(3.6)} \qquad \{(g_n^{A_1})^{1/r} + (g_n^{A_2})^{1/r}\}^r \prod_1^n \left\{ \frac{g_{k-1}^{A_1}}{g_k^{A_1}} + \frac{g_{k-1}^{A_2}}{g_k^{A_2}} \right\}.$$

Nun gilt allgemein für positive α_k, β_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ und positive r_k mit $r_1 + \cdots + r_l = 1$ die Ungleichung

$$\text{(3.7)} \qquad \prod_1^l (\alpha_k + \beta_k)^{r_k} \geq \prod_1^l \alpha_k^{r_k} + \prod_1^l \beta_k^{r_k},$$ [6])

und somit ist der Ausdruck (3.6) nicht kleiner als

$$\{(g_0^{A_1})^{1/r+n} + (g_0^{A_2})^{1/r+n}\}^{r+n}.$$

Führt man nun die in 1. entwickelten Grenzprozesse durch, so konvergieren die Integrale

$$\text{(3.8)} \qquad g_0^{A_1} = \int_{W'} g_1(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{W'} g_1\, dL$$

---

[6]) Hardy-Littlewood-Polya: Inequalities, S. 39. Cambridge: Univ. Press 1952.

und

$$g_0^{A_1} = \int_{W''} g_2(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{W''} g_2\, dL, \tag{3.9}$$

gegen die Größen $I(f_1|A_1)$ bzw. $I(f_2|A_2)$, und somit konvergiert die rechte Seite der Ungleichung (3.4) gegen

$$\{I(f_1|A_1)^{1/r+n} + I(f_2|A_2)^{1/r+n}\}^{r+n}. \tag{3.10}$$

Es seien jetzt (W_n') bzw. (W_n'') zwei monoton gegen $F' = \bigcup_1^{m'} F_k'$ bzw. $F'' = \bigcup_1^{m''} F_k''$ konvergierende Folgen von würfelförmigen Überdeckungsmengen und es sei $F = F' + F''$.

Man setze

$$g(x) = \operatorname{Max}\{(\mu_i'^{1/r} + \mu_k''^{1/r})^r | x = x' + x'',\ x' \in F_i',\ x'' \in F_k''\},$$

und beachte, daß $g(x) \leq f_0(x)$ $(x \in F)$ gilt. Ist dann $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so bleibt die linke Seite von (3.4) für große n kleiner als

$$\int_F g_{W_n}(x)\, dx_1 \dots dx_n + M\varepsilon \qquad (W_n = W_n' + W_n''), \tag{3.11}$$

wobei M lediglich vom Supremum von f_0 auf A_0 abhängt und das Integral im Lebesgueschen Sinne genommen wird. Da nun $g_{W_n}(x)$ $(x \in F)$ für $n \to \infty$ gegen $g(x)$ konvergiert, so ist der Grenzwert des Ausdrucks (3.11) kleiner als

$$I(f_0|F) + M\varepsilon \leq I(f_0|A_0) + M\varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung (1.10). Durch eine leichte Abänderung der Überlegung kann man hier die Verwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs in der Ungleichung (3.11) umgehen. Wir gehen jedoch darauf nicht ein.

4. Beweis des Satzes 1 durch Induktion. Sind A_1, A_2 zwei nichtleere, beschränkte F_σ-Mengen von E^n, so kann man den Beweis des Satzes 1 durch Induktion erbringen. Dieser Beweis, der in dieser Nummer entwickelt werden soll, zeigt zugleich, welcher Verallgemeinerung der ursprüngliche geniale Gedanke von HERMANN BRUNN, wodurch erst die Theorie der konvexen Körper überhaupt gegründet wurde, fähig ist[7]). Es soll jedoch ausdrücklich ver-

[7]) Das Schicksal des Gedankens von BRUNN, der ursprünglich in der Zuordnung von parallelen Schnitten zweier konvexer Körper durch gleiche Volumenverhältnisse bestand, und der zur Aufstellung des Brunn-Minkowskischen Satzes führte, ist merkwürdig. MINKOWSKI (Werke Bd. 2, S. 125) zitiert in diesem Zusammenhang die Stelle BRUNNS (Dissertat. S. 31): „Zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel läßt sich allerdings dieser Gedanke nicht verwerten." Es ist interessant, daß MINKOWSKI, der dies für konvexe Körper getan hat, nicht bemerkte, daß dieses Verfahren unter Zugrundelegung auch nicht konvexer Punktmengen A_1 zum Ziele führt. Auch BONNESEN (Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Gauthier Villars, Paris 1929) ist ähnlicher Ansicht. So schreibt er (loc. cit. S. 111) im Zusammenhang mit der isoperimetrischen Ungleichung $O^3 - 36\pi V^2 \geq 0$ für konvexe Körper: „Cette inégalité subsiste aussi pour les corps non convexes, mais on ne peut pas l'obtenir par ces méthodes." In meiner Wiener Arbeit [Sitzungsber. Akad. Wissensch. Wien, Mathem.-Naturwiss. Kl.

merkt werden, daß erst die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH, in der zum ersten Male allgemeine Punktmengen und moderne Methoden herangezogen wurden, diesen Fortschritt überhaupt ermöglichte[8]).

Wir betrachten mit HENSTOCK und MACBEATH zwei Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$ $(x \in E^1)$, welche dort beschränkt und nicht negativ sind und außerhalb eines Intervalls verschwinden. Man definiere die Funktion $h(x, y)$ $(x, y \in E^1)$ durch die Gleichung

$$h(x,y) = \begin{cases} g_1(x) + g_2(y) \mid g_1(x)\, g_2(y) > 0 \\ 0 \qquad\quad \mid g_1(x)\, g_2(y) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

und setze

$$g_0(u) = \sup\{h(x,y) \mid x + y = u\}. \tag{4.2}$$

Dann gilt der

Hilfssatz 1 (HENSTOCK-MACBEATH). *Sind g_1, g_2 und g_0 Borel-meßbar in E^1, so gilt für jedes endliche $\alpha > 0$*

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(u)^\alpha\, du\right\}^{1/\alpha+1} \geq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)^\alpha\, dx\right\}^{1/\alpha+1} + \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)^\alpha\, dx\right\}^{1/\alpha+1}. \tag{4.3}$$

An sich ist Satz 1 die naturgemäße Verallgemeinerung dieses wichtigen Satzes von HENSTOCK und MACBEATH auf den euklidischen Zahlenraum E^n. Es bedeute jetzt $\mathfrak{F}_\sigma$ die Gesamtheit aller nichtleeren, beschränkten F_σ-Teilmengen von E^n und es seien A_1, $A_2 \in \mathfrak{F}_\sigma$. Man setze wieder $A_0 = A_1 + A_2$. Dann ist zunächst $A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma$. Man setze die im Satz 1 herangezogenen Funktionen als Borel-meßbar voraus und betrachte eine auf A_0 definierte, positive, dort Borel-meßbare Funktion $f_0(x)$, welche in jedem Punkt x_0 von A_0 der Bedingung $f_0(x_0) \geq g_0(x_0)$ genügt. Dann kann folgende Verallgemeinerung des Hilfssatzes 1 bewiesen werden:

Satz 1'. *Man setze*

$$I(f_k \mid A_k) = \int_{A_k} f_k\, dv_1 \ldots dv_n \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{4.4}$$

Dann gilt

$$I(f_0 \mid A_0)^{1/\alpha+n} \geq I(f_1 \mid A_1)^{1/\alpha+n} + I(f_2 \mid A_2)^{1/\alpha+n}. \tag{4.5}$$

Will man den Beweis dieses Satzes durch Induktion erbringen, so muß man, wie ich es in einer vorherigen Note kurz getan habe[9]), folgende Verall-

---

149, 399—432 (1940)] und in der zusammen mit ERHARD SCHMIDT (Abhandl. Preuß. Akad. Wissensch. Jg. 1943, Mathem.-Naturwiss. Kl. Nr. 7, 1944, 18 S.) publizierten Abhandlung ist zum ersten Male gezeigt worden, daß diese Methoden tatsächlich dafür ausreichen. BONNESEN hielt allerdings (loc. cit. S. 147) von Verallgemeinerungen im Sinne TONELLIS, GROSS' und Nachfolger nicht viel. („Or du point de vue géométrique, ces sortes de hérissons ne sont pas particulièrement interessantes.")

[8]) Wie der Leser sieht, führt der Brunnsche Gedanke über den Lusternikschen Satz hinaus.

[9]) Über zwei allgemeine Sätze von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus, Det. Kongel. Norske Videnskabers Selskabs Forhandl. **28**, Nr. 33 (1955).

gemeinerung der Brunn-Minkowskischen Methode von HENSTOCK und MACBEATH heranziehen. Wir formulieren zunächst den Hilfssatz 1 in der Sprache des Satzes 1':

Hilfssatz 1'. *Es seien* $A_1, A_2 \in E^1$ *zwei Elemente von* $\mathfrak{F}_\sigma$ *und* $f_1(x), f_2(x)$ $(x \in E^1)$ *zwei dort zulässige, Borel-meßbare Funktionen. Gibt es dann in* $A_0 = A_1 + A_2$ $(A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma)$ *eine Borel-meßbare Funktion* $f_0(x)$ *mit der Eigenschaft*

$$(4.6) \quad f_0(x) \geq \sup\{(f_1(x')^{1/r} + f_2(x'')^{1/r})^r \mid x' + x'' = x,\ x' \in A_1,\ x'' \in A_2\},$$

so gilt für jedes endliche $r > 0$

$$(4.7) \quad I(f_0 \mid A_0)^{1/r+1} \geq I(f_1 \mid A_1)^{1/r+1} + I(f_2 \mid A_2)^{1/r+1}.$$

Definiert man die Funktionen f_k außerhalb ihrer Definitionsmengen A_k durch Null, so kann man die Ausdrücke $I(f_k \mid A_k)$ durch die Gleichungen

$$(4.8) \quad I(f_k \mid A_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, dx$$

definieren.

Man setze jetzt $f_k = g_k^r$ $(k = 0, 1, 2)$ und beachte, daß dann (4.6) in die Ungleichung

$$(4.9) \quad g_0(x) \geq \sup\{(g_1(x') + g_2(x'')) \mid x = x' + x'',\ x' \in A_1,\ x'' \in A_2\}$$

übergeht. Ferner setze man mit HENSTOCK und MACBEATH

$$\Phi_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x)^r\, dx \qquad (k = 1, 2),$$

und

$$(4.10) \quad x_k(\tau) = \inf\left\{x \;\middle|\; \int_{-\infty}^{x} g_k(t)^r\, dt \geq \tau \Phi_k\right\}.$$

Hierbei interessiert uns lediglich der Fall, wo $\Phi_1, \Phi_2 > 0$ gilt.

Die Funktionen $x_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ sind im Intervall $T_0 : (0, 1)$ eigentlich monoton und für jedes $\tau \in T_0$ definiert. Setzt man $x_0(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$, so gibt es zu jedem Punkt $u_0 \in x_0(T_0)$ einen und nur einen Punkt τ_0 mit der Eigenschaft $x_0(\tau_0) = u_0$ [10]).

Der entscheidende Schritt zum Beweis des Hilfssatzes 1' wird durch folgenden Hilfssatz getan.

Hilfssatz 2 (HENSTOCK-MACBEATH). *Sind* $g_1(x)$ *bzw.* $g_2(x)$ *in den Punktmengen* $A_1, A_2 (A_1, A_2 < E^1, A_1, A_2 \in \mathfrak{F}_\sigma)$ *Borel-meßbar und definiert man die Funktion* $g_0^*(x)$ $(x \in x_0(T_0))$ *durch die Gleichung*

$$g_0^*(x) = \begin{cases} g_1(x_1(\tau)) + g_2(x_2(\tau)) \mid x \in x_0(T),\ x = x_0(\tau) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst}, \end{cases}$$

[10]) HENSTOCK-MACBEATH: loc. cit. S. 188.

so gilt

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_0^*(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1} \geq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1} + \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1} \tag{4.11}$$

Für den Beweis dieses Satzes möge hier auf die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH verwiesen werden[11]). Ist dieser einmal erbracht, so folgt der Beweis des Hilfssatzes 1′ mit Rücksicht auf die Ungleichung $g_0(x) \geq g_0^*(x)$ $(x \in A_0)$ wegen der (vorausgesetzten) Borelschen Meßbarkeit von $g_0(x)$ ohne jegliche Schwierigkeit. Ist Hilfssatz 2 einmal bewiesen worden, so folgt der Beweis des Hilfssatzes 1′ durch die Substitution $g_k \to f_k^{1/r}$.

Sind jetzt A_1, A_2 zwei nichtleere, beschränkte Punktmengen von $\mathfrak{F}_\sigma$ und $A_0 = A_1 + A_2 (A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma)$, so setze man

$$g_{k|0}(x) = f_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2) \tag{4.12}$$

mit $x = x(x_1, \ldots, x_n)$ und für ein m mit $1 \leq m \leq n$

$$g_{k|m} = g_{k|m}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,dx_1 \ldots dx_m. \tag{4.13}$$

Hierbei spielt die Funktion $f_0(x)$ dieselbe Rolle wie im Satz 1, d.h. sie ist in A_0 Borel-meßbar (wie die f_1, f_2 in A_1 bzw. A_2) und genügt der Ungleichung (4.6). Sowohl f_0 als auch f_1 und f_2 sind hier ebenfalls außerhalb ihrer Definitionsmengen A_0 bzw. A_1 und A_2 durch Null definiert.

Da der Durchschnitt einer Borelschen, speziell einer F-Menge mit einer Hyperebene ebenfalls eine Punktmenge derselben Art ist, existieren stets die Integrale rechts und hängen nach fundamentalen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie durch die Gleichungen

$$g_{k|m+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{k|m}\,dx_{m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.14}$$

zusammen.

Es seien jetzt $x(u_1, \ldots, u_n)$, $y(v_1, \ldots, v_n)$ und $t(t_1, \ldots, t_n)$ $(t = x + y;$ $t_k = u_k + v_k)$ drei Punkte von E^n mit $x \in A_1$, $y \in A_2$. Man setze x, y bei festem m als Punkte der Unterräume

$$H_1^{n-m}: x_j = u_j; \qquad H_2^{n-m}: y_j = v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

voraus und nehme an, daß Satz 1′ für ein m, $1 \leq m < n$ in der Form

$$g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \leq g_{0|m}^{1/r+m} \tag{4.15}$$

gilt. Dann folgt zunächst daraus

$$\sup\{g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \mid u_{m+1} + v_{m+1} = t_{m+1}\} \leq g_{0|m}^{1/r+m}. \tag{4.16}$$

Jetzt verwende man die Ungleichung (4.7) mit $r+m$ an Stelle von r und $g_{1|m}, g_{2|m}$ für f_1, f_2. Geht man dann zur Definition von f_0 zurück, so sieht man, daß hier

$$f_0 \geq \sup\{g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \mid u_{m+1} + v_{m+1} = t_{m+1}\}$$

[11]) HENSTOCK-MACBEATH, S. 188.

genommen werden kann, also mit Rücksicht auf (4.16) gleich $g_{0|m}$. Somit erhält man die definitive Ungleichung

$$g_{0|m+1}^{1/r+m+1} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{0|m}\, dt_{m+1} \right\}^{1/r+m+1} \geq g_{1|m+1}^{1/r+m+1} + g_{2|m+1}^{1/r+m+1}.$$

Das erledigt die Induktion und somit auch den Beweis der Ungleichung (4.5), d.h. des Satzes 1'.

5. Bemerkungen zum Beweis des Hilfssatzes 1. Der Beweis, den HENSTOCK und MACBEATH für die grundlegende Ungleichung (4.11) geben, stützt sich, wenn man von zwei wichtigen topologischen Hilfssätzen absieht, im wesentlichen auf folgenden grundlegenden Satz:

Hilfssatz 3 (HENSTOCK-MACBEATH). *Ist T eine Borelsche Teilmenge von T_0, so gilt, sofern $\Phi_1, \Phi_2 > 0$ sind*

$$L(T) = \frac{1}{\Phi_1} \int_{x_1(T)} g_1(x)^\alpha\, dx = \frac{1}{\Phi_2} \int_{x_2(T)} g_2(x)^\alpha\, dx. \tag{5.1}$$

Will man nun bei der Auswertung des Integrals links in (4.11) die Veränderliche τ einführen und die Transformationstheorie des Lebesgueschen Integrals verwenden, so wird man zunächst auf die Funktionen

$$g_k(x_k(\tau)) = r_k(\tau) \qquad (k = 1, 2) \tag{5.2}$$

geführt. Sind diese Funktionen definiert, so wird es sich weiter darum handeln, die Summierbarkeit der Funktion

$$(r_1(\tau) + r_2(\tau))^\alpha \left(\frac{\Phi_1}{r_1(\tau)^\alpha} + \frac{\Phi_2}{r_2(\tau)^\alpha} \right) \tag{5.3}$$

nachzuweisen und darüber hinaus zu zeigen, daß ihr Integral von $\tau = 0$ bis $\tau = 1$ das Integral links in (4.11) nicht übersteigt. Ein Weg, diese Behauptungen zu beweisen, wäre etwa folgender:

Man setze für $\tau \in T_0$

$$1/\mathring{r}_k(\tau) = \begin{cases} 1/r_k(\tau) \mid r_k(\tau) > 0 \\ 0 \quad\;\; \mid r_k(\tau) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

und

$$\xi_k = \Phi_k \int_0^\tau \frac{d\tau}{\mathring{r}_k(\tau)^\alpha} \qquad (k = 1, 2). \tag{5.5}$$

Dann sind ξ_1, ξ_2 summierbar in T_0 und fast überall dort $\xi_k'(\tau) = \Phi_k / \mathring{r}_k(\tau)^\alpha$ Man bilde in der Tat die Mengen

$$E_k^{(m)} = \left\{ \tau \mid r_k(\tau) > \frac{1}{m} \right\} \qquad (k = 1, 2;\ m = 1, 2, \ldots), \tag{5.6}$$

und beachte noch, daß die Mengen

$$E_k = \{ \tau \mid r_k(\tau) = 0 \} \qquad (k = 1, 2) \tag{5.7}$$

das Maß Null haben[12]). Wir definieren jetzt die (monotonen Folgen) $(r_k^{(m)}(\tau))$ $(k=1,2)$ durch die Gleichungen

$$1/r_k^{(m)}(\tau) = \begin{cases} 1/r_k(\tau) & | \ \tau \in E_k^{(m)} \\ 0 & | \ \tau \notin E_k^{(m)}, \end{cases} \tag{5.8}$$

und berücksichtigen folgende Tatsachen:

1. Jede Funktion $1/r_k^{(m)}(\tau)$ ist meßbar. [Da $g_k(x)$ Borel-meßbar und $\tau(x_k)$ totalstetig.]

2. Die Integrale

$$\int \frac{d\tau}{(r_k^{(m)}(\tau))^\alpha} \qquad (k=1,2;\ m=1,2,\ldots) \tag{5.9}$$

erstreckt über T_0 sind gleichmäßig beschränkt.

Daraus kann man folgern[13]), daß die Grenzfunktionen

$$1/\mathring{r}_k(\tau)^\alpha = \lim_{m\to\infty} \{1/r_k^{(m)}(\tau)^\alpha\} \qquad (k=1,2)$$

summierbar sind und somit auch die Summe derselben.

Ist nun dies bewiesen, so wird man dazu geführt, zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\nu_0(T) = \Phi_1 \int \frac{d\tau}{\mathring{r}_1(\tau)^\alpha} + \Phi_2 \int \frac{d\tau}{\mathring{r}_2(\tau)^\alpha} = \nu_1(T) + \nu_2(T)$$

ein Borelsches Maß über dem Ring aller Borelschen Teilmengen T von T_0 darstellt.

Als letzter Schritt des Beweises wäre nun lediglich der Nachweis zu erbringen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)^\alpha \, dx \geq \int_{T_0} (\mathring{r}_1(\tau) + \mathring{r}_2(\tau))^\alpha \left(\frac{\Phi_1}{\mathring{r}_1(\tau)^\alpha} + \frac{\Phi_2}{\mathring{r}_2(\tau)^\alpha} \right) d\tau$$

gilt. Das wäre wieder wahrscheinlich möglich über die Funktion $g_0^*(x)$. Ist diese Ungleichung bewiesen, so genügt es, um (4.3) zu erhalten nur (3.7) anzuwenden.

Ich habe diesen Beweisversuch des Henstock-Macbethschen Satzes hier skizziert, nicht nur wie ich es in der Einleitung erwähnte, um die Schwierigkeiten aufzuzeichnen, die ich bei meinen ursprünglichen Bemühungen, auf anderem (dem Brunn-Minkowskischen näheren) Wege an diesen Satz heranzukommen, zu überwinden hatte, sondern auch um zu zeigen, wie der Weg von 3. viele dieser Schwierigkeiten umgeht und den allgemeinen Satz 1 leicht zu beweisen gestattet. In der nächsten Nummer soll jetzt eine wichtige Anwendung dieses Satzes gegeben werden.

6. Relativmaß von Punktmengen. Verallgemeinerung des Lusternikschen Satzes. Es sei 2^M ein vorgelegter Minkowskischer Halbmodul von E^n

[12]) Henstock-Macbeath: loc. cit. S. 189.

[13]) Man vgl. z.B. MacShane: Integration, S. 81. Princeton: Univ. Press 1947.

($2^M \subseteq 2^H$), d.h. eine Gesamtheit von nichtleeren, beschränkten Teilmengen von E^n mit der Eigenschaft, daß aus $A, B \in 2^M$ stets $A+B \in 2^M$ folgt. Als wichtige solche Teilmoduln sollen hier neben 2^H die Gesamtheit aller konvexen Punktmengen von E^n, die Gesamtheit aller offenen bzw. aller abgeschlossenen Punktmengen oder auch noch die Gesamtheit aller F-Mengen bzw. Borelschen Mengen von E^n angeführt werden. Bekanntlich bildet die Gesamtheit aller meßbaren Punktmengen von E^1 (also auch von E^n) keinen Minkowskischen Halbmodul[14]). Liegt nun 2^M vor, so heißt eine für jedes Element A von 2^M definierte Funktion $g_A(x)$ $(x=(x_1, \ldots, x_n))$ ein Minkowskisches Funktional, wenn diese folgenden Bedingungen genügt.

1. Für jedes $x \in A$ gilt

$$0 \leq g_A(x) < +\infty. \tag{6.1}$$

Im folgenden wird angenommen [falls nötig unter Weglassung der Teilmenge von A auf der $g_A(x)$ verschwindet[15])], daß $g_A(x)$ auf A der Ungleichung

$$g_A(x) > 0 \tag{6.2}$$

genügt.

2. $g_A(x)$ ist translationsinvariant. Das soll bedeuten: Geht A^τ aus A durch eine Translation τ hervor, so gilt $g_{A^\tau}(x^\tau) = g_A(x)$. Dabei ist $x^\tau = x+\tau$. Allgemeiner kann man an Stelle der Translationsinvarianz die Bewegungsinvarianz von $g_A(x)$ fordern.

3. $g_A(x)$ ist homogen vom Grade $r>0$ in bezug auf A, d.h. sie erfüllt die Bedingung

$$g_{hA}(hx) = h^r g_A(x). \tag{6.3}$$

4. $g_A(x)$ ist monoton in bezug auf A, d.h. sie genügt für $A \subseteq B$ $(A, B \in 2^M)$ der Ungleichung

$$g_A(x) \leq g_B(x) \qquad (x \in A). \tag{6.4}$$

5. $g_A(x)$ ist im folgenden Sinne superadditiv. Sind A, B zwei beliebige Elemente von 2^M, so gilt

$$g_{A+B}(x+y)^{1/r} \geq g_A(x)^{1/r} + g_B(x)^{1/r}, \tag{6.5}$$

für jedes Punktepaar x, y $(x \in A, y \in B)$. Aus (6.4) folgt ohne weiteres

$$g_{A+B}(x_0)^{1/r} \geq \sup\{g_A(x)^{1/r} + g_B(y)^{1/r} \mid x_0 = x+y\}. \tag{6.6}$$

Mit Hilfe eines Minkowskischen Funktionals $g_A(x)$ über einem Minkowskischen Halbmodul 2^M kann stets ein superadditives Mengenfunktional $I(g_A \mid A)$ [kürzer $I(g_A)$] über 2^M definiert werden, sobald dieses durch die Vorschrift

[14]) SIERPINSKI, W.: Sur la question de la mesurabilité de la base de M. HAMEL. Fundam. Math. 1, 105—111 (1920).

[15]) Im Falle, wo (Borelsche) Meßbarkeitsfragen auf dem Spiele stehen, wird angenommen, daß die Menge $\{x \mid g_A(x) = 0\}$ das Borelsche Maß Null hat.

von 1. definiert wird[16]). Sind die Mengen A F_σ-Mengen, so kann $I(g_A)$ auch direkt durch die Gleichung

$$I(g_A) = \int_A g_A(x)\, dx_1 \dots dx_n \tag{6.7}$$

definiert werden.

Der allgemeinste Satz in dieser Richtung scheint folgender zu sein:

Satz 2. *Es sei 2^M ein gegebener Minkowskischer Halbmodul von E^n und g_A ein darauf definiertes Minkowskisches Funktional. Dann ist $I(g_A)$ ein superadditives Mengenfunktional über 2^M. d.h. derart, daß dort für je zwei Elemente A, B von 2^M die Ungleichung*

$$I(g_{A+B})^{1/r+n} \geq I(g_A)^{1/r+n} + I(g_B)^{1/r+n} \tag{6.8}$$

gilt.

Der Beweis der Ungleichung (6.8) folgt aus dem Satz 1, wenn man dort (unter Zugrundelegung des Haldmoduls 2^H) $f_1 = g_{A_1}$, $f_2 = g_{A_2}$ nimmt und f_0 gleich g_{A_0} wählt. Ist $2^M = \mathfrak{S}_\sigma$, so folgt der Beweis von (6.8) aus dem Satz 1'. In diesem Falle ist $I(g_A)$ durch (6.7) definiert und somit muß neben den Bedingungen 1. bis 5. als Bedingung 6. noch die (Borelsche) Meßbarkeit von g_A gefordert werden.

Ein interessantes superadditives Mengenfunktional[17]) erhält man durch folgendes Verfahren: Es bedeute 2^G den Minkowskischen Halbmodul, der aus allen nichtleeren, offenen Punktmengen von E^n besteht. Ferner sei Λ_m $(1 \leq m \leq n)$ ein linearer Unterraum von E^n und 2^{M_m} ein Minkowskischer Halbmodul in Λ_m. Man nehme an, es gäbe eine isomorphe Abbildung $A \leftrightarrow K$ der Elemente A von 2^G auf die Elemente K von 2^{M_m}, d.h. so, daß aus $A_1 \leftrightarrow K_1$, $A_2 \leftrightarrow K_2$ stets $A_1 + A_2 \leftrightarrow K_1 + K_2$ folgt. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Λ_m den Nullpunkt 0 von E^n enthält. Ist dies getan, so soll K^x die parallelverschobene Punktmenge K darstellen, derart, daß der Punkt 0 (der mit K als fest verbunden gedacht wird) in den Punkt x kommt. Man bilde jetzt die Funktion

$$g_A(x|K) = \sup\{L_*(tK^x) \,|\, tK^x \subseteq A\} \tag{6.8}$$

für jedes Element $A \in 2^G$ und $K \leftrightarrow A$. Hierbei soll L_* das innere Lebesguesche Maß bedeuten. Wie man leicht feststellt, genügt $g_A(x|K)$ den Forderungen 1. bis 5., und zwar den Bedingungen 3. und 5. mit m an Stelle von r. Die Erfüllbarkeit dieser letzteren Bedingung ist allerdings Folgerung des klassischen Lusternikschen Satzes, der hier nicht bewiesen wird. Verwendet man in (6.1) die Funktion $g_A(x|K)$ (kurz g_A), so kann man behaupten:

[16]) Ist A nicht beschränkt, so kann $I(g_A|A)$ durch Ausschöpfung von A durch eine ansteigende Folge beschränkter Punktmengen definiert werden.

[17]) In der letzten Zeit ist auch HADWIGER auf allgemeinere superadditive Funktionale innerhalb Minkowskischer Halbmoduln konvexer Körper gestoßen. Eine schöne Darstellung der Hadwigerschen Ergebnisse findet der Leser in seiner Arbeit, Konkave Eikörperfunktionale, Monatsh. Math. **59**, 230—237 (1955). Auf die mehrere Jahre zurückliegende Leistung von HERBERT KNOTHE, komme ich in der nächsten Nummer zurück.

Satz 3. *Es gilt*

$$I(g_{A+B})^{1/m+n} \geq I(g_A)^{1/m+n} + I(g_B)^{1/m+n}. \tag{6.9}$$

Auf weitere geometrisch deutbare, superadditive Mengenfunktionale wird hier nicht eingegangen werden.

7. Der Satz von Herbert Knothe. Besteht 2^G aus allen offenen, konvexen Punktmengen von E^n, so kann in den Sätzen 2 und 3 die Einzigkeitsfrage restlos erledigt werden, sofern man nur annimmt, daß in (6.5) für homothetische A, B das Gleichheitszeichen steht. Der diesbezügliche Satz (in unvollständiger Form) wurde zunächst von HERBERT KNOTHE formuliert und (viel später) mit anderen Methoden bewiesen[18]).

Satz 4. *Besteht 2^G aus allen offenen, konvexen beschränkten Punktmengen von E^n und steht in* (6.5) *das Gleichheitszeichen, sobald A, B homothetisch sind, so gilt*

$$I(g_{A+B})^{1/r+n} \geq I(g_A)^{1/r+n} + I(g_B)^{1/r+n} \tag{7.1}$$

und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn A, B homothetisch sind.

Beweis. Man bilde, ähnlich wie in 3., A und B (A, B konvex und offen) auf das Innere des Würfels W_0 durch die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Transformation ab und beachte, daß der Ausdruck (3.6) (mit A, B an Stelle von A_1, A_2) zwischen g_0^{A+B} und

$$I = \left\{(g_0^A)^{1/r+n} + (g_0^B)^{1/r+n}\right\}^{r+n}$$

liegt. Sind nun diese Ausdrücke gleich, so muß für jedes $\tau \in W_0^*$

$$\left\{(g_n^A)^{1/r} + (g_n^B)^{1/r}\right\}^r \cdot \prod_1^n \left\{\frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} + \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B}\right\}$$

gleich I sein. Das hat nun zur Folge[19]), daß die Quotienten

$$\varphi_{k-1} = \frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} : \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B} \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{7.2}$$

---

[18]) Es entspricht nicht ganz dem Geist moderner Forschung, wenn ich diesen Satz als Ganzes KNOTHE zuschreibe. Was KNOTHE in seinem Bericht während der Mathematiker-Tagung in Tübingen im Jahre 1946 ohne Beweis mitgeteilt hat (man vgl. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen, H. Laupp, Tübingen 1946, S. 91—92), ist nur die Ungleichung (7.1). An Stelle der Voraussetzung (6.5) wird dort lediglich die Forderung der logarithmischen Konkavität von g_A (in bezug auf die Minkowskische lineare Kombination) gestellt, jedoch wird in dem kurzen Bericht kein Anhaltspunkt gegeben, wie man dann den Beweis durchführen soll. Später, im Juni 1956, nach Beendigung der Redaktion dieser Arbeit, hat mir Herr KNOTHE brieflich einen Beweis skizziert, der sich auf die zunächst von ihm entwickelte, allgemeine Methode der Sehnenpotenzenintegrale stützt. Es besteht jedoch kaum Zweifel, daß er auch auf den vollen Satz 4 gekommen wäre, falls er in der eingeschlagenen Richtung weitergeforscht hätte. Aus diesem Grunde scheint mir die Benennung des Satzes nach ihm vollkommen gerechtfertigt.

[19]) Man vgl. z. B. Fußnote [6]).

mit $g^A_{n+1}=g^B_{n+1}=1$ die Bedingungen

$$\varphi_k=\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\qquad(k=1,2,\ldots,n)$$

und $\varphi_n=\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)^r$ erfüllen müssen. Multipliziert man die Gln. (7.2) miteinander, so erhält man

$$\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{r+n}=g^A_0/g^B_0$$

und mithin ist φ konstant.

Nun ist mit $x(x_1,\ldots,x_n)\in A$, $y(y_1,\ldots,y_n)\in B$ und $x_1=x_1(\tau_1)$, $y_1=y_1(\tau_1)$

$$\frac{g^A_1(x_1)}{g^A_0}\frac{dx_1}{d\tau_1}=\frac{g^B_1(x_1)}{g^B_0}\frac{dy_1}{d\tau_1} \tag{7.3}$$

und somit auch

$$\frac{dx_1}{d\tau_1}=C\frac{dy_1}{d\tau_1} \tag{7.4}$$

mit einem konstanten $C>0$. Jetzt denke man sich die Körper A, B auf Schwerpunkte der Massenbelegungen g^A_n bzw. g^B_n bezogen. Dann gilt

$$\frac{1}{g^A_0}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1 g^A_1(x_1)\,dx_1=\frac{1}{g^B_0}\int_{-\infty}^{+\infty}y_1 g^B_1(y_1)\,dy_1=0$$

und somit muß $x_1(\tau_1)=C\,y_1(\tau_1)$ sein. Läßt man hier $\tau_1\to 1$ konvergieren, so erhält man das Ergebnis (da die Richtung der x_1-Achse beliebig gewählt werden kann), daß die Stützfunktionen p_A, p_B der beiden Körper A, B proportional sein müssen. Das beweist die Homothetie von A und B. Da nun in diesem Falle auch das Gleichheitszeichen in (6.5) gilt, so muß in (7.1) das Gleichheitszeichen stehen. Wie man leicht feststellt, können die Sätze 3 und 4 ohne wesentliche Schwierigkeit auf diejenigen Halbmoduln übertragen werden, die aus allen offenen Punktmengen bestehen, die sich als Vereinigung von endlich vielen offenen, konvexen Punktmengen darstellen lassen. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Herrn Dr. W. Felscher habe ich für kritische Durchsicht des druckfertigen Manuskripts zu danken. Ebenfalls Herrn Dr. W. Jehne für kritische Hilfe bei der Korrekturarbeit.

Mathematisches Institut der Freien Universität, Berlin-Dahlem

(Eingegangen am 15. Februar 1957)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 126—150 (1957)

Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen

Von
BERTRAM HUPPERT

Eine Übersicht über alle mehrfach transitiven Permutationsgruppen ist trotz zahlreicher Bemühungen bis heute nicht gelungen. Man weiß nicht einmal, ob es außer den symmetrischen und alternierenden Gruppen noch weitere sechsfach transitive Gruppen gibt. Die dreifach transitiven, auflösbaren Gruppen (sogar eine etwas umfangreichere Klasse) wurden kürzlich bestimmt (HUPPERT [2]); es zeigte sich, daß die symmetrischen Gruppen in drei und vier Ziffern die einzigen Gruppen dieser Art sind. Dies legt die Vermutung nahe, daß es überhaupt nur wenige mehrfach transitive, auflösbare Permutationsgruppen gibt.

Der Grad einer zweifach transitiven (sogar einer primitiven), auflösbaren Permutationsgruppe ist bekanntlich eine Primzahlpotenz, und zu jedem Primzahlpotenzgrad p^n lassen sich triviale Beispiele von zweifach transitiven, auflösbaren Gruppen angeben, nämlich die Gruppe $\mathfrak{S}(p^n)$ aller semilinearen Abbildungen

$$x \to a\, x^{p^b} + c$$

über dem Galois-Feld $GF(p^n)$ und geeignete Untergruppen dieser Gruppe. Es soll nun gezeigt werden, daß dies, abgesehen von endlich vielen Ausnahmen, schon alle zweifach transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen sind. Wir beweisen folgenden Satz:

Hauptsatz. Sei $\mathfrak{G}$ eine zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe vom Grad p^n. Dann gilt bei geeigneter Bezeichnung der permutierten Symbole $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{S}(p^n)$, ausgenommen die Grade $p^n = 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 23^2, 3^4$.

Für die ausgenommenen Grade treten noch weitere Typen auf. Alle diese geben wir, entsprechend der für primitive, auflösbare Permutationsgruppen immer möglichen Beschreibungsweise, als inhomogene lineare Abbildungen an. Da diese Gruppen stets die volle Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ enthalten, genügt die Angabe derjenigen Untergruppe $\mathfrak{G}^0$, welche den Vektor $(0, \ldots, 0)$ fest läßt. Die gesuchte Permutationsgruppe ist dann das Produkt von $\mathfrak{G}^0$ mit der vollen Translationsgruppe $\mathfrak{T}$.

$$p^n = 3^2\colon \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,1} = \{A, B, C, D\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,2} = \{A, B, C\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei alle Matrixelemente aus $GF(3)$ zu nehmen sind.

$p^n = 5^2$: $\mathfrak{G}^0_{5^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$, $\mathfrak{G}^0_{5^2,2} = \{A, B, C, 2E\}$
und $\mathfrak{G}^0_{5^2,3} = \{A, B, C\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

über $GF(5)$.

$p^n = 7^2$: $\mathfrak{G}^0_{7^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{7^2,2} = \{A, B, C, D\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

über $GF(7)$.

$p^n = 11^2$: $\mathfrak{G}^0_{11^2,1} = \{A, B, C, D, 4E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{11^2,2} = \{A, B, C, 4E\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

über $GF(11)$.

$p^n = 23^2$: $\mathfrak{G}^0_{23^2} = \{A, B, C, D, 2E\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

über $GF(23)$.

$p^n = 3^4$: $\mathfrak{G}^0_{3^4,1} = \{A, B, C, D, F, G\}$, $\mathfrak{G}^0_{3^4,2} = \{A, B, C, D, F, G^2\}$
und $\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $GF(3)$.

In § 3 und § 4 geben wir Relationen zwischen den Erzeugenden der Gruppen $\mathfrak{G}^0$ an, welche den Erweiterungstypus dieser Gruppen übersichtlich beschreiben.

Die Gruppen $\mathfrak{G}^0_{5^3,3}$, $\mathfrak{G}^0_{7^3,2}$, $\mathfrak{G}^0_{11^3,2}$, $\mathfrak{G}^0_{23^3}$ sind multiplikative Gruppen von endlichen Fastkörpern und finden sich in ZASSENHAUS [5], S. 216.

Nach Vorbereitungen und Hilfssätzen in § 1 bringen wir in § 2 den Beweis des Hauptsatzes in mehreren Schritten. Dabei erhalten wir gleichzeitig schon weitgehende Informationen über die Struktur der „Ausnahmegruppen". In § 3 bestimmen wir dann alle Ausnahmegruppen vom Grad 3^4; dieser Fall ist der schwierigste, aber auch weitaus interessanteste. Die Ermittlung aller Ausnahmegruppen der Grade 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 23^2, welche keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, folgt in § 4.

Beim Beweis des Hauptsatzes benutzen wir die Ergebnisse von HUPPERT [3], § 1 und § 2, insbesondere die Hilfssätze I bis III aus § 2. Die Kenntnis der weiteren Resultate von HUPPERT [3] ist für die vorliegende Arbeit nicht nötig.

Bezeichnungen

$|\mathfrak{G}|$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wobei auch $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ zugelassen ist; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $A(\mathfrak{G})$ = Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p$ = p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G}$ = p-Sylow-Komplement von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $(X, Y) = X Y X^{-1} Y^{-1}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ = Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}_\alpha(\mathfrak{G})$ das Erzeugnis aller X^{p^α} mit $X \in \mathfrak{G}$, mit $\Omega_\alpha(\mathfrak{G})$ das Erzeugnis aller $X \in \mathfrak{G}$ mit $X^{p^\alpha} = E$; $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ = Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; mit p und q bezeichnen wir stets Primzahlen; ist $p^a \| m$, aber $p^{a+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^a \top m$.

§ 1. Vorbemerkungen und Hilfssätze

Die zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ enthält einen eindeutig bestimmten kleinsten Normalteiler $\mathfrak{T}$; dieser ist abelsch und besteht aus lauter regulären Permutationen. Die permutierten Symbole bezeichnen wir als Ziffern. Als Menge der Ziffern führen wir die p^n Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in GF(p)$ ein. Dann können wir annehmen, daß $\mathfrak{T}$ aus den Permutationen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t} \end{pmatrix},$$

den „Translationen" besteht; denn abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern ist die reguläre Darstellung von $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt. $\mathfrak{G}^0$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche den Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ fest läßt. Da $\mathfrak{T}$ regulär ist, gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{G}^0 \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. In $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{T}$ eigener Zentralisator. Ist $G \in \mathfrak{G}^0$, so haben wir

$$G = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ f(\mathfrak{x}) \end{pmatrix},$$

wobei $f(\mathfrak{x})$ eine geeignete Vektorfunktion mit $f((0, 0, \ldots, 0)) = (0, 0, \ldots, 0)$ ist. Sei T ein beliebiges Element von $\mathfrak{T}$. Aus $GTG^{-1} = T'$ mit

$$T = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T' = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t}' \end{pmatrix}$$

folgt[1]) $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{t}) = f(\mathfrak{x}) + \mathfrak{t}'$ für alle Vektoren $\mathfrak{x}$. Für $\mathfrak{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ ergibt sich wegen $f((0, 0, \ldots, 0)) = (0, 0, \ldots, 0)$ dann $f(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$, also $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{t}) = f(\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{t})$. Da aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}$ beliebig sind, folgt, daß f eine lineare Abbildung bewirkt. Wir können daher $\mathfrak{G}^0$ als eine Gruppe von homogenen linearen Abbildungen vom Grad n über $GF(p)$ auffassen. Die zweifache Transitivität von $\mathfrak{G}$ hat zur Folge, daß $\mathfrak{G}^0$ die von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren transitiv permutiert. Insbesondere ist also $\mathfrak{G}^0$ irreduzibel über $GF(p)$, und es gilt $p^n - 1 \mid\mid \mathfrak{G}^0 \mid$.

Fortan werden wir stets $\mathfrak{G}^0$ als Untergruppe von $GL(n, p)$ auffassen.

Hilfssatz 1. Sei $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv und auflösbar vom Grad p^n. Sei $\mathfrak{U}$ ein über $GF(p)$ reduzibler Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann sind die Sylow-Gruppen $\mathfrak{U}_q$ von $\mathfrak{U}$ für $q > 2$ zyklisch, für $q = 2$ zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen. Ist insbesondere $\mathfrak{U}$ eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung, so ist $\mathfrak{U}$ selbst zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe.

Beweis. Ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}^0$ und ist $\mathfrak{U}$ reduzibel über $GF(p)$, so ist $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ eine imprimitive, nichtreguläre Permutationsgruppe (s. HUPPERT [2]). Dann ist $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ als imprimitiver, nichtregulärer Normalteiler der zweifach transitiven Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ eine „Frobenius-Gruppe", d.h. die Identität ist die einzige Permutation von $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, welche zwei Ziffern fest läßt (MANNING [4], S. 88). $\mathfrak{U}$ ist daher eine Gruppe, deren sämtliche Matrizen nicht den Eigenwert $+1$ haben. Solche Gruppen sind von ZASSENHAUS in [5] untersucht worden. Von den dortigen Ergebnissen benötigen wir nur den Satz 3: Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von Matrizen ohne Eigenwert $+1$ und ist $|\mathfrak{H}|$ das Produkt von zwei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen, so ist $\mathfrak{H}$ zyklisch. Wenden wir diesen Satz auf die Untergruppen von $\mathfrak{U}$ an! Es ergibt sich, daß $\mathfrak{U}$ keine Untergruppe vom Typ (q, q) enthält. Daraus folgt sofort, daß die Sylow-Gruppen $\mathfrak{U}_q$ von $\mathfrak{U}$ nur eine Untergruppe der Ordnung q haben. Dann sind die $\mathfrak{U}_q$ zyklisch für $q > 2$ und zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen für $q = 2$ (ZASSENHAUS [6], S. 112).

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{G}$ eine primitive und auflösbare Permutationsgruppe vom Grad p^n. Besitzt $\mathfrak{G}^0$ einen über $GF(p)$ irreduziblen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$, so gilt bei geeigneter Bezeichnung der Ziffern $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{S}(p^n)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ der abelsche, über $GF(p)$ irreduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann ist $\mathfrak{A}$ zyklisch; ist A ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$, so ist das charakteristische Polynom $\varphi(x)$ von A irreduzibel über $GF(p)$ (HUPPERT [3], Hilfssatz 2). Alle Eigenwerte von A sind daher über $GF(p)$ konjugiert, sind also,

[1]) Abbildungen sind stets von rechts nach links zu lesen.

wenn wir $|\mathfrak{A}| = a$ setzen, primitive a-te Einheitswurzeln. Da jeder solche Eigenwert ζ der irreduziblen Gleichung $\varphi(x) = 0$ vom Grad n über $GF(p)$ genügt, so gilt $\zeta \in GF(p^n)$, daher $a \mid p^n - 1$. Es ist $GF(p)(\zeta) = GF(p^n)$.

Die reguläre Darstellung von ζ auf $GF(p^n)$ vermittels $x \to \zeta x$ liefert eine Matrix B vom Grad n mit Koeffizienten aus $GF(p)$. Wir legen für $GF(p^n)$ über $GF(p)$ die Basis $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ zugrunde. Ist

$$\varphi(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

so erhalten wir

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

B hat den Eigenwert ζ. Somit haben A und B den Eigenwert ζ gemeinsam. Da aber ζ über $GF(p)$ genau n Konjugierte hat, haben A und B über $GF(p)$ das gleiche irreduzible charakteristische Polynom, sind mithin über $GF(p)$ ähnlich. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix P vom Grad n mit Koeffizienten aus $GF(p)$ und mit $PAP^{-1} = B$. Wir deuten jetzt P als Permutation aus der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^n}$. Dann gilt $P\mathfrak{T}P^{-1} = \mathfrak{T}$ und

$$\overline{\mathfrak{G}} = P\mathfrak{G}P^{-1} = P\mathfrak{T}P^{-1}P\mathfrak{G}^0P^{-1} = \mathfrak{T}P\mathfrak{G}^0P^{-1} \triangleright \mathfrak{T}P\mathfrak{A}P^{-1} = \mathfrak{T}\{B\}.$$

Also unterscheiden sich $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ nur durch die Bezeichnung der permutierten Ziffern. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, daß nach Einführung der neuen Ziffernmenge $GF(p^n)$ gilt

$$\mathfrak{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+t \end{pmatrix} \middle| \, t \in GF(p^n) \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \{A\} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} x \\ \zeta x \end{pmatrix}.$$

Sei nun $G \in \mathfrak{G}^0$, $G = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ mit $f(0) = 0$. Zu Beginn dieses Paragraphen sahen wir (mit $\mathfrak{x}$ statt x), daß $f(x+t) = f(x) + f(t)$, also f eine lineare Abbildung über $GF(p)$ ist.

G bewirkt einen Automorphismus in $\mathfrak{A}$. Somit gilt mit einer geeigneten ganzen Zahl u, welche zu a teilerfremd ist, für alle ganzen s

$$A^{su} G = G A^s.$$

Daraus folgt

$$\zeta^{us} f(x) = f(\zeta^s x)$$

für alle $x \in GF(p^n)$. Setzen wir speziell $x = 1$, so bekommen wir

$$\zeta^{us} f(1) = f(\zeta^s).$$

Mit $f(1) = b^{-1}$ erhalten wir

$$\zeta^{us} = b f(\zeta^s),$$

also

$$b f(\zeta^s) f(x) = f(\zeta^s x).$$

Für $g(x) = bf(x)$ ergibt sich dann

$$g(\zeta^s)\, g(x) = g(\zeta^s x).$$

Auch $g(x)$ ist eine lineare Abbildung über $GF(p)$. Da aber ζ ein erzeugendes Element von $GF(p^n)$ über $GF(p)$ ist, gilt nun für alle x, y aus $GF(p^n)$ die Gleichung $g(xy) = g(x)\, g(y)$. Mithin ist $x \to g(x)$ ein Automorphismus von $GF(p^n)$. Dann hat aber $g(x)$ bekanntlich die Gestalt

$$g(x) = x^{p^e}.$$

Damit erhalten wir nun

$$f(x) = f(1)\, x^{p^e},$$

womit nachgewiesen ist, daß ganz $\mathfrak{G}$ aus semilinearen Abbildungen über $GF(p^n)$ besteht.

Hilfssatz 3. Ist $\mathfrak{G}^0$ transitiv auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren, so ist $\mathfrak{G}^0$, aufgefaßt als Untergruppe von $GL(n, p)$, primitiv über $GF(p)$. Insbesondere zerfällt dann jeder über $GF(p)$ reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ in lauter äquivalente irreduzible Bestandteile.

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{G}^0$ sei imprimitiv über $GF(p)$. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die Imprimitivitätsgebiete $\mathfrak{r}_i$ von $\mathfrak{G}^0$ durch Gleichungen der Gestalt $x_s = 0$ $(s = (i-1)j+1, \ldots, ij$ mit $n = jk)$ beschrieben werden. Dann liegt der Vektor $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ im ersten Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_1$, sein Bild unter einem Element $G \in \mathfrak{G}^0$ etwa im i-ten Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_i$. Der Bildvektor von $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ hat dann sicher Komponenten mit dem Wert 0, ist also von dem Vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ verschieden. Das widerspricht jedoch der Transitivität von $\mathfrak{G}^0$ auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren. Also kann $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ nicht imprimitiv sein. Mit Hilfe von [3], Satz 2 folgt nun, daß jeder über $GF(p)$ reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ in äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Bestandteile zerfällt.

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{G}^0$ transitiv auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren. $\mathfrak{G}^0$ enthalte eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ als Normalteiler. Fassen wir wieder $\mathfrak{G}^0$ als Untergruppe von $GL(n, p)$ auf, so ist dann $\mathfrak{Q}$ irreduzibel über $GF(p)$.

Beweis. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ ist sicher $p \neq 2$; denn eine über $GF(p)$ irreduzible Gruppe besitzt keinen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von p-Potenzordnung ([3], Hilfssatz 1). Die Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ besitzt über jedem Primkörper $GF(p)$ mit $p \neq 2$ genau eine treue, irreduzible Darstellung; diese ist absolut irreduzibel und wird vermittelt durch die Matrizen (s. [3], S. 506)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$$

mit $i^2 + j^2 = -1$.

Angenommen, $\mathfrak{Q}$ zerfalle über $GF(p)$ bei geeigneter Wahl der Koordinaten. Die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{Q}$ sind dann äquivalent zu der eben angegebenen Darstellung von $\mathfrak{Q}$, sind daher alle äquivalent und sogar absolut

irreduzibel. Dann lassen sich alle Matrizen aus $\mathfrak{G}^0$ in Kronecker-Produkte $G_1 \times G_2$ zerlegen, wobei die G_i bis auf Faktoren aus $GF(p)$ bestimmt sind ([3], Satz 3). Dabei ist Grad $G_2 = 2$. Ein beliebiges $G \in \mathfrak{G}^0$ hat nun die Gestalt

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots \\ a_{11}b_{21} & \dots \\ a_{21}b_{11} & \dots \\ a_{21}b_{21} & \dots \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Das Bild des Vektors $(1, 0, 0, \dots, 0)$ unter G ist dann

$$(a_{11}b_{11},\ a_{11}b_{21},\ a_{21}b_{11},\ a_{21}b_{21}, \dots),$$

und dieser Vektor ist sicher verschieden von $(1, 0, 0, 1, \dots)$. Das widerspricht aber der Transitivität von $\mathfrak{G}^0$ auf den von $(0, 0, \dots, 0)$ verschiedenen Vektoren. Also kann $\mathfrak{G}^0$ nicht über $GF(p)$ reduzibel sein.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

Nach den Hilfssätzen 2 und 3 können wir annehmen, daß alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ zerfallen, und zwar in lauter äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Teile. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall A. Alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ zerfallen über $GF(p)$ in lauter gleiche Bestandteile vom Grad 1, bestehen also nur aus Matrizen der Gestalt aE.

Fall B. Es gibt einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}^0$, der über $GF(p)$ in lauter äquivalente, irreduzible Bestandteile vom Grad k mit $1 < k < n$ zerfällt.

Schritt 1. Vorläufige Betrachtung des Falles A.

Nun besteht jeder abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ aus Matrizen der Gestalt aE mit $a \in GF(p)$. Alle diese Matrizen bilden den maximalen abelschen Normalteiler $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)$ von $\mathfrak{G}^0$. Offenbar ist $|\mathfrak{Z}| \mid p-1$ und $p \neq 2$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler nichtabelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Wir können annehmen, daß es einen solchen gibt; denn andernfalls wäre $\mathfrak{G}^0$ abelsch, und wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ wäre $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 2 eine Gruppe von semilinearen Abbildungen über $GF(p^m)$. Nun sind wegen $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{G}^0$ die Voraussetzungen von [3], Hilfssatz I mit $\mathfrak{Z}$ statt $\mathfrak{A}$ erfüllt. Daher ist $\mathfrak{N}$ nilpotent von der Klasse 2 und hat Primzahlpotenzordnung q^b ([3], Hilfssatz I.1). Ferner ist $q \mid p-1$ ([3], Hilfssatz I.6). Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{Z}$ ([3], Hilfssatz I.3 mit $\mathfrak{Z}$ statt $\mathfrak{A}$) gilt $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$.

Schritt 2. Ausschließung des Falles A für $q > 2$.

$\mathfrak{N}$ ist irreduzibel über $GF(p)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{N}$ (da von ungerader Ordnung) nach Hilfssatz 1 zyklisch, entgegen $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{E}$. Nach [3], Hilfssatz III.3 ist wegen $q \mid p-1$ dann $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel und $n = q^m$ mit $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n^2 = q^{2m}$.

Da $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel ist, folgt aus dem Schurschen Lemma $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ [mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$] ist nach [3], Hilfssatz II.2 [mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$] isomorph zu einer Untergruppe des direkten Produktes von $2m$ zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ isomorphen Gruppen. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{Z}$ und [3], Hilfssatz I.4 ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q$, daher $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})| \mid q^{2m}$. Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$. Damit erhalten wir nun

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{Z}|\,|\mathfrak{Z}|\,|C(2m, q)|\,q^{2m}(p-1).$$

Mit $n = q^m$ und $p^n - 1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ ist nun

$$\text{(A)} \qquad p^{q^m} - 1 \mid (p-1)\,q^{2m}(q^{2m}-1)\,q^{2m-1}(q^{2m-2}-1)\ldots(q^2-1)\,q.$$

Unter Beachtung von $q \mid p-1$ ergibt sich daraus

$$(p-1)^{q^m} < (p-1)^{1+2m+2m+2m-1+\cdots+2+1} = (p-1)^{1+3m+2m^2},$$

also $q^m < 1 + 3m + 2m^2$.

$q = 3$: Aus $3^m < 1 + 3m + 2m^2$ folgt $m \leq 3$.

$q = 5$: Nun bleibt nur die Möglichkeit $m = 1$.

$q > 7$: Die Ungleichung $q^m < 1 + 3m + 2m^2$ ist nun für kein m erfüllt.

Es sind also noch die Fälle $q = 3$ und $q = 5$ zu betrachten.

Für $q = 3$ ist $3 \mid p - 1$. Daraus ergibt sich leicht

$$\text{(X)} \qquad 3^s \top \frac{p^{3^s}-1}{p-1}.$$

Für $m = 1$ haben wir die Beziehung $\frac{p^3-1}{p-1} \mid 3^2(3^2-1)3$. Dann ist wegen (X) sogar $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1 \mid 3\,2^3 = 24$. Aber wegen $p > 3$ ist dies unmöglich.

Im Falle $m = 2$ ist gefordert $\frac{p^{3^2}-1}{p-1} \mid 3^4(3^4-1)\,3^3(3^2-1)3$. Durch genaue Abschätzung der 3-Potenz gemäß (X) bekommen wir $\frac{p^{3^2}-1}{p-1} \mid 3^2 2^7 5$ und dann $p^8 < 3^2 2^7 5 < 2^{4+7+3} = 2^{14}$. Nun ergibt sich $p < 4$, was aber wegen $p \equiv 1\,(3)$ unmöglich ist.

Wenn wir sofort (X) berücksichtigen, erhalten wir für $m = 3$

$$\frac{p^{3^3}-1}{p-1} \mid 3^3(3^6-1)\,(3^4-1)\,(3^2-1).$$

Es folgt $p^{26} < 3^{3+6+4+2} = 3^{15}$; aber wegen $p > 3$ geht dies nicht.

Für $q = 5$ bekommen wir mit $m = 1$ und $5 \mid p - 1$ wegen $5^s \top \frac{p^{5^s}-1}{p-1}$ [analog (X)] $\frac{p^5-1}{p-1} \mid 5(5^2-1)$, daher $p^4 < 120$ und dann $p < 5$, entgegen der Feststellung $5 \mid p - 1$.

Damit haben wir gesehen, daß Fall A für $q > 2$ nicht eintreten kann.

Schritt 3. Eine Abschätzung von $|\mathfrak{G}^0|$ im Falle A für $q = 2$.

Nach [3], Hilfssatz I.5 haben die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4. In Schritt 1 zeigten wir schon, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$.

9272-62

Zunächst nehmen wir an, daß $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ reduzibel ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Da aber alle Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben, ist $\mathfrak{N}$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8. In Hilfssatz 4 war jedoch gezeigt worden, daß $\mathfrak{N}$ unter diesen Umständen nicht über $GF(p)$ reduzibel sein kann.

Also ist $\mathfrak{N}$ irreduzibel über $GF(p)$. Über einem genügend großen Erweiterungskörper von $GF(p)$ zerfalle $\mathfrak{N}$ in s absolut irreduzible Bestandteile $F_i(\mathfrak{N})$; diese sind treu und haben alle den gleichen Grad k ([3], Hilfssatz 3). Auf die Darstellungen $F_i(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ können wir nun [3], Hilfssatz III.2 anwenden und erhalten $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = k^2 = 2^{2m}$, also $k = 2^m$ und dann $n = s2^m$. Ist $p \equiv 1\,(4)$, so ist $\mathfrak{N}$ nach [3], Hilfssatz III.3 (mit $f = 1$) absolut irreduzibel und daher $s = 1$. Da die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ zyklisch ist, folgt $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,4$. Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist wegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,p-1$ sicher $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$.

Da $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}$ nach [3], Hilfssatz II.1. Aus [3], Hilfssatz II.2 folgt $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|\,|\,|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|^{2m}$. [3], Hilfssatz II.3 zeigt uns, daß $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$ isomorph ist. Damit bekommen wir folgende Beziehungen:

(B) $$p^{s2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2$$

für $p \not\equiv 1\,(4)$

und

(C) $$p^{2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^{4m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2$$

für $p \equiv 1\,(4)$.

Die maximale 2-Potenz, welche in

$$\frac{p^{s2^m}-1}{p-1}$$

auftritt, läßt sich genauer abschätzen. Für $p \equiv 1\,(4)$ gilt nämlich [entsprechend (X) auf S. 133]

(Y) $$2^m \top \frac{p^{2^m}-1}{p-1}.$$

Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist jedenfalls $p^2 \equiv 1\,(4)$. Aus (B) folgt nun

$$\frac{p^{s2^m}-1}{p-1} = \frac{p^{s2^m}-1}{p^2-1}\,(p+1)\,|\,2^{2m}|\,C(2m, 2)|$$

und dann

$$p^{s2^m} - 1 \,|\, (p^2-1)\,2^{2m}\,|\,C(2m, 2)|.$$

Mit $s = r2^t$, $2 \nmid r$ ist aber wegen $p^2 \equiv 1\,(4)$

(Z) $$2^{m+t-1} \top \frac{(p^2)^{s2^{m-1}}-1}{p^2-1}.$$

Somit bekommen wir als verschärfte Teilbarkeitsbedingungen:

(B′) für $p \not\equiv 1\,(4)$ mit $s = r\,2^t$ und $2 \nmid r$

$$p^{s\,2^m} - 1 \,|\, (p^2-1)\,2^{m+t-1}(2^{2m}-1)(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1),$$

(C′) für $p \equiv 1\,(4)$

$$p^{2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^m(2^{2m}-1)(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1).$$

Nun schätzen wir m ab:

I. Sei zunächst $p = 3$. Dann liefert uns (B′)

$$2^{r\,2^{m+t}} < 2^{3+m+t-1+m(m+1)}, \quad \text{also} \quad r\,2^{m+t} < 2 + t + 2m + m^2.$$

Mit $m+t = x$ folgt $2^x < 2 + 2x + x^2$, daher $x \leqq 5$ und auch $m \leqq 5$. Eine einfache Rechnung zeigt nun, daß für $m \leqq 3$ stets $r = 1$ und $t = 0$ oder $t = 1$ gilt, für $m = 4, 5$ immer $r = 1$ und $t = 0$, d.h. $s = 1$.

II. Nun sei $p > 3$ und $p \not\equiv 1\,(4)$. Unter Beachtung von $p - 1 > 4$ bekommen wir jetzt aus (B′) die Beziehung

$$(p-1)^{r\,2^{m+t}} < (p-1)^{1+3/2+m/2+t/2-1/2+m(m+1)/2}.$$

Dabei haben wir von $p + 1 < (p-1)^{3/2}$ Gebrauch gemacht. Nun wird

$$r\,2^{m+t} < 2 + t/2 + m + m^2/2.$$

Mit $m + t = x$ erhalten wir $2^x < 2 + x + x^2/2$, daraus $x \leqq 3$. Dann ist auch $m \leqq 3$, und eine einfache Rechnung zeigt, daß stets $s = 1$ gilt.

III. Schließlich sei $p \equiv 1\,(4)$. Aus (C′) entnehmen wir nun

$$(p-1)^{2^m} < (p-1)^{1+m/2+m(m+1)/2}$$

und dann

$$2^m < 1 + m + m^2/2, \quad \text{daher} \quad m \leqq 3.$$

Als Zwischenergebnis vermerken wir:

1. Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \,|\, (p-1)\,2^{2m}\,|\overline{\mathfrak{G}}|$ mit $n = s\,2^m$. Dabei ist $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer auflösbaren Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, 2)$. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist irreduzibel über $GF(2)$, da $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist. Für $p > 3$ gilt $m \leqq 3$ und $s = 1$. Für $p = 3$ ist $m \leqq 5$ und $s = 1$ für $m = 4, 5$, $s \leqq 2$ für $m \leqq 3$.

2. Für $p \equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \,|\, (p-1)\,2^{4m}\,|\overline{\mathfrak{G}}|$. Nun ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $C(2m, 2)$ mit $m \leqq 3$. Ferner ist $n = 2^m$.

Die weitere Untersuchung wird nun auf eine Teilbarkeitsrelation für $|\overline{\mathfrak{G}}|$ hinauslaufen. Diese stellen wir zunächst zurück und behandeln den Fall B.

Schritt 4. Vorläufige Betrachtung des Falles B.

Sei $\mathfrak{A}$ der nach unserer Annahme vorhandene abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$, welcher in r äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Teile $L(\mathfrak{A})$ des Grades $k > 1$ zerfällt. Es ist $n = kr$.

$\mathfrak{A}$ ist zyklisch, da es von $L(\mathfrak{A})$ treu und irreduzibel dargestellt wird ([3], Hilfssatz 2). Wir können $\mathfrak{A}$ maximal wählen, so daß $\mathfrak{A}$ in keinem abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ echt enthalten ist. Sei A ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$. Das charakteristische Polynom von A ist, entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in r zu $L(\mathfrak{A})$ äquivalente Teile, die r-te Potenz eines über $GF(p)$ irreduziblen Polynoms. Die Eigenwerte von A, welche alle mit der genauen Vielfachheit r vorkommen, genügen also einer über $GF(p)$ irreduziblen Gleichung vom Grad k, liegen daher in $GF(p^k)$. Mithin ist $|\mathfrak{A}| | p^k - 1$.

Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}^0$ besteht aus Matrizen der Gestalt

$$(C_{ij}) \qquad i,j = 1, 2, \ldots, r,$$

wobei die Teilmatrizen C_{ij} im Zentralisator von $L(\mathfrak{A})$ liegen. Sei $V = L(A)$. Wegen der Separabilität der charakteristischen Gleichung von V über $GF(p)$ hat dann V lauter verschiedene Eigenwerte. Die mit V vertauschbaren Matrizen sind daher bekanntlich Polynome in V. Da die charakteristische Gleichung von V über $GF(p)$ irreduzibel ist, fällt sie mit dem Minimalpolynom von V über $GF(p)$ zusammen. Der Ring $GF(p)(V)$ ist daher isomorph zum Galois-Feld $GF(p^k)$, und die C_{ij} bilden eine Darstellung F von $GF(p^k)$ über $GF(p)$. Jedem Element G aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ordnen wir nun ein Element $D(G)$ aus $GL(r, p^k)$ zu vermöge

$$G = (C_{ij}) \to D(G) = (c_{ij})$$

für $C_{ij} = F(c_{ij})$ mit $c_{ij} \in GF(p^k)$.

$\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ist isomorph zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe $A(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, so erhalten wir wegen $p^n - 1 | |\mathfrak{G}^0|$ die Beziehung

$$p^n - 1 \,|\, |\mathfrak{G}^0| \,|\, |\mathfrak{A}| \,|\, |A(\mathfrak{A})| \,|\, (p^k - 1)\, \varphi(p^k - 1).$$

Wegen $k \leq n/2$ folgt dann $p^n - 1 \leq (p^{n/2} - 1)^2$, was sicher nicht stimmt.

Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{A}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ist. Dann ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ sicher nicht abelsch, da $\mathfrak{A}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ ist. Sei nun $\mathfrak{N}$ ein minimaler nichtabelscher, in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ liegender Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann erfüllt $\mathfrak{N}$ die Voraussetzungen von [3], Hilfssatz I, hat daher die Klasse 2 und Primzahlpotenzordnung q^b. Aus $\mathfrak{E} < \mathfrak{N}' \leq \mathfrak{A}$ folgt $q | p^k - 1$.

Schritt 5. Ausschließung des Falles B für $q > 2$.

Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{N}$ irreduzibel über $GF(p)$. Dann ist auch die Darstellung $D(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ vom Grad r über $GF(p^k)$ irreduzibel; eine Reduktion von $D(\mathfrak{N})$ über $GF(p^k)$ hätte nämlich eine Reduktion von $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ zur Folge. Nach [3], Hilfssatz III.3 (mit k statt f) ist wegen $q | p^k - 1$ dann $D(\mathfrak{N})$ absolut irreduzibel und $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = r^2 = q^{2m}$, also $r = q^m$.

Aus [3], Hilfssatz I.4 entnehmen wir, daß die von E verschiedenen Elemente von $\mathfrak{N}$ alle die Ordnung q haben. Daher ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q$, und die Ordnung der Automorphismengruppe $A(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ teilt $q - 1$.

Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}^0$ fällt mit $\mathfrak{A}$ zusammen ([3], Hilfssatz II.1). Ist $G \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ und Z ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, so haben wir für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{N}$

$$X^G = XZ^a \quad \text{und} \quad Y^G = YZ^b.$$

Es folgt $(X, Y)^G = (X, Y)$ und wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'$ dann $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$. Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe von $C(2m, q)$. $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ist wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ nach [3], Hilfssatz II.2 isomorph zu einer Untergruppe des $2m$-fachen direkten Produktes von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ mit sich selbst, woraus $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})| \,|\, q^{2m}$ folgt. Wir bekommen nun

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|$$

und dann

$$|\mathfrak{G}^0| \,|\, (q-1)\,|C(2m, q)|\,q^{2m}(p^k - 1).$$

Mit $n = kr = kq^m$ folgt nun

$$\text{(D)} \qquad p^{kq^m} - 1 \,|\, (q-1)(p^k-1)\,q^{2m}(q^{2m}-1)\,q^{2m-1}(q^{2m-2}-1)\ldots(q^2-1)\,q.$$

Wegen $q \,|\, p^k - 1$ erhalten wir

$$(p^k-1)^{q^m} < (p^k-1)^{1+1+2m+m(2m+1)},$$

also $q^m < 2 + 3m + 2m^2$.

$q = 3$: Aus $3^m < 2 + 3m + 2m^2$ folgt $m \leq 3$.

$q = 5$: Die Ungleichung $5^m < 2 + 3m + 2m^2$ liefert $m = 1$.
Falls $q > 7$, so ist die Ungleichung $q^m < 2 + 3m + 2m^2$ für kein m erfüllt.

Sei zunächst $q = 3$. Dann ist $p^k \equiv 1\,(3)$. Daraus folgt

$$\text{(X')} \qquad 3^s \top \frac{p^{k3^s} - 1}{p^k - 1}.$$

Wir haben zu beachten, daß $k > 1$ ist.

$m = 1$: (D) ergibt nun

$$p^{3k} - 1 \,|\, 2(p^k-1)\,3^2(3^2-1)\,3 = (p^k-1)\,3^3\,2^4$$

und dann wegen (X') sogar

$$p^{3k} - 1 \,|\, (p^k-1)\,3\,2^4,$$

daher $p^{2k} < 48$. Aber $p^k \equiv 1\,(3)$ liefert uns dann $p^k = 4$, womit (D) nicht erfüllt ist. Somit ist $m = 1$ unmöglich.

$m = 2$: Nun haben wir

$$p^{9k} - 1 \,|\, 2(p^k-1)\,3^4(3^4-1)\,3^3(3^2-1)\,3$$

und mit (X')

$$p^{9k} - 1 \,|\, (p^k-1)\,2^8\,3^2\,5, \quad \text{also} \quad p^{8k} < 2^{8+4+3} = 2^{15} \text{ und } p^k < 4.$$

Dies ist aber wegen $k \geq 2$ nicht möglich.

$m=3$: Wenn wir sofort (X') berücksichtigen, besagt (D) nun

$$p^{27k}-1 \mid 2(p^k-1)\,3^3(3^6-1)(3^4-1)(3^2-1).$$

Es folgt $p^{26k}<3^{15}2$, was sicher nicht geht.

Für $q=5$ ist $m=1$ und $p^k\equiv 1\,(5)$. Wenn wir $5^s \top \frac{p^{k5^s}-1}{p^k-1}$ beachten, so liefert (D)

$$p^{5k}-1 \mid 4(p^k-1)\,5(5^2-1).$$

Daraus ergibt sich $p^{4k}<480$, also $p^k<5$ im Widerspruch zu $p^k\equiv 1\,(5)$.

Damit haben wir gesehen, daß Fall B mit $q>2$ nicht eintreten kann.

Schritt 6. Eine Abschätzung von $|\mathfrak{G}^0|$ im Falle B für $q=2$.

Nach [3], Hilfssatz I.5 hat $\mathfrak{N}$ nur Elemente, deren Ordnung 4 teilt. Angenommen, $\mathfrak{N}$ sei reduzibel über $GF(p)$. Nach Hilfssatz 1 ist dann $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe, dann aber wegen der eben gemachten Feststellung über die Ordnungen der Elemente von $\mathfrak{N}$ eine Quaternionengruppe. Dies ist jedoch nach Hilfssatz 4 ausgeschlossen. Also ist $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel, daher auch $D(\mathfrak{N})$ über $GF(p^k)$.

Nun betrachten wir die absolut irreduziblen Bestandteile von $D(\mathfrak{N})$. Diese sind alle treu und haben den gleichen Grad t ([3], Hilfssatz 3). Aus [3], Hilfssatz III.2 entnehmen wir $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=t^2=2^{2m}$. Zerfällt $D(\mathfrak{N})$ in s absolut irreduzible Bestandteile, so erhalten wir $r=s2^m$ und $n=kr=ks2^m$. Für $p^k\equiv 1\,(4)$ ist $D(\mathfrak{N})$ nach [3], Hilfssatz III.3 absolut irreduzibel, so daß dann $s=1$ gilt.

Es ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,4$ und $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,p^k-1$. $\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ist eine abelsche Gruppe, deren Ordnung $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|^{2m}$ teilt ([3], Hilfssatz II.2). Da $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})=\mathfrak{A}$ ([3], Hilfssatz II.1). Wir erhalten damit

$$|\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}/\mathfrak{A}| \begin{cases} |\,2^{2m} & \text{für } p^k\not\equiv 1\,(4) \\ |\,2^{4m} & \text{für } p^k\equiv 1\,(4). \end{cases}$$

Ferner haben wir noch

$$|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))| = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=2, \text{ also sicher für } p^k\not\equiv 1\,(4) \\ 1 \text{ oder } 2 & \text{für } |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=4. \end{cases}$$

Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}$ isomorph zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m,2)$. Damit gelangen wir schließlich zu

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}|\,|\{\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\}/\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{A}|,$$

also für $p^k\not\equiv 1\,(4)$ $\quad |\mathfrak{G}^0|\,|\,|C(2m,2)|\,2^{2m}(p^k-1)$

und für $p^k\equiv 1\,(4)$ $\quad |\mathfrak{G}^0|\,|\,2|C(2m,2)|\,2^{4m}(p^k-1)$.

Wegen $p^n-1=p^{ks2^m}-1\,|\,|\mathfrak{G}^0|$ ergibt sich nun

(E) $$\begin{cases} & \text{für } p^k\not\equiv 1\,(4) \\ p^{ks2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2 \end{cases}$$

und

$$(F)\quad \begin{cases} & \text{für } p^k \equiv 1\,(4) \\ p^{k2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^{4m+1}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\dots(2^2-1)\,2. \end{cases}$$

Für $p^k \equiv 1\,(4)$ berücksichtigen wir

$$(Y')\qquad 2^m \top \frac{p^{k2^m}-1}{p^k-1}.$$

Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist jedenfalls $p^{2k} \equiv 1\,(4)$ und dann mit $s = r2^t$, $2 \nmid r$ (s. S. 134)

$$(Z')\qquad 2^{m+t-1} \top \frac{p^{ks2^m}-1}{p^{2k}-1}.$$

Damit erhalten wir

$$(E')\quad \begin{cases} & \text{für } p^k \not\equiv 1\,(4) \text{ mit } s = r2^t \text{ und } 2 \nmid r \\ p^{ks2^m}-1 \mid (p^{2k}-1)\,2^{m+t-1}(2^{2m}-1)\,(2^{2m-2}-1)\dots(2^2-1) \end{cases}$$

und

$$(F')\quad \begin{cases} & \text{für } p^k \equiv 1\,(4) \\ p^{k2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^m(2^{2m}-1)\,(2^{2m-2}-1)\dots(2^2-1). \end{cases}$$

Nun schätzen wir m ab:

I. Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist sicher k ungerade, also wegen $k>1$ und $p>2$ (beachte $q=2 \mid p^k-1$!) dann $p^k \geq 3^3$ und $p^k-1>2^4$. Damit folgt aus (E') unter Verwendung von $(p^k+1)<(p^k-1)^{3/2}$

$$(p^k-1)^{s2^m} < (p^k-1)^{1+3/2+m/4+t/4-1/4+m(m+1)/4}$$

und dann

$$s\,2^m < 2 + 1/4 + t/4 + m/2 + m^2/4.$$

Mit $t+m=x$ ergibt sich dann $2^x < 2+1/4+x/2+x^2/4$, daher $x \leq 2$, also auch $m \leq 2$ und dann nach einfacher Rechnung $s=1$.

II. Für $p^k \equiv 1\,(4)$ ist wegen $k>1$ sicher $p^k-1 \geq 2^3$, und dann folgt aus (F')

$$(p^k-1)^{2^m} < (p^k-1)^{1+m/3+m(m+1)/3},$$

daher $2^m < 1+2m/3+m^2/3$. Diese Ungleichung ist jedoch für kein m erfüllt.

Im Falle $p^k \not\equiv 1\,(4)$ war $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$. Daher ist dann $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe von $C(2m, 2)$. Diese ist irreduzibel über $GF(2)$, da $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist ([3], Hilfssatz I. 2).

Als Zwischenergebnis vermerken wir:

1. Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \mid (p^k-1)\,2^{2m} \mid |\overline{\mathfrak{G}}|$, wobei $\overline{\mathfrak{G}}$ eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $C(2m, 2)$ ist und dabei $n = k2^m$ mit $m \leq 2$ gilt.

2. Der Fall B mit $p^k \equiv 1\,(4)$ tritt nicht auf.

Schritt 7. Eine Teilbarkeitsbeziehung für $|\overline{\mathfrak{G}}|$.

$\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $GL(2m, 2)$ (s. S. 135 und S. 139); wir sehen davon ab, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ sogar eine Untergruppe

von $C(2m, 2)$ ist. Nach den gleichen Richtlinien wie bei der Untersuchung von $\mathfrak{G}^0$ gehen wir nun vor. Dabei treten aber wesentliche Abweichungen gegenüber der früheren Situation auf:

Unsere Aufgabe ist einfacher, da wir jetzt den Primkörper $GF(2)$ vor uns haben, daher keine von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler der Gestalt aE in $\overline{\mathfrak{G}}$ auftreten können. Ferner bringt die Gradabschätzung $2m \leq 10$ (s. S. 135 und S. 139) wesentliche Erleichterungen mit sich. Andererseits haben wir den Hilfssatz 1, welcher uns die Irreduzibilität der minimalen nichtabelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$ zeigte, für $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht zur Verfügung.

Fall I. Wir nehmen zunächst an, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ einen über $GF(2)$ irreduziblen abelschen Normalteiler besitzt. Zu $\overline{\mathfrak{G}}$ nehmen wir die volle Translationsgruppe $\overline{\mathfrak{T}}$ über $GF(2)$ vom Grad $2m$ hinzu. Hilfssatz 2 zeigt, daß $\overline{\mathfrak{T}}\,\overline{\mathfrak{G}}$ aus semilinearen Abbildungen über $GF(2^{2m})$ besteht. Also ist $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^{2m}-1)\,2m$, womit eine gute Abschätzung von $|\overline{\mathfrak{G}}|$ ermittelt ist.

Fall II. Nun zerfalle jeder abelsche Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ über $GF(2)$ in lauter äquivalente, irreduzible Teile. Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$; er möge über $GF(2)$ in j Teile $L(\overline{\mathfrak{A}})$ vom Grad $t>1$ zerfallen. Dann haben wir $|\overline{\mathfrak{A}}| \,|\, 2^t-1$, also $2 \nmid |\overline{\mathfrak{A}}|$. Wie in Schritt 4 ordnen wir nun $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ eine Untergruppe $D(\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}}))$ von $GL(j, 2^t)$ zu, wobei $D(\overline{\mathfrak{A}})$ aus Matrizen aE mit $a \in GF(2^t)$ besteht. Ist $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ abelsch, so wird $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ und dann $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^t-1)\,\varphi(2^t-1)$. Ist aber $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ nicht abelsch, so sei $\overline{\mathfrak{N}}$ ein minimaler nichtabelscher, in $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ liegender Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$. Nach [3], Hilfssatz I.1 hat $\overline{\mathfrak{N}}$ Primzahlpotenzordnung r^d, nach [3]; Hilfssatz I.6 gilt $r \,|\, 2^t-1$, also $r \neq 2$. Gemäß [3], Hilfssatz III.1 läßt sich jede absolut irreduzible Darstellung von $\overline{\mathfrak{N}}$ in $GF(2^t)$ angeben. Nun zerfalle $D(\overline{\mathfrak{N}})$ über $GF(2^t)$ in u Bestandteile $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$. Diese sind treu: Denn wegen [3], Hilfssatz I.3 und I.4 gilt $|\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})| = r$. Also ist $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ in jedem Normalteiler von $\overline{\mathfrak{N}}$ enthalten. Da aber ein erzeugendes Element Z von $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ bei $D(\overline{\mathfrak{N}})$ auf aE mit $a \neq 1$ abgebildet wird, wird $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ bei allen absolut irreduziblen Bestandteilen $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ von $D(\overline{\mathfrak{N}})$ nicht auf E abgebildet. Also sind die $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ treu.

Nach [3], Hilfssatz III.2 haben die $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ den Grad r^v mit $|\overline{\mathfrak{N}}/\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})| = r^{2v}$. Nun haben wir insgesamt $2m = j\,t = u\,t\,r^v$. Wegen $2m \leq 10$ und $r \neq 2$ erhalten wir als einzige Möglichkeiten $2m = 6$ oder $2m = 10$. Aber $2m = 10$ ist ausgeschlossen: In diesem Falle müßte nämlich gelten $r = 5$ und dann $t = 2$, womit aber $r \,|\, 2^t-1$ nicht erfüllt ist. Somit bleibt nur $2m = 6$. Dann ist gewiß $u = 1$, daher $D(\overline{\mathfrak{N}})$ absolut irreduzibel vom Grad 3. Nach dem Schurschen Lemma gilt $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{N}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}}) = \overline{\mathfrak{A}}$. Aus $t = 2$ folgt $|\overline{\mathfrak{A}}| = 3$. Nun bekommen wir

$$|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, |\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})| \,|\, |\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})/\{\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{H}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})\}| \,|\, |\{\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{H}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})\}/\overline{\mathfrak{A}}| \,|\, |\overline{\mathfrak{A}}|$$

und daraus

$$|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, 2\,|\,C(2, 3)\,|\,3^2(2^2-1) = 3^4\,2^4.$$

Für die spätere Verwendung vermerken wir als Ergebnis:

Entweder gilt $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^t-1)\,\varphi(2^t-1)$ mit $1<t<2m$ und $t \,|\, 2m$ oder es ist $m = 3$ und $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, 3^4\,2^4$.

Fall III. Nun gebe es einen über $GF(2)$ reduziblen abelschen Normalteiler $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, der inäquivalente irreduzible Bestandteile besitzt. Wir können annehmen, daß es einen maximalen abelschen Normalteiler $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit dieser Eigenschaft gibt; andernfalls würde nämlich Fall I oder Fall II vorliegen. Sei also

$$\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} L_1(\overline{\mathfrak{A}}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2(\overline{\mathfrak{A}}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_j(\overline{\mathfrak{A}}) \end{pmatrix},$$

wobei jedes $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ über $GF(2)$ höchstens in äquivalente irreduzible Teile zerfällt und den Grad t hat: Nun ist $\overline{\mathfrak{G}}$ imprimitiv ([3], Satz 2). Wir unterscheiden zwei Fälle:

III.1. Zunächst seien die $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ irreduzibel über $GF(2)$. Sei $\overline{\mathfrak{D}}$ derjenige Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, welcher alle Imprimitivitätsgebiete in sich überführt. Die Bestandteile D_i von $\overline{\mathfrak{D}}$ besitzen dann $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ als über $GF(2)$ irreduziblen abelschen Normalteiler, sind also wie unter Fall I Gruppen von homogenen semilinearen Abbildungen. Wir bekommen daher $|\overline{\mathfrak{D}}| \mid ((2^t-1)t)^j$. Die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{D}}$ ist isomorph zu einer auflösbaren Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_j$. Somit ergibt sich nun $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid ((2^t-1)t)^j a$, wobei $a \mid j!$, aber a für $j \geq 5$ sicher von $j!$ verschieden ist.

III.2. Nun mögen die $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ über $GF(2)$ gemäß $L_i(\overline{\mathfrak{A}}) = E_w \times P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ zerfallen. Da $P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ von der identischen Darstellung verschieden ist und wir Gruppen über $GF(2)$ betrachten, ist Grad $P_i(\overline{\mathfrak{A}}) > 1$. Nun wenden wir die Betrachtungen von Fall II auf die Teile $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ von $\overline{\mathfrak{D}}$ an und erhalten das Ergebnis, daß entweder die $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ abelsch sind oder $2m$ einen Primteiler $r \neq 2$ enthält. Wegen $2m = jw$ Grad $P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ enthält aber $2m$ mindestens drei Primteiler, womit im zweiten Falle $2m \geq 12$ folgen würde. Für uns sind aber nur die Gruppen mit $2m \leq 10$ von Interesse. Daher können wir annehmen, daß die $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ abelsch sind und dann $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{D}}$ gilt. Es ergibt sich nun $|\overline{\mathfrak{D}}| \mid (2^t-1)^j$ und $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid (2^t-1)^j a$, wobei a den gleichen Einschränkungen wie in III.1 unterliegt. Die jetzt erhaltene Abschätzung ist aber schärfer als die von III.1; daher braucht Fall III.2 später nicht gesondert betrachtet zu werden.

Schritt 8. Durchrechnung für Fall A mit $q = 2$.

Die in Schritt 7 erhaltenen Abschätzungen für $|\overline{\mathfrak{G}}|$ tragen wir nun in die am Ende von Schritt 3 vermerkten Bedingungen für $|\mathfrak{G}^0|$ ein. Die Fälle I bis III von Schritt 7 werden dabei getrennt betrachtet.

Fall I. Nach Schritt 7 ist nun $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid (2^{2m}-1)\,2m$.

a) Sei zunächst $p \not\equiv 1\,(4)$ und $p > 3$. Nach unserem Ergebnis unter Schritt 3 ist $m \leq 3$ und $s = 1$. Damit bekommen wir

$$p^{2m} - 1 \mid (p-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2m.$$

Jetzt müssen wir die erlaubten m-Werte mit $m \leq 3$ durchprüfen:

$m = 1$: Nun folgt $p+1 \mid 24$. Es kommen also die Primzahlen $p = 7, 11, 23$ in Betracht. Die weitere Behandlung dieser Sonderfälle verschieben wir auf § 4.

$m=2$: Nun ist $p^4-1 \mid (p-1)2^6 3\,5$, daher $p^3<2^6 3\,5$, also sicher $p<12$. Die Primzahlen 7 und 11 scheiden aber wegen $7^4 \equiv 1\,(5^2)$ und $11^4 \equiv 1\,(61)$ aus.

$m=3$: Jetzt ist $p^8-1 \mid (p-1)2^7 3^3 7$, daher $p^7<2^7 3^3 7$ und dann $p<6$, was wegen $p \not\equiv 1\,(4)$ und $p>3$ nicht geht.

b) Nun sei $p=3$. Zunächst verschaffen wir uns eine bessere Abschätzung von m als die unter Schritt 3 ermittelte:

$$3^{s2^m}-1 \mid 2^{2m+1}(2^{2m}-1)\,2m$$

liefert uns wegen $2m \leq 2^m$ die Ungleichung

$$2^{s2^m} < 2^{2m+1+2m+m} \quad \text{und dann} \quad s\,2^m < 1+5m.$$

Damit folgt nun zunächst $m \leq 4$. Wegen $3^4 \equiv 1\,(5)$ ist für $m \geq 2$ notwendig $5 \mid 2^{2m}-1$. Dann ist aber $m=2$ oder $m=4$. Wir müssen daher nur die Werte $m=1, 2, 4$ betrachten.

$m=1$: Es gilt nun $3^{2s}-1 \mid 2^4 3$, also auch $3^{2s}-1 \mid 2^4$. Dann ist $s=1$ und daher $n=2$. Auch diesen Sonderfall behandeln wir in § 4.

$m=2$: Nun ist gefordert $3^{4s}-1 \mid 2^7 3\,5$. Diese Teilbarkeitsbeziehung ist nur für $s=1$ erfüllt. Wir bekommen daher einen weiteren Sonderfall mit $n=4$, $p=3$ und $|\mathfrak{G}^0| \mid 2^7 3\,5$. Die genaue Betrachtung dieses interessantesten Sonderfalles wird in § 3 erfolgen. Wir vermerken noch, daß in diesem Falle $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe der semilinearen homogenen Gruppe $\mathfrak{S}(2^4)^0$ ist.

$m=4$: Jetzt ist $s=1$, und wir erhalten $3^{16}-1 \mid 2^{12} 3\,5\,17$, was wegen $3^8 \equiv 1\,(41)$ sicher nicht richtig ist.

c) Zu behandeln bleibt noch der Fall $p \equiv 1\,(4)$. Unter Beachtung von

$$2^m \top \frac{p^{2^m}-1}{p-1}$$

bekommen wir $p^{2^m}-1 \mid (p-1)\,2^m (2^{2^m}-1)\,m$. Dabei ist $m \leq 3$.

$m=1$: Nun ist $p+1 \mid 6$, also $p=5$. Auch diesen (letzten) Sonderfall betrachten wir in § 4.

$m=2$: Jetzt ist gefordert $p^4-1 \mid (p-1)2^3 3\,5$. Es ergibt sich $p^3<120$, was wegen $p \geq 5$ ein Widerspruch ist.

$m=3$: Wir erhalten $p^8-1 \mid (p-1)2^3 3^3 7$ und dann $p^7<2^3 3^3 7$, was sicher nicht geht.

Die weitere Durchrechnung von Fall A und Fall B, bei der keine neuen Ausnahmefälle auftreten, unterdrücken wir.

§ 3. Der Ausnahmefall Grad $\mathfrak{G} = 3^4$

Wir hatten in Schritt 8 ermittelt, daß für die Ausnahmegruppen vom Grad 3^4 gilt $|\mathfrak{G}^0| = 2^5 |\overline{\mathfrak{G}}| \mid 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ und $\overline{\mathfrak{G}} \leq \mathfrak{S}(2^4)^0$. Also hat $\overline{\mathfrak{G}}$ einen zyklischen Normalteiler $\overline{\mathfrak{Z}}$, dessen Ordnung $2^4-1=15$ teilt. Wegen $3^4-1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ und $3^4 \equiv 1\,(5)$ ist die Ordnung von $\overline{\mathfrak{Z}}$ sicher durch 5 teilbar. Angenommen, sie wäre auch durch 3 teilbar. Dann hätten die 2-Sylow-Komplemente von

$\mathfrak{G}^0$ die Ordnung 15 und wären zyklisch. Nun läßt sich aber ein Element X der Ordnung 5 aus $GL(4, 3)$ über $GF(3^4)$ auf Diagonalgestalt bringen und hat lauter verschiedene Eigenwerte. Ein mit X vertauschbares Element der Ordnung 3 ist dann ebenfalls diagonal über $GF(3^4)$, muß dann aber die Einheit sein, da $GF(3^4)$ keine primitiven dritten Einheitswurzeln enthält. Somit kann $|\overline{\mathfrak{Z}}|$ und dann auch $|\mathfrak{G}^0|$ nicht durch 3 teilbar sein. Es bleibt also die Abschätzung $|\mathfrak{G}^0| \mid 2^7 5$. Da $\mathfrak{G}^0$ sicher den Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung 2^5 enthält, ferner $|\mathfrak{G}^0|$ wegen $3^4 \equiv 1\,(5)$ durch 5 teilbar ist, erhalten wir als untere Schranke $2^5\,5 \mid |\mathfrak{G}^0|$.

Der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}^0$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $|\mathfrak{N}'| = |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$; denn nach [3], Hilfssatz I.3 liegen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in der Gruppe $\mathfrak{Z} = \{\pm E\}$.

2. $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ hat den Typ (2, 2, 2, 2); dies folgt aus [3], Hilfssatz I.2 mit $m = 2$ und $\mathfrak{N}' = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$.

3. $|\mathfrak{N}| = 2^5$; ergibt sich sofort aus 1. und 2.

4. Zwischen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ liegt keine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}^0$; folgt aus [3], Hilfssatz I.2.

Sei nun $\Omega_1(\mathfrak{N})$ die von den Elementen der Ordnung 2 von $\mathfrak{N}$ erzeugte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$. Nach 3. ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \Omega_1(\mathfrak{N})$, daher wegen 4. dann $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ oder $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Im ersten Falle würde aber $\mathfrak{N}$ nur eine Untergruppe der Ordnung 2 enthalten, wäre daher eine verallgemeinerte Quaternionengruppe, was jedoch wegen 2. ausgeschlossen ist. Somit gilt $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{N}$ wird von Elementen der Ordnung 2 erzeugt.

Sei A ein Element der Ordnung 4 von $\mathfrak{N}$; wegen $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{E}$ gibt es sicher ein solches. Dann ist $\{A\}$ wegen $\{A^2\} = \mathfrak{N}'$ invariant in $\mathfrak{N}$. Wäre jedes Element der Ordnung 2 von $\mathfrak{N}$ mit A vertauschbar, so würde der Zentralisator $\mathfrak{C}(A)$ von A die Gruppe $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ enthalten. Dann wäre aber $A \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, entgegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$. Somit gibt es ein Element B der Ordnung 2, welches die Relation $BAB^{-1} = A^{-1}$ erfüllt. $\{A, B\}$ ist dann eine Diedergruppe der Ordnung 8.

In dem symplektischen Raum $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ (mit der durch die Kommutatorbildung nach [3], Hilfssatz II.3 gelieferten schiefen Bilinearform) betrachten wir nun den zu $\{A, B\}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ „senkrechten" Raum. Diesem entspricht dann in $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $\{C, D\}$ der Ordnung 8, welcher mit $\{A, B\}$ elementweise vertauschbar ist. Da die schiefe Bilinearform nicht ausgeartet ist, gilt sicher $(C, D) \neq E$. Somit ist $\{C, D\}$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8, also eine Diedergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung 8 oder eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Als Ergebnis erhalten wir: $\mathfrak{N}$ ist das direkte Produkt $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ mit verschmolzenen Zentren von einer Diedergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung 8 mit einer Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ oder das direkte Produkt $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ mit verschmolzenen Zentren von zwei Diedergruppen der Ordnung 8. Diese beiden Gruppen sind gewiß nicht isomorph, denn $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ hat 19 Elemente der Ordnung 2 und 12 Elemente der Ordnung 4, während $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ 11 Elemente der Ordnung 2 und 20 Elemente der Ordnung 4 besitzt.

Unter den Automorphismen, welche bei Transformation mit Elementen von $\mathfrak{G}^0$ in $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ bewirkt werden und die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ bilden, werden die Nebenklassen von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ vertauscht. Abgesehen von der Einheitsnebenklasse enthalten alle Nebenklassen je zwei Elemente von gleicher Ordnung. $\overline{\mathfrak{G}}$ kann sicher nur solche Nebenklassen ineinander überführen, welche aus Elementen gleicher Ordnung bestehen. Nun hat $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ 9 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 2 und 6 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 4; $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ hat 5 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 2 und 10 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 4.

Unsere Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist im vorliegenden Fall eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{S}(2^4)^0$ von semilinearen homogenen Abbildungen über $GF(2^4)$ (s. S. 142). Wir wissen bereits, daß $5 \mid\mid \overline{\mathfrak{G}} \mid\mid 20$. Eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Ordnung 20 von $\mathfrak{S}(2^4)^0$ ist bis auf die Bezeichnung der Ziffern eindeutig bestimmt und wird etwa erzeugt von den Permutationen

$$F = \begin{pmatrix} x \\ \zeta x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix},$$

wobei ζ eine primitive 5-te Einheitswurzel aus $GF(2^4)$ ist. Die Ziffer 1 bleibt genau bei $\{G\}$ fest, liegt also in einem Transitivitätsgebiet der Länge 5 von $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Ziffer $1+\zeta$ bleibt nur bei FG^2 und E fest[2]), liefert daher ein Transitivitätsgebiet der Länge 10. Die Untergruppen $\overline{\mathfrak{G}}$ der Ordnung 10 und 5 von $\mathfrak{S}(2^2)^0$ unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Ziffern von $\{F, G^2\}$ und $\{F\}$. Unter diesen zerfällt das zweite Transitivitätsgebiet in zwei Gebiete der Länge 5.

Nun ist es aber offenbar nicht möglich, die Einteilung der Nebenklassen von $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in zwei Abteilungen von 9 bzw. 6 Nebenklassen den Transitivitätsgebieten von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit den Längen 10, 5 oder 5, 5, 5 anzupassen. Somit kann $\mathfrak{N}$ nicht isomorph zu $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ sein. Für $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ paßt jedoch die Einteilung der Nebenklassen von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ gemäß der Ordnung der darinliegenden Elemente mit den Längen der Transitivitätsgebiete von $\overline{\mathfrak{G}}$ zusammen. Damit sehen wir, daß $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ der Struktur nach eindeutig bestimmt ist.

Nach [3], Hilfssatz III.4 hat $\mathfrak{N}$ über $GF(3)$ höchstens eine absolut irreduzible Darstellung vom Grad 4. Aus $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ folgt leicht, daß eine absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}$ geliefert wird durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2]) durch einfache Rechnung unter Verwendung der über $GF(2)$ irreduziblen Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ für ζ.

Zunächst zeigen wir, daß sich die gefundene Gruppe $\mathfrak{N}$ wirklich zu einer auf den von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren transitiven Gruppe $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^7 5$ ergänzen läßt. Wir nehmen zu $\mathfrak{N}$ die beiden Matrizen

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hinzu (in anderer Gestalt bei BUCHT [1], S. 71—72, 78). Die Relationen

$$FAF^{-1} = CB,\ FBF^{-1} = -AB,\ FCF^{-1} = ABD,\ FDF^{-1} = -C,$$
$$GAG^{-1} = ABC,\ GBG^{-1} = B,\ GCG^{-1} = CDB,\ GDG^{-1} = DB,$$
$$F^5 = E,\ G^4 = -B,\ GFG^{-1} = DCBF^2$$

zeigen, daß wirklich eine Gruppe $\mathfrak{G}^0$ mit $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 20$ und der gewünschten Struktur von $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}$ entsteht.

Wir haben nun zu beweisen, daß diese Gruppe $\mathfrak{G}^0$ auf den von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren transitiv ist. Wir zeigen, daß sogar die Untergruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}$ transitiv ist.

Ein beliebiges Element der Ordnung 5 aus $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ läßt keinen von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektor fest; denn die Eigenwerte einer Matrix der Ordnung 5 sind über $GF(3)$ konjugierte primitive 5-te Einheitswurzeln, sind also alle von 1 verschieden. Sei η ein beliebiger, von (0, 0, 0, 0) verschiedener Vektor, $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$, welche η fest läßt. In $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}$ liegt dann keine 5-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$. Daher gilt $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3} \leq \mathfrak{N}$. Spezialisieren wir nun zu $\eta = (1, 0, 0, 0)$, so läßt kein Element außer E der von A, C, D erzeugten Untergruppe der Ordnung 2^4 von $\mathfrak{N}$ den Vektor η fest. Ist $\mathfrak{N}^\eta$ die Fixuntergruppe von η in $\mathfrak{N}$, so folgt $|\mathfrak{N}:\mathfrak{N}^\eta| \geq 2^4$ und daher $2^4 5 \,|\, |\mathfrak{G}^0_{3^4,3} : \mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}|$, womit gezeigt ist, daß η unter $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ in alle von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren übergeht. Damit haben wir die folgenden zweifach transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen vom Grad 3^4 erhalten:

$$\mathfrak{G}^0_{3^4,1} = \{A, B, C, D, F, G\}, \quad \mathfrak{G}^0_{3^4,2} = \{A, B, C, D, F, G^2\}$$

und

$$\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}.$$

Nachzuweisen bleibt noch, daß dies, abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern, alle Ausnahmetypen vom Grad 3^4 sind. Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$, und zwar in folgender Formulierung:

Sei $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe von $GL(4, 3)$, welche $\mathfrak{N}$ als Normalteiler besitzt. $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ habe die Ordnung 5. Dann ist $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt.

Wegen der Teilerfremdheit von $|\mathfrak{N}| = 2^5$ und $|\mathfrak{R}/\mathfrak{N}| = 5$ besitzt $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{R}$ eine Vertretergruppe $\mathfrak{V}$ (ZASSENHAUS [6], S. 135). Da wegen der absoluten

Irreduzibilität von $\mathfrak{N}$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $GL(4, 3)$ nach dem Schurschen Lemma nur die Elemente $\pm E$ enthält, kann $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{N}$ nicht den identischen Automorphismus bewirken. Also ist $\mathfrak{R}$ im Holomorph $H(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}A(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ enthalten. Wegen $|A(\mathfrak{N})||2^4|C(4, 2)| = 2^8 3^2 5$ sind alle Untergruppen $\mathfrak{P}$ der Ordnung 5 von $A(\mathfrak{N})$ als 5-Sylow-Gruppen von $A(\mathfrak{N})$ unter $A(\mathfrak{N})$ konjugiert. Daher sind auch alle Gruppen $\mathfrak{R}$ unter $H(\mathfrak{N})$ konjugiert, und $\mathfrak{R}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Nun ist noch zu zeigen, daß die abstrakte Gruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung $2^5 5$ nur eine irreduzible Darstellung vom Grad 4 über $GF(3)$ besitzt. Von $\mathfrak{N}$ wissen wir dies bereits. Ein Element F von $\mathfrak{R}$ der Ordnung 5 ist durch den von ihm auf $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismus mod $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \{-E\}$ bestimmt. Durch $F^5 = E$ wird aber dann das Vorzeichen von F festgelegt. Damit ist bewiesen, daß unsere Gruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung $2^5 5$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Nun betrachten wir die Gruppen $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^6 5$. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ dieser Art, welche auf den von $(0, 0, 0, 0)$ verschiedenen Vektoren transitiv sind und sich nicht nur durch die Bezeichnung der Ziffern unterscheiden. Beide enthalten dann einen Normalteiler der Ordnung $2^5 5$, welcher zu der eben bestimmten Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ isomorph ist. Durch Übergang zu äquivalenten Gruppen können wir erreichen, daß $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ den Normalteiler $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ gemeinsam haben. Die Gruppe $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2/\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ wird dann von zwei Elementen der Ordnung 2 erzeugt, ist daher bekanntlich eine Diedergruppe. $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2$ ist dann eine zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe. Dies geht jedoch nicht, da nach S. 142 $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2/\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ eine zyklische Gruppe sein muß. Damit haben wir die Annahme, daß es zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^6 5$ gäbe, zum Widerspruch geführt. Wiederholen wir diese Betrachtung für die Gruppen der Ordnung $2^7 5$, so erhalten wir auch die Eindeutigkeit der Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,1}$ der Ordnung $2^7 5$, abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern.

§ 4. Die übrigen Ausnahmefälle

Für alle noch zu betrachtenden Ausnahmefälle liegt Fall A mit $q = 2$ und $n = 2$ vor. Dann ist $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$ und $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})||p-1$ (s. S. 142). Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{U} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}^0$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{U}$ ([3], Hilfssatz I. 2).

$p^n = 3^2$. Aus der Tatsache, daß nun $|\mathfrak{N}| = 2^3$ gilt und zwischen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{N}$ keine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$ liegt, entnehmen wir, daß $\mathfrak{N}$ keine Diedergruppe der Ordnung 8 sein kann, also eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ ist. Die volle lineare Gruppe $GL(2, 3)$ ist auflösbar, so daß $\mathfrak{G}^0$ eine beliebige, $\mathfrak{Q}$ umfassende Untergruppe von $GL(2, 3)$ sein kann; denn bereits $\mathfrak{Q}$ ist transitiv auf den von 0 verschiedenen Vektoren. Es kommen zunächst die folgenden Typen in Betracht:

1. $\mathfrak{G}^0_{3^2,1} = GL(2, 3)$.

2. $|\mathfrak{G}^0_{3^2,2}| = 3|\mathfrak{Q}|$. Dieser Typ ist eindeutig bestimmt als einziger Normalteiler von $GL(2, 3)$ vom Index 2.

3. $|\mathfrak{G}^0| = 2|\mathfrak{Q}|$. Dann ist $\mathfrak{G}^0$ als 2-Sylow-Gruppe von $GL(2, 3)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

4. $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{Q}$. Auch dieser Typ ist bis auf Äquivalenz bestimmt, da $\mathfrak{Q}$ über $GF(3)$ nur eine treue Darstellung vom Grad 2 hat.

Die semilinearen homogenen Abbildungen aus $\mathfrak{S}(3^2)$ liefern uns eine Untergruppe von $GL(2, 3)$ der Ordnung $(3^2-1)2 = 2^4$. Diese muß also mit Typ 3. übereinstimmen. Daher bestehen die Gruppen vom Typ 3. und 4. bei geeigneter Bezeichnung der Ziffern aus semilinearen Abbildungen. Als echte Ausnahmefälle bleiben die Typen 1. und 2. Nehmen wir als erzeugende Matrizen von $\mathfrak{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so können wir mit Hilfe der weiteren Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$CAC^{-1} = B,\ CBC^{-1} = AB,\ DAD^{-1} = B,\ DBD^{-1} = A,\ C^3 = D^2 = E$$

die Ausnahmetypen angeben in der Gestalt

$$\mathfrak{G}^0_{3^2,1} = \{A, B, C, D\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,2} = \{A, B, C\}.$$

$p^n = 5^2$. Ist $|\mathfrak{N}| = 8$, so ist $\mathfrak{N}$ wie eben eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Ist aber $|\mathfrak{N}| = 2^4$, so haben wir $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$. Wir wissen bereits, daß $|\mathfrak{N}'| = 2$ ([3], Hilfssatz I. 3). Sei $\mathfrak{N}^{(2)} = \{N^2 | N \in \mathfrak{N}\}$. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ den Typ (2, 2) hat und die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben ([3], Hilfssatz I. 5), ist $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und $|\mathfrak{C}_1(\mathfrak{N})| = 2$, also $\mathfrak{N}' = \mathfrak{C}_1(\mathfrak{N}) = \Phi(\mathfrak{N})$. Somit wird $\mathfrak{N}$ von drei, und nicht weniger Elementen erzeugt, von denen eines aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ entnommen werden kann. Die beiden anderen Elemente erzeugen dann eine nichtabelsche Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Ordnung 8 von $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{U} = \{A, B\}$ eine Diedergruppe mit $A^4 = B^2 = E$ und $BAB^{-1} = A^{-1}$ und Z ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, so ist $\{A, BZ\}$ wegen $(BZ)^2 = -E$ eine Quaternionengruppe. Beachten wir noch, daß für $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$ notwendig $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \{2E\}$ ist, so haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$.

Nun kommen verschiedene Fälle in Betracht:

1. $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 6$.
2. $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 3$.
3. $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 3$.
4. $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 6$.

Andere Fälle sind wegen der Bedingung $5^2 - 1 \,||\, \mathfrak{G}^0 \,||\, 2^5 3$ schon durch Betrachtung der Ordnung ausgeschlossen.

Da die treue Darstellung von $\mathfrak{Q}$ über $GF(5)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, können wir annehmen, daß $\mathfrak{Q}$ von den folgenden Matrizen erzeugt wird:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten außerdem noch die beiden Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$CAC^{-1} = -AB,\ CBC^{-1} = A,\ DAD^{-1} = B,\ DBD^{-1} = A,\ C^3 = E,\ D^2 = 2E.$$

Eine Gruppe vom Typ 2. erhalten wir nun in $\mathfrak{G}^0_{5^1,2} = \{A, B, C, 2E\}$. Dies ist aber die einzige Gruppe vom Typ 2.; denn zunächst ist $\mathfrak{G}^0_{5^1,2}$ als Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3 bis auf Isomorphie bestimmt (gleicher Schluß wie in § 3 für $\mathfrak{G}^0_{3^1,3}$). Da aber die Darstellung von $\mathfrak{N}$ bis auf Äquivalenz eindeutig festliegt, ist dann auch jedes Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0_{5^1,2}$ durch seinen Automorphismus auf der absolut irreduziblen Gruppe $\mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt. Wie auf S. 146 sehen wir dann, daß es auch nur eine Gruppe vom Typ 1. gibt, nämlich $\mathfrak{G}^0_{5^1,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$.

In $\mathfrak{G}^0_{5^1,3} = \{A, B, C\}$ erhalten wir eine Gruppe vom Typ 3. Die eben durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß dies bis auf Äquivalenz die einzige Gruppe dieser Art ist. $\mathfrak{G}^0_{5^1,3}$ ist „scharf transitiv", da keine ihrer Matrizen außer E einen von $(0, 0)$ verschiedenen Vektor fest läßt. Sie ist also multiplikative Gruppe eines Fastkörpers und findet sich unter den von ZASSENHAUS angegebenen Gruppen (ZASSENHAUS [5], S. 216).

Schließlich weisen wir noch nach, daß keine Gruppe vom Typ 4. existiert. $\mathfrak{P} = \{A, B, D, 2E\}$ hat die Ordnung 2^5, ist also eine 2-Sylow-Gruppe von $GL(2, 5)$. Ein Element T von $\mathfrak{P}$, welches nicht in $\{A, B, 2E\}$ liegt, hat die Gestalt $T = 2^a DQ$ mit $Q \in \mathfrak{Q} = \{A, B\}$. Dann ist $T^2 = 2^{2a} Q^{D+E} D^2$. Wäre $T^2 \in \mathfrak{Q}$, so wäre wegen $2^{2a} Q^{D+E} \in \mathfrak{Q}$ auch $D^2 = 2E \in \mathfrak{Q}$, was aber nicht stimmt. Also gibt es in $\mathfrak{P}$ kein Element T, welches auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ einen Automorphismus der Ordnung 2 bewirkt und dessen zweite Potenz T^2 in $\mathfrak{Q}$ liegt. Aber gerade dies müßte bei einer Gruppe vom Typ 4. der Fall sein, da $\mathfrak{N}$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist.

$p^n = 7^2$. Wieder ist $\mathfrak{N}$ eine Quaternionengruppe und kann durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Enthält $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)$ Elemente der Ordnung 3, so haben diese die Gestalt $2^a E$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 2$ oder $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 6$ ist. Im ersten Fall muß $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}$ wegen der Einschränkung $7^2 - 1 \mid |\mathfrak{G}^0| \mid 2^4 3^2$ die Ordnung 6 haben.

Die Darstellung von $\mathfrak{Q}$ ist wieder wesentlich eindeutig bestimmt. Ein Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0$ ist dann durch seinen Automorphismus auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ bis auf Faktoren aus der 3-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ bestimmt, also bis auf Faktoren $2^a E$. Da aber im Falle $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)|=2$ die Gruppe $\mathfrak{G}^0$ scharf transitiv ist, hat kein von E verschiedenes Element von $\mathfrak{G}^0$ den Eigenwert $+1$. Ist nun X ein Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0$, welches auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ einen vorgegebenen nichtidentischen Automorphismus bewirkt, so hat X zwei verschiedene, primitive dritte Einheitswurzeln als Eigenwerte, also die Zahlen 2 und 4. Die Ersetzung von X durch $2X$ oder $4X$ führt dann aber stets zu Matrizen mit dem Eigenwert $+1$, ist daher nicht erlaubt. Damit haben wir genau eine Gruppe $\mathfrak{G}^0_{7^1,2}$ mit $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0_{7^1,2})|=2$ erhalten, die etwa durch $\mathfrak{G}^0_{7^1,2}=\{A, B, C, D\}$ mit

$$C=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

gegeben wird. Folgende Relationen beschreiben den Erweiterungstypus:

$$CAC^{-1}=-AB,\ CBC^{-1}=A,\ DAD^{-1}=-B,\ DBD^{-1}=-A,$$
$$C^3=E,\ D^2=-E.$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}^0_{7^1,2}$ befindet sich wieder unter den in [5], S. 216 angegebenen Typen.

Im Falle $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)|=6$ muß die Ordnung von $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)\mathfrak{Q}$ durch 2 teilbar sein, was aus $7^2-1\,|\,|\mathfrak{G}^0|$ folgt. Da eine Gruppe der Ordnung 2 auf dem Modul $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ über $GF(2)$ nicht irreduzibel sein kann, $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ aber ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist, ist jetzt $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)\mathfrak{Q}|=6$. Dieser Typ unterscheidet sich von $\mathfrak{G}^0_{7^1,2}$ nur durch das größere Zentrum; er ist bis auf Äquivalenz bestimmt durch $\mathfrak{G}^0_{7^1,1}=\{A, B, C, D, 2E\}$.

$p^n=11^2$. Nun ist $\mathfrak{N}$ ebenfalls eine Quaternionengruppe. Wir sehen sofort, daß mit

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

durch $\mathfrak{G}^0_{11^2,2}=\{A, B, C, 4E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{11^2,1}=\{A, B, C, D, 4E\}$ zwei Gruppen der Ordnungen $2^3 3\,5$ und $2^4 3\,5$ geliefert werden. Zwischen den angegebenen Matrizen bestehen die Gleichungen

$$CAC^{-1}=-AB,\ CBC^{-1}=A,\ DAD^{-1}=-B,\ DBD^{-1}=A,$$
$$C^3=E,\ D^2=-2AB.$$

Die schon vertrauten Schlußweisen zeigen schnell, daß dies auch alle Gruppen $\mathfrak{G}^0$ mit $p^n=11^2$ sind.

$p^n=23^2$. Die auf S. 141 ermittelte Abschätzung $|\mathfrak{G}^0|\,|\,2^4 3\,11$ fällt nun mit der unteren Schranke 23^2-1 zusammen, so daß die Ordnung von $\mathfrak{G}^0$ fest

liegt. Wir sehen leicht, daß $\mathfrak{G}^0$ durch $\mathfrak{G}^0_{23} = \{A, B, C, D, 2E\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

wesentlich eindeutig bestimmt ist. Zwischen den Matrizen A, B, C, D bestehen nun die Beziehungen

$$CAC^{-1} = -AB, \; CBC^{-1} = A, \; DAD^{-1} = -B, \; DBD^{-1} = A,$$
$$C^3 = E, \; D^2 = -AB.$$

Damit haben wir alle möglichen Ausnahmetypen angegeben.

Literatur

[1] BUCHT, G.: Die umfassendsten primitiven metazyklischen Kongruenzgruppen mit drei oder vier Variablen. Arkiv for Math., Astr., Fysik **11** (1917), 92 S. — [2] HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Archiv d. Math. **6**, 303—310 (1955). — [3] HUPPERT, B.: Lineare, auflösbare Gruppen. Math. Z. **67**, 479—518 (1957). — [4] MANNING, W. A.: Primitive groups. Stanford University Publ. 1921. — [5] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Seminar Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [6] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

(Eingegangen am 19. Februar 1957)

PETERSEN, G. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 151—152 (1957)

Sequences of Iterations

By
G. M. PETERSEN

The iteration of a matrix $B=(b_{mn})$ with a matrix $A=(a_{mn})$ is defined by

$$t_k=\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}\tau_m \quad \text{where} \quad \tau_m=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n.$$

In short the iteration of B with A, or $B\cdot A$, consists of applying the matrix (b_{mn}) to the sequence $\{\tau_m\}$ of A transforms of $\{s_n\}$. Different methods have been studied by AGNEW, see [1] where an extensive bibliography is given.

A method $B=(b_{mn})$ is b-stronger than $A=(a_{mn})$ if every bounded A summable sequence is also B summable. If each method is b-stronger than the other, they are b-equivalent. It has been pointed out by the author [4] that the process of iteration is not well defined for unbounded sequences.

The norm of a matrix, $h(A)$, has been defined by BRUDNO, [2],

$$h(A)=\sup_m \sum_n |a_{mn}|.$$

Suppose we have a sequence of matrices $\{A_k\}$ and form the iteration of A_2 with A_1, then A_3 with the result and so on. We wish to prove

Theorem 1. Let $\{A_k\}$, $A_k=(a_{mn}^k)$, be a sequence of regular matrices. If $\prod_{k=1}^{\infty} h(A_k)$ is bounded, then there is a matrix b-stronger than $A_2\cdot A_1$, $A_3\cdot A_2\cdot A_1$, $\ldots$, $A_n\ldots A_1$, $\ldots$.

Proof. We can construct matrices $B_k=(b_{mn}^k)$ so that $b_{mn}^k=0$, $n\leq\lambda_k(m)$ or $n\geq\mu_k(m)$ that are b-equivalent to (a_{mn}^k), see [3]. We shall also assume that $\sum b_{mn}^k=1$ for every m and every k, as it is clear that for every matrix, there is a matrix b-equivalent to it with this property. The sequence of B_k and A_k transforms for any bounded sequence differ by a convergent sequence only, so that a sequence of iterations of B_k matrices is b-equivalent to the iteration of the corresponding sequence of A_k matrices. We now denote the successive matrices B_1, $B_2\cdot B_1$, $\ldots$, $B_n\ldots B_1$, $\ldots$ by $C_1=(c_{mn}^1)$, $C_2=(c_{mn}^2)$, $\ldots$, $C_q=(c_{mn}^q)$, $\ldots$.

Let

$$t_m^k=\sum c_{mn}^k s_n \quad \text{and define} \quad c_{mn}^{p,k} \quad \text{for} \quad p>k>0$$

by

$$t_m^p=\sum c_{mn}^{p,k}\, t_n^k \quad \text{and} \quad c_{mn}^{p,0}=c_{mn}^p.$$

Since $(c_{mn}^{p,k})$ is obtained by $B_p\cdot B_{p-1}\ldots B_{k+1}$ and $\prod h(B_k)\leq M$,

$$\sum |c_{mn}^{p,k}|\leq M$$

and $\sum b_{mn}^k=1$ means that $\sum c_{mn}^{p,k}=1$ for all m.

Consider the iteration $B_{k+2} \cdot B_{k+1}$, since $\lambda_{k+2}(m)$ is a strictly increasing function of m, it is clear that the index of the first non zero element of the m-th row of $B_{k+2} \cdot B_{k+1}$ will be the index of the first non zero element of $t^{k+2}_{\lambda_{k+1}(m)}$. But $\lambda_{k+1}(m)$ is a strictly increasing function of m so that there must exist a strictly increasing function $\nu^{k+2,k}(m)$ such that $c^{k+2,k}_{m\,n} = 0$, $m \leq \nu^{k+2,k}(m)$. Finally it is clear that there exists a strictly increasing function $\nu^{p,k}(m)$ such that $c^{p,k}_{m\,n} = 0$, $m \leq \nu^{p,k}(m)$. We now choose a sequence $\{m_r\}$ so that

$$\operatorname*{Min}_{k=0,1,\ldots,r-1} [\nu^{r+1,k}(m_{r+1}) - \nu^{r,k}(m_r)] \geq 1 .$$

Then for fixed k,

$$\lim_{r\to\infty} \sum c^{r,k}_{m_r n} = 1$$

$$\sum |c^{r,k}_{m_r n}| \leq M$$

and $\lim\limits_{r\to\infty} c^{r,k}_{m_r n} = 0$.

Hence

$$\tau_r = \sum c^{r,k}_{m_r n}\, t^k_n$$

is a regular transformation and if $\{t^k_n\}$ converges for some k, $\{\tau_r\}$ converges. This proves our theorem.

If there were a sequence $\{s'_n\}$ not summable by any of the iterations, we could by omitting certain of the sequence of iterations choose our sequence $\{m_r\}$ so that $\{s'_n\}$ would be summed to the value determined by a collection point of the infinite bounded set $\left\{\lim\limits_{m\to\infty} \sup \sum c^k_{m\,n} s'_n\right\}$.

References

[1] AGNEW, R. P.: Inclusion relations among methods of summability compounded from given matrix methods. Ark. Mat. **2**, 361—374 (1952). — [2] BRUDNO, A.: Summation of bounded sequences by matrices (in Russian). Mat. Sbornik, N. S. **16**, 191—247 (1945). — [3] GOFFMAN, C., and G. M. PETERSEN: Submethods of regular matrix summability methods. Canad. J. Math. **8**, 40—46 (1956). — [4] PETERSEN, G. M.: Almost convergence and two matrix limitation methods. Math. Z. **66**, 225—227 (1956). — [5] PETERSEN, G. M.: The iteration of regular matrix methods of summation. Math. scand. **4**, 276—280 (1956). — [6] PETERSEN, G. M.: The norm of iterations of regular matrices. Proc. Cambridge Phil. Soc. **53**, 286—289 (1957).

University College of Swansea, Great Britain

(Eingegangen am 28. Februar 1957)

THOMA, E.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 153—188 (1957)

Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen*)

Von

ELMAR THOMA

Einleitung

Hat man in einem endlich-dimensionalen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ endlich viele paarweise orthogonale Projektionen E_ν, $\nu = 1, \ldots, r$, vorgegeben, deren Summe die identische Abbildung ist, so kann man $\mathfrak{H}$ als direkte Summe der Unterräume $\mathfrak{H}_\nu$, auf welche die E_ν projizieren, darstellen. Ist A eine lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, die mit sämtlichen E_ν vertauschbar ist, dann ist die Verengung A_ν von A auf $\mathfrak{H}_\nu$ eine lineare Transformation in $\mathfrak{H}_\nu$. A bestimmt die A_ν eindeutig und wird umgekehrt durch die A_ν eindeutig bestimmt.

In allgemeinen Hilbert-Räumen von beliebiger (auch überabzählbarer) Dimension sind die Dinge wegen des Auftretens von „Streckenspektren" nicht mehr so einfach. Eine erfolgreiche Behandlung des allgemeinen Falles ist sicher nur möglich, wenn man den Begriff der direkten Summe durch den allgemeineren Begriff des direkten Integrals (vgl. [*10*] und [*3*][1])) ersetzt. Wir werden das direkte Integral in einer für unsere Zwecke bequemen Weise im 5. Abschnitt einführen.

Wir gehen im allgemeinen Fall, wie im endlichen Fall, von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer geeigneten Menge $\mathfrak{M}$ von Projektionen in $\mathfrak{H}$ aus und fragen dann, ob sich $\mathfrak{H}$ „nach dieser Menge $\mathfrak{M}$ in ein direktes Integral zerlegen läßt". Die Mengen von Projektionen, die für uns in Betracht kommen, nennen wir ausgezeichnete Mengen [Definition s. (2)]. Im 1. und 2. Abschnitt betrachten wir die grundlegenden Eigenschaften von ausgezeichneten Mengen. Man kann die ausgezeichneten Mengen als vollständige Boolesche Verbände, genauer sogar als ein direktes Produkt von Maßverbänden, betrachten. Im 3. Abschnitt wird der zu dem Booleschen Verband einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ (nach [*11*]) isomorphe Mengenkörper $\mathfrak{R}_0$ konstruiert. In der größten Menge $X_{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{R}_0$ wird die von $\mathfrak{R}_0$ erzeugte Topologie eingeführt. Im 4. Abschnitt wird die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}_0$ auf $\mathfrak{M}$ zu einer σ-Homomorphie von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$ erweitert. $\mathfrak{R}$ ist dabei der kleinste von $\mathfrak{R}_0$ und der Menge $\mathfrak{n}$ aller mageren Mengen von $X_{\mathfrak{M}}$ erzeugte σ-Körper. Diese Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$ liefert ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$ (Satz 1).

Den Begriff des direkten Integrals $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit dem Maß $\mu/\mathfrak{R}'$ und das zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörige Spektralmaß $E/\mathfrak{R}'$ führen wir im 5. Abschnitt ein;

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

Einzelheiten findet man dort. Hier sei nur erwähnt, daß die Teilräume $\mathfrak{H}_x$, über die „integriert" wird, spezielle Teilräume eines festen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}'$ sind. Also sind die Vektorfelder [vgl. (11)] Funktionen, deren Werte Vektoren aus $\mathfrak{H}'$ sind.

Im 6. Abschnitt gehen wir von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ aus. $X_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{R}$ und $E/\mathfrak{R}$ werden, wie oben angegeben, konstruiert. Es existiert dann ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit einem Maß $\mu | \mathfrak{R}$ und eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ so, daß das zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ durch U in $E/\mathfrak{R}$ übergeführt wird (Satz 2). Wendet man dieses Verfahren auf den eingangs erwähnten endlichen Fall an, so erhält man die bekannten einfachen Ergebnisse. Unser Verfahren ist also im gewissen Sinne die direkte Verallgemeinerung des elementaren Verfahrens. Wir bemerken noch: Um die Dimension des zum Punkt $x \in X_{\mathfrak{M}}$ gehörigen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_x$ zu erhalten, benützen wir die Ergebnisse der allgemeinen Theorie der Vielfachheiten von Spektralmaßen, die in [5], Kap. III dargestellt ist.

Im 2. Teil der Arbeit werden die zu dem oben konstruierten direkten Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörigen Zerlegungen von linearen Transformationen aus $\mathfrak{S}$ betrachtet. Zur Definition der Zerlegung $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ einer Transformation A in $\mathfrak{S}$ siehe 7. Abschnitt (21) und (22). Eine Transformation besitzt im allgemeinen nicht nur eine Zerlegung. Die Eindeutigkeit der Zerlegung erhält man, wenn man sich auf stetige Zerlegungen beschränkt [vgl. (24)]. In Satz 3 zeigen wir, daß genau alle Transformationen aus $\mathfrak{M}'$, d.h. alle Transformationen, die mit allen Projektionen aus $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind, eine stetige Zerlegung besitzen. Ist $\boldsymbol{A}(x)$ bzw. $\boldsymbol{B}(x)$ bzw. $\boldsymbol{C}(x)$ die stetige Zerlegung von A bzw. B bzw. AB, dann gilt im allgemeinen nicht $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$. Die Punkte $x \in X_{\mathfrak{M}}$, in denen $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$ für alle $A, B \in \mathfrak{M}'$ gilt, nennen wir regulär. Im 11. Abschnitt wird gezeigt, daß im wesentlichen nur die isolierten Punkte von $X_{\mathfrak{M}}$ und die Punkte $x \in X_{\mathfrak{M}}$ mit endlich-dimensionalem $\mathfrak{H}_x$ regulär sind (Satz 13).

Im 8. und 9. Abschnitt wird unter anderem aus den bisherigen Ergebnissen gefolgert, daß jeder kommutative Ring $\mathfrak{R}$ (Definition s. 1. Abschnitt) isomorph zur Menge aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ ist (Satz 4 und 6) und daß die selbstadjungierten Transformationen eines kommutativen Ringes einen vollständigen Vektorverband bilden (Satz 7). Im 10. Abschnitt werden diese Sätze auf gewisse Mengen normaler, nicht notwendig beschränkter Transformationen übertragen (Satz 11 und 12).

In einem Anhang wird gezeigt, daß in $X_{\mathfrak{M}}$ jede magere Menge nirgendsdicht ist.

1. Ausgezeichnete Mengen von Projektionen

Unter einem *Hilbert-Raum* verstehen wir wie üblich einen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen, in dem ein Skalarprodukt erklärt ist und der vollständig bezüglich der dadurch eingeführten Norm ist. Über die Dimension eines Hilbert-Raumes machen wir keine Voraussetzung; ein

Hilbert-Raum kann also endliche, abzählbare oder überabzählbare Dimension haben. Wir betrachten im folgenden aber der Bequemlichkeit halber den Raum, der nur aus dem Nullvektor besteht, nicht als Hilbert-Raum.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{A}$ die Menge aller beschränkten, linearen Transformationen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$, so bezeichnen wir mit $A\mathfrak{L}$ das Bild von $\mathfrak{L}$ bei der Transformation A. Insbesondere ist also $A\mathfrak{H}$ der Wertebereich von A. Ist $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}^P$ die Menge aller Projektionen[2]) in $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}^P$ ist also die Menge aller Projektionen in $\mathfrak{H}$.

In $\mathfrak{A}^P$ kann man eine *teilweise Ordnung* einführen durch

$$E_1 \leq E_2 \text{ genau dann, wenn } E_1\mathfrak{H} \subset E_2\mathfrak{H}. \tag{1}$$

$\mathfrak{A}^P$ wird dadurch zu einem *vollständigen Verband*, d.h. das Supremum und das Infimum jeder Teilmenge von $\mathfrak{A}^P$ existiert und gehört zu $\mathfrak{A}^P$. Offensichtlich ist die identische Transformation I in $\mathfrak{H}$ das größte Element und die Nulltransformation 0 das kleinste Element in $\mathfrak{A}^P$. Wenn wir im folgenden das Supremum und das Infimum einer Menge von Projektionen bilden, so meinen wir stets das in $\mathfrak{A}^P$ gebildete Supremum oder Infimum. Weitere grundlegende Eigenschaften von Projektionen findet man z.B. in [5], § 26–30. Wir werden diese Sätze ohne besondere Hinweise benützen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}^P$ heißt *Teilverband* bzw. *σ-Teilverband* bzw. *vollständiger Teilverband* von $\mathfrak{A}^P$, wenn $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist gegen Supremum- und Infimumbildung endlicher bzw. abzählbarer bzw. beliebiger Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Gewisse Teilmengen von $\mathfrak{A}^P$ spielen für uns eine besondere Rolle; wir wollen sie *ausgezeichnet* nennen. Eine nicht leere Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}^P$ heißt ausgezeichnet, wenn gilt:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{M} \text{ ist kommutativ, d.h. } E_1E_2 = E_2E_1 \text{ für alle } E_1, E_2 \in \mathfrak{M}. \\ 2.\ \text{Aus } E \in \mathfrak{M} \text{ folgt } I - E \in \mathfrak{M}. \\ 3.\ \text{Aus } \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \text{ folgt } \sup\{E : E \in \mathfrak{N}\} \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Da $E \leftrightarrow I - E$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst ist, die die Ordnung umkehrt, ist eine ausgezeichnete Menge auch gegen die Infimumbildung beliebiger Teilmengen abgeschlossen. Eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist also ein *vollständiger Teilverband* von $\mathfrak{A}^P$ und daher selbst ein *vollständiger Verband* bezüglich der durch (1) in $\mathfrak{M}$ induzierten teilweisen Ordnung. I ist in diesem vollständigen Verband die *Einheit* (= das größte Element). Wir brauchen nur $I \in \mathfrak{M}$ zu zeigen. Mit $E \in \mathfrak{M}$ und $I - E \in \mathfrak{M}$ gilt auch $0 = \inf(E, I - E) \in \mathfrak{M}$ und damit auch $I = I - 0 \in \mathfrak{M}$.

Eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist sogar ein *vollständiger Boolescher Verband mit der Einheit* I. Dazu genügt es nach [1], S. 134 zu zeigen, daß für $E, F, G \in \mathfrak{M}$ mit $E \geq F \geq G$ genau ein $F' \in \mathfrak{M}$ existiert mit $\sup(F, F') = E$ und $\inf(F, F') = G$. Man rechnet leicht nach, daß nur $F' = E - F + G \in \mathfrak{M}$ diese Bedingungen erfüllt.

[2]) $E \in \mathfrak{A}$ heißt *Projektion*, wenn $E^2 = E$ und E selbstadjungiert ist, d.h. $E^* = E$ ist.

Ist $\mathfrak{R}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}'$ die Menge aller Transformationen aus $\mathfrak{A}$, die mit allen Transformationen aus $\mathfrak{R}$ und deren adjungierten vertauschbar sind. Es gilt dann: $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}^{(V)} = \cdots$ und $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}^{(IV)} = \cdots$. $\mathfrak{R}$ heißt *Ring*, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}''$ ist. Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, dann ist (wie man leicht beweist) $\mathfrak{R}^P$ eine ausgezeichnete Menge. Es wird sich später (in 9.) herausstellen, daß man auch jede ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ auf diese Weise gewinnen kann. Genauer gilt

$$\mathfrak{M}''^P = \mathfrak{M}. \tag{3}$$

2. Ausgezeichnete Mengen als Verbände

Nach dem Vorhergehenden ist eine ausgezeichnete Menge ein vollständiger Boolescher Verband. In diesem Abschnitt sollen die ausgezeichneten Mengen vom verbandstheoretischen Standpunkt aus betrachtet werden. Ist $\mathfrak{H}$ endlichdimensional, etwa n-dimensional, dann ist der Boolesche Verband einer ausgezeichneten Menge isomorph dem Verband aller Teilmengen einer Menge von höchstens n Elementen. Im allgemeinen Fall liegen die Dinge nicht mehr so einfach.

Eine ein-eindeutige Abbildung φ einer teilweise geordneten Menge $\mathfrak{R}$ auf eine teilweise geordnete Menge $\overline{\mathfrak{R}}$ nennen wir eine *o-Isomorphie* (Ordnungsisomorphie), wenn $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ mit $a \geq b$ gleichwertig ist. Eine o-Isomorphie überträgt natürlich Supremum und Infimum und daher auch das relative Komplement. Ist J eine Indexmenge und ist jedem $j \in J$ eine teilweise geordnete Menge X_j zugeordnet, so verstehen wir unter dem *geordneten Produkt* $\Pi\{X_j : j \in J\}$ die Produktmenge der X_j mit der teilweisen Ordnung $\{x_j\} \geq \{y_j\}$ genau dann, wenn $x_j \geq y_j$ für alle $j \in J$ gilt. Ferner nennen wir ein Element E einer teilweise geordneten Menge $\mathfrak{R}$ mit einem kleinsten Element 0 ein *Atom*, wenn $E \neq 0$ ist und aus $E' \in \mathfrak{R}$ und $E' \leq E$ entweder $E' = E$ oder $E' = 0$ folgt.

$\mathfrak{M}$ sei nun eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{a}$ sei die Menge aller Atome in $\mathfrak{M}$ und $\alpha(\mathfrak{M})$ *die Mächtigkeit* von $\mathfrak{a}$. Da bei einem o-Isomorphismus Atome in Atome übergehen, ist $\alpha(\mathfrak{M})$ eine *Invariante* gegenüber o-Isomorphismen von ausgezeichneten Mengen. Wir setzen $E_a = \sup\{E : E \in \mathfrak{a}\}$ für $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ [3]), $E_a = 0$ für $\mathfrak{a} = \emptyset$ und $E_c = I - E_a$. $\mathfrak{M}_a$ bzw. $\mathfrak{M}_c$ sei die Menge aller $E \in \mathfrak{M}$ mit $E \leq E_a$ bzw. $E \leq E_c$. $\mathfrak{M}_a$ und $\mathfrak{M}_c$ sind dann ebenfalls vollständige Boolesche Verbände. Die Abbildung $E \leftrightarrow (EE_a, EE_c)$ ist eine o-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ auf das geordnete Produkt $\mathfrak{M}_a \times \mathfrak{M}_c$. Ist φ eine o-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ auf die ausgezeichnete Menge $\overline{\mathfrak{M}}$, dann ist die Verengung von φ auf $\mathfrak{M}_a$ bzw. $\mathfrak{M}_c$ eine o-Isomorphie von $\mathfrak{M}_a$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_a$ bzw. von $\mathfrak{M}_c$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_c$, da Atome in Atome übergehen und Supremum-, Infimum- und Komplementbildungen übertragen werden.

$\mathfrak{M}_a$ ist ein vollständiger, atomarer Boolescher Verband und daher o-isomorph zum Verband $\mathfrak{P}(M)$ aller Teilmengen einer Menge M der Mächtigkeit $\alpha(\mathfrak{M})$. Wir müssen nun $\mathfrak{M}_c$ noch genauer betrachten. $\mathfrak{M}_c$ ist ein vollständiger

[3]) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge.

Boolescher Verband ohne Atome. Zur weiteren Behandlung von $\mathfrak{M}_c$ benötigen wir den Begriff der separablen Projektion in $\mathfrak{M}$.

Eine Projektion $E \in \mathfrak{M}$ heißt *separabel* (in $\mathfrak{M}$), wenn jede Teilmenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}$, die aus von Null verschiedenen paarweise orthogonalen Projektionen, die kleiner als E sind, besteht, abzählbar oder endlich ist. Ist I separabel, so nennen wir $\mathfrak{M}$ selbst *separabel*. (Zwei Projektionen heißen orthogonal, wenn $E_1 E_2 = \inf(E_1, E_2) = 0$ ist.)

Wir bemerken an dieser Stelle noch: Es sei vorübergehend $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}^P$, die (2) 1. und 2. erfüllt, aber statt (2) 3. nur (2) 3'.: Ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ eine abzählbare Teilmenge, dann gilt $\sup\{E: E \in \mathfrak{N}\} \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist dann im allgemeinen kein vollständiger Verband, sondern nur ein σ-Verband. Ist außerdem $\mathfrak{M}$ separabel, dann folgt (2) 3. aus (2) 3'. Ist insbesondere $\mathfrak{H}$ separabel, d.h. von endlicher oder abzählbarer Dimension, dann ist $\mathfrak{M}$ stets separabel und man kann (2) 3. durch (2) 3'. ersetzen.

Nach dieser Zwischenbemerkung sei nun $\mathfrak{M}$ wieder eine ausgezeichnete Menge und $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}'^P$. $\mathfrak{P}$ ist also die Menge aller Projektionen aus $\mathfrak{A}^P$, die mit allen Projektionen aus $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind. Wir setzen nun ähnlich wie in [5], S. 89 für ein $P \in \mathfrak{P}$

$$C(P) = \inf\{F: P \leq F \text{ und } F \in \mathfrak{M}\}. \tag{4}$$

In [5], S. 89 wird $C(P)$ (in unserer Schreibweise) durch $C(P) = \inf\{F: P \leq F \text{ und } F \in \mathfrak{M}''^P\}$ definiert. Es wird aber in den §§ 55–59 nur verwendet, daß $\mathfrak{M}''^P$ mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar ist und daß $\mathfrak{M}''^P$ (2) erfüllt. Diese Bedingungen erfüllt bei uns bereits $\mathfrak{M}$. Wir können daher alle Sätze und Definitionen aus §§ 55–59 einfach übernehmen. Es wird sich nachträglich sogar herausstellen, daß $\mathfrak{M}''^P = \mathfrak{M}$ ist [vgl. (3)]. Die beiden Definitionen sind also in Wirklichkeit gar nicht verschieden. Wir bemerken noch: Die Ergebnisse dieser Paragraphen lassen sich aus einfachen Eigenschaften von Projektionen ableiten. Man benötigt dazu insbesondere nicht die in [5], Kap. II bewiesenen Spektralsätze.

Ist $x \in \mathfrak{H}$, dann bezeichnen wir mit $Z(x)$ die Projektion, die auf den von $\{Ex: E \in \mathfrak{M}\}$ aufgespannten Teilraum projiziert. Nach [5], S. 91, Theorem 1 ist $Z(x) \in \mathfrak{P}$. Für $C(Z(x))$ setzen wir der Kürze halber wie in [5] $C(x)$.

Lemma 1. Eine Projektion $E \in \mathfrak{M}$ ist dann und nur dann separabel, wenn es ein $x \in \mathfrak{H}$ gibt mit $C(x) = E$. Es ist dann $Fx \neq 0$ für jedes $F \in \mathfrak{M}$ mit $F \leq C(x) = E$ und $F \neq 0$.

Beweis. [5], S. 92, Theorem 2 und 5 und S. 93, Theorem 3.

Lemma 2. Zu jedem $E \in \mathfrak{M}$ mit $E \neq 0$ gibt es ein System $\{E_j: j \in J\}$ von paarweise orthogonalen und separablen Projektionen $E_j \in \mathfrak{M}$ mit $E_j \neq 0$ und $\sup\{E_j: j \in J\} = E$.

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales System $\{E_j: j \in J\}$ von paarweise orthogonalen, separablen Projektionen mit $E_j \neq 0$ und $E_j \leq E$ und $E_j \in \mathfrak{M}$. Wir zeigen, daß für dieses System auch $\sup\{E_j: j \in J\} = E$ gilt. Angenommen es wäre $F = \sup\{E_j: j \in J\} \neq E$ ($F = 0$, falls $J = \emptyset$), dann

gilt für $E'=E-F\in\mathfrak{M}$, $E'\neq 0$ und $E'F=0$, also ist auch $E'E_j=0$ für alle $j\in J$. Wählt man nun $x\neq 0$ aus $E'\mathfrak{H}$, dann gilt $C(x)\leq E'$, denn aus [5], S. 92, Theorem 4 und $\mathfrak{P}>\mathfrak{M}$ folgt $Z(x)\leq E'$ und wegen (4) ist dann $C(x)\leq E'$. Wegen $C(x)x=x$ ist $C(x)\neq 0$ und nach Lemma 1 separabel. $\{E_j: j\in J\}$ kann daher durch $C(x)$ erweitert werden. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\{E_j: j\in J\}$. Also ist $F=E$, w. z. b. w.

Wir nennen ein System $\{E_j: j\in J\}$ mit den in Lemma 2 angegebenen Eigenschaften eine *separable Basis* von E in $\mathfrak{M}$.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage eine zweite Invariante $\gamma(\mathfrak{M})$ gegenüber o-Isomorphismen ausgezeichneter Mengen anzugeben. Wir setzen $\gamma(\mathfrak{M})=0$, falls $E_c=0$ ist, und $\gamma(\mathfrak{M})=1$, falls $E_c\neq 0$ und separabel ist. Liegt keiner dieser beiden Fälle vor, so setzen wir $\gamma(\mathfrak{M})$ gleich der Mächtigkeit einer separablen Basis von E_c in $\mathfrak{M}$. Ist $\{E_j: j\in J\}$ eine solche Basis, dann ist J sicher überabzählbar, da das Supremum von abzählbar oder endlich vielen separablen Projektionen selbst separabel ist. Aus der Beziehung $\aleph_0\cdot\alpha=\alpha$ [4]) für Mächtigkeiten $\alpha\geq\aleph_0$ und der Separabilität der E_j folgt dann, daß im letzten Fall die Mächtigkeiten zweier separablen Basen von E_c gleich sind. Damit ist unsere Definition von $\gamma(\mathfrak{M})$ gerechtfertigt. $\gamma(\mathfrak{M})$ ist eine *Invariante* gegenüber o-Isomorphismen ausgezeichneter Mengen, da $\mathfrak{M}_c$ in $\mathfrak{M}_c$ übergeht und separable Projektionen in separable übergehen, denn alle Supremum- und Infimumbildungen bleiben erhalten.

$\alpha(\mathfrak{M})$ und $\gamma(\mathfrak{M})$ sind im allgemeinen kein vollständiges Invariantensystem. Sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ zwei ausgezeichnete Mengen, so ist $\alpha(\mathfrak{M})=\alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M})=\gamma(\overline{\mathfrak{M}})$ zwar notwendig für die o-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$, aber im allgemeinen nicht hinreichend. Ist $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$, so ist

$$\alpha(\mathfrak{M})\leq\dim\mathfrak{H}\quad\text{und}\quad\aleph_0\cdot\gamma(\mathfrak{M})\leq\dim\mathfrak{H}\ [5]); \tag{5}$$

denn $E_a\mathfrak{H}$ hat mindestens die Dimension $\alpha(\mathfrak{M})$ und $E_j\mathfrak{H}$ mindestens die Dimension $\aleph_0$ für alle $j\in J$, dabei ist $\{E_j: j\in J\}$ eine separable Basis von E_c. Ist $\dim\mathfrak{H}\leq\aleph_0$, dann kann nur $\gamma(\mathfrak{M})=0$ oder $=1$ sein.

Lemma 3. Ist $E_0\neq 0$ separabel in $\mathfrak{M}$, dann ist der vollständige Boolesche Verband $\mathfrak{M}_0=\{E: E\in\mathfrak{M}\text{ und }E\leq E_0\}$ ein Maßverband, d.h. es gibt ein endliches Maß μ über $\mathfrak{M}_0$ mit $\mu(E)=0$ nur für $E=0$. Als Maß μ kann man $\mu(E)=(Ex_0, x_0)$ für ein $x_0\in\mathfrak{H}$ mit $C(x_0)=E_0$ wählen.

Beweis. Nach Lemma 1 gibt es ein $x_0\in\mathfrak{H}$ mit $C(x_0)=E_0$. Dann ist $\mu(E)=(Ex_0, x_0)$ ein Maß, das wegen Lemma 1 die Behauptungen von Lemma 3 erfüllt.

Aus Lemma 2 und 3 folgt: $\mathfrak{M}_c$ ist o-isomorph zu dem geordneten Produkt von $\gamma(\mathfrak{M})$ nicht atomaren Maßverbänden $\mathfrak{M}_j$ mit $\mathfrak{M}_j=\{E: E\in\mathfrak{M}\text{ und }E\leq E_j\}$; dabei ist $\{E_j: j\in J\}$ eine separable Basis von E_c.

Für ausgezeichnete Mengen aus separablen Hilbert-Räumen ist $\alpha(\mathfrak{M})$ und $\gamma(\mathfrak{M})$ ein vollständiges Invariantensystem gegen o-Isomorphismen.

---

[4]) $\aleph_0$ = Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.

[5]) dim $\mathfrak{H}$ = Mächtigkeit einer orthonormierten Basis von $\mathfrak{H}$.

Beweis. $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ seien zwei ausgezeichnete Mengen in separablen Hilbert-Räumen mit $\alpha(\mathfrak{M}) = \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}})$. $\mathfrak{M}_a$ und $\overline{\mathfrak{M}}_a$ sind dann o-isomorph, da sie beide o-isomorph zu Verband aller Teilmengen einer Menge M der Mächtigkeit $\alpha(\mathfrak{M})$ sind. Ist $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}}) = 0$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a$ und $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_a$; also sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ o-isomorph. Im Falle $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}}) = 1$ müssen wir noch die o-Isomorphie von $\mathfrak{M}_c$ und $\overline{\mathfrak{M}}_c$ beweisen. Es genügt dazu zu zeigen, daß bei $\gamma(\mathfrak{M}) = 1$ $\mathfrak{M}_c$ o-isomorph ist zum Verband $\mathfrak{T}$ aller Lebesgue-meßbaren Mengen des Intervalles $[0, 1]$ modulo Nullmengen. $\mathfrak{M}_c$ ist ein vollständiger Boolescher Verband ohne Atome. In $\mathfrak{M}_c$ führen wir durch $\mu(E) = (Ex_0, x_0) = |Ex_0|^2$ ein endliches Maß mit $\mu(E) = 0$ nur für $E = 0$ ein. Nach Lemma 3 ist dies möglich, da E_c separabel ist. In $\mathfrak{M}_c$ kann man dann durch $|E_1, E_2| = \mu(\sup(E_1, E_2) - \inf(E_1, E_2)) = |E_1x_0 - E_2x_0|^2$ eine Metrik einführen. Nach [9], S. 386 gibt es eine Folge $E_1, E_2, \ldots$, die bezüglich dieser Metrik dicht in $\mathfrak{M}_c$ liegt. $\mathfrak{M}_c$ ist also ein *separabler Raum bezüglich dieser Metrik*. Nach einem bekannten Isomorphiesatz der Maßtheorie (vgl. [4], S. 173) ist $\mathfrak{M}_c$ o-isomorph zu $\mathfrak{T}$, w. z. b. w.

Im Falle eines separablen Hilbert-Raumes kann man also leicht eine vollkommene Übersicht über sämtliche möglichen Verbandstypen ausgezeichneter Mengen gewinnen. Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir wieder zum allgemeinen Fall zurück.

3. Der zu einer ausgezeichneten Menge gehörige topologische Raum

$\mathfrak{M}$ sei auch in diesem Abschnitt eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{M}$ ist ein Boolescher Verband und nach einem Satz von M. H. Stone ([11], S. 106) ist ein Boolescher Verband isomorph zu einem Mengenkörper $\mathfrak{K}_0$. Wir skizzieren kurz die Konstruktion von $\mathfrak{K}_0$ (vgl. [12]), da wir uns im weiteren Verlauf dieses Abschnittes noch eingehend mit dieser Darstellung von $\mathfrak{M}$ beschäftigen müssen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}$ heißt *Filter*, wenn

1. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$,
2. $0 \notin \mathfrak{F}$,
3. aus $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$ folgt $E_1E_2 \in \mathfrak{F}$,
4. aus $E \in \mathfrak{F}$ und $E' \in \mathfrak{M}$ und $E' \geq E$ folgt $E' \in \mathfrak{F}$.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn $\mathfrak{F}$ nicht echte Teilmenge eines anderen Filters ist. Mit $X_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen wir im folgenden stets die Menge aller Ultrafilter von $\mathfrak{M}$. Jedem Element $E \in \mathfrak{M}$ wird die Menge $M_E = \{\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \in X_{\mathfrak{M}} \text{ und } E \in \mathfrak{F}\}$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein-eindeutig und es gilt nach dem Satz von M. H. Stone:

$$M_{E_1} \cup M_{E_2} = M_{\sup(E_1, E_2)} \quad \text{und} \quad M_{I-E} = X_{\mathfrak{M}} - M_E. \tag{6}$$

In $X_{\mathfrak{M}}$ führen wir mit Hilfe von $\mathfrak{K}_0 = \{M_E: E \in \mathfrak{M}\}$ eine *Topologie* ein. Eine Teilmenge M von $X_{\mathfrak{M}}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $M_E \in \mathfrak{K}_0$ mit $x \in M_E \subset M$ gibt. Durch diese Topologie wird $X_{\mathfrak{M}}$ zu einem kompakten, total-unzusammenhängenden Hausdorff-Raum und $\mathfrak{K}_0$ ist das System aller

gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen. $X_{\mathfrak{M}}$ hat noch folgende wichtige Eigenschaft: *Die abgeschlossene Hülle jeder offenen Menge ist offen* und gehört daher zu $\mathfrak{R}_0$.

Beweis. Ist M offen, dann ist $M = \cup\{M_E : M_E \subset M\}$. Es sei $F = \sup\{E : M_E \subset M\}$ und $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle von M. Wir zeigen $M_F = \overline{M}$ und haben damit die Behauptung bewiesen. Wegen $F \geq E$ ist $M_F \supset M_E$ für alle $M_E \subset M$, also ist $M_F \supset M$. Da M_F abgeschlossen ist, gilt also auch $M_F \supset \overline{M}$. Wäre nun $M_F \neq \overline{M}$, dann wäre $M_F - \overline{M} \neq \emptyset$ und offen. Es gäbe also ein $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $E_0 \neq 0$ und $M_{E_0} \subset M_F - \overline{M} \subset M_F - M_E = M_{F-E}$ für alle $M_E \subset M$. Daher wäre $E_0 \leq F - E$, also auch $E_0 E = 0$ für alle E mit $M_E \subset M$. Hieraus folgt $E_0 F = 0$ und wegen $E_0 \leq F - E \leq F$ gilt auch $E_0 F = E_0$. Es wäre also $E_0 = 0$. Das ist ein Widerspruch; es ist $M_F = \overline{M}$, w. z. b. w.

Wir ziehen aus dieser Tatsache noch zwei Folgerungen.

(7) Aus $F = \sup\{E_j : j \in J\}$ folgt $M_F = \overline{\cup\{M_{E_j} : j \in J\}}$;

dabei bezeichnen wir allgemein mit $\overline{N}$ die abgeschlossene Hülle einer Menge $N \subset X_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. $M = \cup\{M_{E_j} : j \in J\}$ ist offen, also ist $\overline{M} = M_{F'}$ für ein $F' \in \mathfrak{M}$. Wegen $M_F \supset \overline{M}$ ist $F \geq F'$ und wegen $M_{F'} \supset M$ ist $F' \geq E_j$ für alle $j \in J$ und damit $F' \geq F$. Es ist $F' = F$ und $M_F = \overline{M}$, w. z. b. w.

Lemma 4. Ist M eine offene Menge in $X_{\mathfrak{M}}$ und f eine stetige Abbildung von M in $[-\infty, +\infty]$, dann kann f stetig auf ganz $X_{\mathfrak{M}}$ erweitert werden (vgl. [8], S. 215).

Beweis. Wir setzen $g(x) = 0$ für $x \notin \overline{M}$ und $g(x_0) = \inf\{\sup\{f(x) : x \in M_E \cap M\} : E \in \mathfrak{M}$ und $x_0 \in M_E\}$ für $x_0 \in \overline{M}$. $g(x)$ stimmt auf M mit $f(x)$ überein. Da $\overline{M}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist und f stetig auf M ist, brauchen wir die Stetigkeit von $g(x)$ nur noch für $x \in \overline{M} - M$ nachzuweisen. Es sei $x_0 \in \overline{M} - M$. Ist $\lambda > g(x_0)$, dann gibt es ein $E \in \mathfrak{M}$ mit $x_0 \in M_E \subset \overline{M}$ und $\sup\{f(x) : x \in M_E \cap M\} < \lambda$. Dann ist $g(x) < \lambda$ für alle $x \in M_E$ und M_E ist eine Umgebung von x_0. Ist $g(x_0) > \lambda$ und ist $B = \{x : x \in M$ und $f(x) < \lambda\}$, dann ist $x_0 \notin \overline{B}$, da $\overline{B}$ offen und abgeschlossen ist und $g(x) \leq \lambda$ auf $\overline{B}$ ist. Also gehört x_0 zur offenen Menge $\overline{M} - \overline{B}$. Da $f(x) \geq \lambda$ für $x \in M \cap \overline{M} - \overline{B}$, ist $g(x) \geq \lambda$ für $x \in \overline{M} - \overline{B}$. g ist daher stetig auf $\overline{M} - M$ und $X_{\mathfrak{M}}$, w. z. b. w.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ zwei ausgezeichnete Mengen, so sind $X_{\mathfrak{M}}$ und $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$ dann und nur dann homöomorph, wenn $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ o-isomorph sind.

Beweis. $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ seien o-isomorph. Diese o-Isomorphie führt Ultrafilter in Ultrafilter über. Sie erzeugt dadurch eine Abbildung von $X_{\mathfrak{M}}$ auf $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$. Diese Abbildung ist eine Homöomorphie. Gibt es umgekehrt eine Homöomorphie von $X_{\mathfrak{M}}$ auf $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$, dann führt sie offene und abgeschlossene Mengen in ebensolche über. $\mathfrak{R}_0$ ist daher o-isomorph zu $\overline{\mathfrak{R}}_0$ und da $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}_0$ o-isomorph zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}$ sind, ist $\mathfrak{M}$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$ o-isomorph.

Für die Homöomorphie von $X_{\mathfrak{M}}$ und $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$ ist $\alpha(\mathfrak{M}) = \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}})$ notwendig und wenn $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ ausgezeichnete Mengen aus separablen Hilbert-Räumen sind, ist dies sogar hinreichend.

4. Ausgezeichnete Mengen als Wertebereiche von Spektralmaßen

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{A}^P$ die Menge der Projektionen in $\mathfrak{H}$. Eine Abbildung E von einem σ-Mengenkörper $\mathfrak{R}$ mit der größten Menge X in $\mathfrak{H}$ heißt ein *Spektralmaß*, wenn gilt:

$$(8)\quad \begin{cases} 1.\ E(X) = I \\ 2.\ \text{Aus } M_\nu \in \mathfrak{R},\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ und } M_\nu \cap M_\mu = \emptyset \text{ für } \nu = \mu \\ \quad \text{folgt } E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_\nu)^6). \end{cases}$$

Wir stellen uns in diesem Abschnitt die Aufgabe, ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ zu konstruieren, das als Wertebereich eine vorgegebene ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ besitzt. Wir geben für diese Aufgabe eine spezielle Lösung an, deren wichtigste Eigenschaft in Lemma 7 bewiesen wird. Zunächst konstruieren wir den σ-Körper $\mathfrak{R}$, der als Definitionsbereich des Spektralmaßes benützt wird.

$X_{\mathfrak{M}}$ sei der im vorigen Abschnitt betrachtete topologische Raum. Eine Teilmenge M von $X_{\mathfrak{M}}$ heißt *mager* (= von 1. Kategorie), wenn M Vereinigung von abzählbar vielen nirgends-dichten Mengen ist. Da $X_{\mathfrak{M}}$ kompakt ist, ist $X_{\mathfrak{M}}$ ein *Bairescher Raum* (vgl. [2], S. 7). Das Komplement einer mageren Menge ist daher überall dicht in $X_{\mathfrak{M}}$ und eine nicht leere offene Menge ist niemals mager. $\mathfrak{n}$ sei das System aller mageren Mengen. $\mathfrak{n}$ hat folgende Eigenschaften:

$$(9)\quad \begin{cases} 1.\ \text{Aus } M \in \mathfrak{n} \text{ und } N \subset M \text{ folgt } N \in \mathfrak{n}. \\ 2.\ \text{Aus } M_\nu \in \mathfrak{n},\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ folgt } \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \mathfrak{n}. \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ sei der kleinste σ-Körper, der $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{R}_0$ (s. 3. Abschnitt) umfaßt. Alle offenen Mengen gehören zu $\mathfrak{R}$, denn aus M offen folgt $\overline{M} - M$ nirgends-dicht und $\overline{M} \in \mathfrak{R}_0$, also $M \in \mathfrak{R}$.

Lemma 5. Zu jedem $M \in \mathfrak{R}$ gibt es genau ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$.

Beweis. Eindeutigkeit: Es sei $(M - M_0) \cup (M_0 - M) \in \mathfrak{n}$ und $(M - M_1) \cup (M_1 - M) \in \mathfrak{n}$ mit $M_0, M_1 \in \mathfrak{R}_0$. Dann ist wegen $(M_1 - M_0) \cup (M_0 - M_1) \subset (M - M_0) \cup (M_0 - M) \cup (M - M_1) \cup (M_1 - M)$ auch $(M_1 - M_0) \cup (M_0 - M_1) \in \mathfrak{n}$. Diese Menge ist aber offen, also leer, und daher ist $M_1 = M_0$.

Existenz: $\mathfrak{R}'$ sei die Menge aller $M \subset X_{\mathfrak{M}}$, zu denen ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ existiert mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$. Es ist $\mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{n} \subset \mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$. Wenn wir noch zeigen, daß $\mathfrak{R}'$ ein σ-Körper ist, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$. Mit M gehört auch $X_{\mathfrak{M}} - M$ zu $\mathfrak{R}'$, denn $\big((X_{\mathfrak{M}} - M_0) - (X_{\mathfrak{M}} - M)\big) \cup \big((X_{\mathfrak{M}} - M) - (X_{\mathfrak{M}} - M_0)\big) = (M - M_0) \cup (M_0 - M)$. Aus $M_\nu \in \mathfrak{R}'$, $\nu = 1, 2, \ldots$, folgt $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu = M \in \mathfrak{R}'$. Zu jedem M_ν gibt es ein $M_{\nu,0} \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_\nu - M_{\nu,0}) \cup (M_{\nu,0} - M_\nu) \in \mathfrak{n}$. Es ist dann nach (9) $\Big(M - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}\Big) \cup \Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0} - M\Big) \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu - M_{\nu,0}) \cup \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_{\nu,0} - M_\nu) \in \mathfrak{n}$. Ferner gilt

---

6) $E = \sum_{j \in J} E_j$ bedeutet $Ex = \sum_{j \in J} E_j x$ für alle $x \in \mathfrak{H}$.

$\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0} \in \mathfrak{n}$, da $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}$ offen ist. Es gilt also insgesamt $\left(M - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}}\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} - M\right) \in \mathfrak{n}$ und $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} \in \mathfrak{R}_0$ und daher $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \mathfrak{R}'$, w. z. b. w.

Wir müssen jetzt noch eine Abbildung E von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$ erklären. Zu $M \in \mathfrak{R}$ gibt es nach Lemma 5 genau ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$ und zu M_0 genau ein $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $M_{E_0} = M_0$; wir setzen nun $E(M) = E_0$ und erhalten eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$, da bereits $\mathfrak{R}_0$ auf $\mathfrak{M}$ abgebildet wird.

Lemma 6. Die Abbildung $M \to E(M)$ des σ-Körpers $\mathfrak{R}$ auf die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist eine σ-Homomorphie, d.h. es gilt:

1. $E(X_{\mathfrak{M}} - M) = I - E(M)$.

2. Aus $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ folgt $E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\}$.

Außerdem gilt:

3. $E(M) = 0$ genau dann, wenn $M \in \mathfrak{n}$.

Beweis. Zu 1.: Gehört $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ zu $M \in \mathfrak{R}$, so gehört $X_{\mathfrak{M}} - M_0 \in \mathfrak{R}_0$ zu $X_{\mathfrak{M}} - M \in \mathfrak{R}$ (vgl. Beweis von Lemma 5). Also ist $E(X_{\mathfrak{M}} - M) = E(X_{\mathfrak{M}} - M_0) = E(X_{\mathfrak{M}}) - E(M_0) = I - E(M)$.

Zu 2.: $E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = E\left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}}\right)$ (vgl. Beweis von Lemma 5) $= \sup\{E(M_{\nu,0}) : \nu = 1, 2, \ldots\}$ [nach (7)] $= \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\}$.

Zu 3.: $E(M) = 0$ ist gleichwertig mit $E(M_0) = 0$ für das zu M gehörige $M_0 \in \mathfrak{R}_0$. Dies ist wiederum gleichwertig mit $M_0 = \emptyset$, also ist $M \in \mathfrak{n}$.

Satz 1. *Die Abbildung $M \to E(M)$ ist ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$. Das System der E-Nullmengen ist $\mathfrak{n}$.*

Beweis. Wegen Lemma 6 haben wir nur noch zu zeigen, daß $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß ist. $E(X_{\mathfrak{M}}) = I$ ist erfüllt. Es sei $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und $M_\nu \cap M_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$, dann ist nach Lemma 6 $E(M_\nu \cap M_\mu) = 0 = \inf\left(E(M_\nu), E(M_\mu)\right) = E(M_\nu)\,E(M_\mu)$. Die $E(M_\nu)$ sind also paarweise orthogonal. Nach Lemma 6 ist ferner $E\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty} M_\nu\right) = \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_\nu)$. Die letzte Gleichung gilt wegen der paarweisen Orthogonalität nach [5], S. 49.

Wir benötigen im folgenden noch eine wichtige Eigenschaft der $\mathfrak{R}$-meßbaren Funktionen. Eine reelle Funktion f über $X_{\mathfrak{M}}$ mit Werten aus $[-\infty, +\infty]$ heißt *$\mathfrak{R}$-meßbar*, wenn die Mengen $\{x : f(x) \geq \lambda\}$ für alle endlichen reellen Zahlen λ aus $\mathfrak{R}$ sind. Komplexwertige Funktionen nennen wir $\mathfrak{R}$-meßbar, wenn Real- und Imaginärteil $\mathfrak{R}$-meßbar sind.

Lemma 7. Zu jeder $\mathfrak{R}$-meßbaren reellen Funktion f gibt es eine und nur eine stetige Funktion g, so daß $\{x : f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{n}$ ist.

Beweis. Existenz: Wir können uns auf $f \geq 0$ beschränken. Wir definieren f_n durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } f(x) \geq n \\ \dfrac{m}{2^n} & \text{für } \dfrac{m+1}{2^n} > f(x) \geq \dfrac{m}{2^n} \end{cases}, \qquad m = 0, 1, \ldots, 2^n n - 1.$$

Offenbar ist f_n $\mathfrak{R}$-meßbar und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Weiter sei

$$M_{n,m} = \left\{x: \frac{m+1}{2^n} > f(x) \geq \frac{m}{2^n}\right\}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^n n - 1$$

und

$$M_{n,2^n n} = \{x: f(x) \geq n\}.$$

$M^0_{n,m}$ seien diejenigen Mengen aus $\mathfrak{R}_0$, die sich nur um eine magere Menge von $M_{n,m}$ unterscheiden. Es ist $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'} = \emptyset$ für $m \neq m'$, da $M_{n,m} \cap M_{n,m'} = \emptyset$, also $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'} \in \mathfrak{n}$ und $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'}$ offen ist. Nun setzen wir

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \in M^0_{n,2^n n} \\ \dfrac{m}{2^n} & \text{für } x \in M^0_{n,m},\ m < 2^n n. \end{cases}$$

g_n ist stetig und nur auf einer mageren Menge von f_n verschieden. Ferner ist die Folge g_n nicht fallend und gleichmäßig konvergent. Also ist $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ stetig und höchstens auf einer mageren Menge von f verschieden [nach (9)].

Eindeutigkeit: Seien g_1 und g_2 stetige Funktionen mit $\{x: f(x) \neq g_i(x)\} \in \mathfrak{n}$, $i = 1, 2$, dann ist auch $\{x: g_1(x) \neq g_2(x)\} \in \mathfrak{n}$. Diese Menge ist aber wegen der Stetigkeit der g_i offen und daher leer, w. z. b. w.

Da alle offenen Mengen zu $\mathfrak{R}$ gehören, sind alle stetigen Funktionen $\mathfrak{R}$-meßbar, und da eine Änderung auf einer mageren Menge die $\mathfrak{R}$-Meßbarkeit nicht ändert, gilt: Die $\mathfrak{R}$-meßbaren Funktionen sind genau die Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$, die sich nur auf einer mageren Menge von einer stetigen unterscheiden.

5. Das direkte Integral

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des direkten Integrals ein (vgl. [*10*] und [*3*]). Es sei $\mathfrak{H}'$ ein Hilbert-Raum und $\{e_k: k \in K\}$ eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}'$. Ferner sei $\mathfrak{R}$ ein σ-Mengenkörper mit der größten Menge X und μ ein vollständiges Maß über $\mathfrak{R}$. Jedem Punkt $x \in X$ sei eine Teilmenge $K_x \subset K$ zugeordnet und $\mathfrak{H}_x$ sei der von $\{e_k: k \in K_x\}$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{H}'$. Wir fordern nun:

(10)
1. Die $\mathfrak{H}_x$ mit $x \in X$ spannen $\mathfrak{H}'$ auf (d.h. $\mathfrak{H}'$ ist nicht überflüssig groß).
2. Für $x, y \in X$ ist entweder $\mathfrak{H}_x \supset \mathfrak{H}_y$ oder $\mathfrak{H}_y \supset \mathfrak{H}_x$. Das ist gleichwertig mit $K_x \supset K_y$ oder $K_y \supset K_x$.
3. $\{x: k \in K_x\} \in \mathfrak{R}$ für alle $k \in K$.

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich X heißt ein *Vektorfeld*, wenn

(11) $$f(x) \in \mathfrak{H}_x \text{ für alle } x \in X.$$

$\mathfrak{S}$ sei nun die Menge aller Vektorfelder f mit folgenden Eigenschaften:

(12)
1. $(f(x), e_k)$ ist $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $k \in K$.
2. Zu f gibt es eine μ-Nullmenge N_f mit $(f(x), e_k) \equiv 0$ auf $X - N_f$ für alle $k \in K$ bis auf abzählbar viele Ausnahmen.
3. $\int |f(x)|^2 \, d\mu < +\infty$.

Die Existenz von $\int |f(x)|^2 d\mu$ folgt aus 1. und 2.; in 3. wird für die Vektorfelder aus $\mathfrak{S}$ die Endlichkeit dieses Integrals gefordert. Wir führen in $\mathfrak{S}$ durch

$$(f, g) = \int (f(x), g(x))\, d\mu \tag{13}$$

ein *Skalarprodukt* ein. $\mathfrak{S}$ ist dann unitär-isomorph der direkten Summe der Hilbert-Räume $\mathfrak{L}_k$, $k \in K$, wobei $\mathfrak{L}_k$ der Hilbert-Raum aller über $M_k = \{x: k \in K_x\} = \{x: e_k \in \mathfrak{H}_x\}$ quadratisch μ-integrierbaren Funktionen ist. $\mathfrak{S}$ ist also ein Hilbert-Raum. (Wie üblich werden dabei alle f aus $\mathfrak{S}$ gleichgesetzt, die sich nur auf einer μ-Nullmenge unterscheiden.) Wir nennen $\mathfrak{S}$ *das direkte Integral der $\mathfrak{H}_x$ mit dem Maß $\mu/\mathfrak{R}$* und schreiben dafür $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$.

Lemma 8. Ist $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $\mathfrak{S}$, dann gibt es eine Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ mit $f(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$ μ-fast überall. Ist umgekehrt $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ eine Teilfolge von $f_1, f_2, \ldots$, die μ-fast überall konvergiert, so ist $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) = f(x)$ μ-fast überall.

Den Beweis von Lemma 8 kann man durch direkte Übertragung des Beweises für den entsprechenden Satz für quadratisch integrierbare Funktionen führen (vgl. [*10*], S. 413, Beweis von Lemma 2). Wir übergehen diesen Beweis.

Ist $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit dem Maße $\mu/\mathfrak{R}$, so ordnen wir jedem $M \in \mathfrak{R}$ eine Transformation $E(M)$ in $\mathfrak{S}$ zu, indem wir $E(M)f = \chi_M f$ für alle $f \in \mathfrak{S}$ setzen (χ_M = charakteristische Funktion von M). $E(M)$ ist dann eine Projektion in $\mathfrak{S}$ und die Abbildung $M \to E(M)$ ist ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$. Wir nennen $E/\mathfrak{R}$ *das zum direkten Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörige Spektralmaß.*

Im nächsten Abschnitt werden wir folgendes Problem zu lösen haben: Gegeben ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$. Gesucht ist ein direktes Integral $\mathfrak{S}$ und eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß

$$U^{-1} E(M)\, U = E'(M) \quad \text{für alle } M \in \mathfrak{R}; \tag{14}$$

dabei ist $E'/\mathfrak{R}$ das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß.

6. Das Umkehrproblem

Im folgenden sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$. Wenn $\mathfrak{M}$ nur endlich viele Elemente enthält (dies ist z.B. stets der Fall, wenn $\mathfrak{H}$ endlich-dimensional ist), so können wir $\mathfrak{H}$ so als direkte Summe $\mathfrak{H} = \bigoplus_{\nu=1}^{n} \mathfrak{H}_\nu$ darstellen, daß die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ zu dieser direkten Summe gehört. Im allgemeinen Fall ist dies wegen des Auftretens nicht atomarer Verbände nicht möglich. Wir betrachten daher das folgende allgemeinere *Umkehrproblem*: Gesucht ist ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ durch

$$U E'(M)\, U^{-1} = E(M)$$

in ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$ übergeführt wird, das den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Für dieses Problem geben wir in diesem Abschnitt eine spezielle Lösung

an. Unsere Lösungsmethode führt im endlichen Fall auf die bekannten einfachen Ergebnisse; sie ist sozusagen die „natürliche" Verallgemeinerung der elementaren Methode.

Wir gehen folgendermaßen vor: Gegeben ist also der Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$. Im 3. Abschnitt konstruierten wir den topologischen Raum $X_{\mathfrak{M}}$ und im 4. Abschnitt den σ-Körper $\mathfrak{R}$ und das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$, das den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Unser Umkehrproblem ist also gelöst, wenn wir das am Ende des vorigen Abschnittes gestellte Problem für den Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ gelöst haben. Wir müssen ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit einem Maß $\mu/\mathfrak{R}$ und einem zugehörigen Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ und eine unitäre Transformation U so konstruieren, daß (14) erfüllt ist. Wir konstruieren dazu zunächst ein geeignetes Maß $\mu/\mathfrak{R}$ und dann die Räume $\mathfrak{H}_x$ so, daß (10) erfüllt ist. Dann definieren wir mit Hilfe von (11), (12) und (13) das direkte Integral $\mathfrak{S}$ und zeigen, daß (14) tatsächlich erfüllt ist. Wir führen nun dieses Programm durch.

Zuerst verschaffen wir uns ein geeignetes Maß $\mu/\mathfrak{R}$. Nach Lemma 2 gibt es eine separable Basis von I in $\mathfrak{M}$. $\{E_j : j \in J\}$ sei eine solche Basis. Zu jedem $j \in J$ gibt es genau ein $M_j \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_j) = E_j$. Diese M_j sind paarweise fremd [nach (6)]. Nach Lemma 1 gibt es zu jedem $j \in J$ ein $x_j \in \mathfrak{H}$ mit $C(x_j) = E_j$. Dann ist

$$(15) \qquad \mu_j(M) = (E(M)\, x_j, x_j) \text{ für } M \in \mathfrak{R}_j = \{M : M \in \mathfrak{R} \text{ und } M < M_j\}$$

ein endliches Maß über $\mathfrak{R}_j$. Wir setzen nun

$$(16) \qquad \mu(M) = \sum_{j \in J} \mu_j(M \cap M_j) \text{ für } M \in \mathfrak{R}$$

und zeigen, daß dies ein Maß über $\mathfrak{R}$ ist.

Beweis. a) $\mu(\emptyset) = \sum_{j \in J} \mu_j(\emptyset) = 0$.

b) Es sei $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und $M_\nu \cap M_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$, dann gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\Big) = \sum_{j \in J} \mu_j\Big(M_j \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\Big) = \sum_{j \in J} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(M_j \cap M_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \in J} \mu_j(M_j \cap M_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu).$$

Die Vertauschung der Summen ist erlaubt, da alle Summanden positiv sind.

Wir benötigen noch folgendes Lemma.

Lemma 9. Ist $\sup\{E_j : j \in J\} = I$ mit $E_j \in \mathfrak{M}$, $E_j \neq 0$ und ist $M_j \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_j) = E_j$, dann ist $M \in \mathfrak{R}$ gleichwertig mit $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ für alle $j \in J$ und $M \in \mathfrak{n}$ gleichwertig mit $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$ für alle $j \in J$.

Beweis. a) Aus $M \in \mathfrak{R}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ und aus $M \in \mathfrak{n}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$.

b) Es sei $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ für alle $j \in J$.

α) $\cup \{M_j : j \in J\} = M'$ ist offen und $\overline{M'} = X_{\mathfrak{M}}$ nach (7). Also ist $X_{\mathfrak{M}} - M' \in \mathfrak{n}$ und daher auch jede Teilmenge von $X_{\mathfrak{M}} - M' \in \mathfrak{R}$. Es genügt also $M \cap M' \in \mathfrak{R}$ zu zeigen.

β) Nach Lemma 5 gibt es zu jedem $M \cap M_j$ genau ein $M^j \in \mathfrak{R}_0$ mit $N_j = (M^j - M \cap M_j) \cup (M \cap M_j - M^j) \in \mathfrak{n}$. Wegen $M^j < M_j$ ist auch $N_j < M_j$. $\cup \{M^j : j \in J\} \in \mathfrak{R}$, da diese Menge offen ist. Wegen $\big(\cup \{M^j : j \in J\} - M \cap M'\big) \cup$

$(M \cap M' - \bigcup\{M^j : j \in J\}) \subset \bigcup\{N_j : j \in J\}$ genügt es nun zu zeigen, daß $\bigcup\{N_j : j \in J\} \in \mathfrak{n}$ gilt. Ist $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$, dann ist $M^j = \emptyset$, also $N_j = M \cap M_j$. Wegen $M \subset (X_{\mathfrak{M}} - M') \cup \bigcup\{N_j : j \in J\}$ gehört mit $\bigcup\{N_j : j \in J\}$ auch M zu $\mathfrak{n}$.

γ) Wegen $N_j \in \mathfrak{n}$ und $N_j \subset M_j$ gibt es abzählbar viele, nirgends-dichte Mengen $N_{j,\nu}$ mit $N_j = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_{j,\nu}$ und $N_{j,\nu} \subset M_j$. Wenn wir noch zeigen, daß auch $N_\nu = \bigcup\{N_{j,\nu} : j \in J\}$ nirgends-dicht ist, dann ist $\bigcup\{N_j : j \in J\} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu \in \mathfrak{n}$. Wir nehmen nun an, daß N_ν nicht nirgends-dicht sei, dann gibt es eine nicht leeres und offenes M_0 mit $M_0 \subset \overline{N}_\nu$. Da $\overline{M}' = X_{\mathfrak{M}}$ ist, gibt es ein M_{j_0} mit $M_{j_0} \cap M_0 \neq \emptyset$. Wir können daher $M_0 \subset M_{j_0}$ annehmen. $N'_\nu = \bigcup\{N_{j,\nu} : j \in J \text{ und } j \neq j_0\}$ ist fremd zu M_{j_0}, und da M_{j_0} offen ist, ist auch $\overline{N}'_\nu \cap M_{j_0} = \emptyset$. Es gilt daher $M_0 = M_0 \cap \overline{N}_\nu = M_0 \cap (\overline{N}'_\nu \cup \overline{N}_{j_0,\nu}) = M_0 \cap \overline{N}_{j_0,\nu}$. Da $N_{j,\nu}$ nirgends-dicht ist, ist M_0 nirgends-dicht. Andererseits ist M_0 offen, also ist $M_0 = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch.

Aus dem Lemma folgt noch:

(17) $\mu(M) = 0$ ist gleichwertig mit $M \in \mathfrak{n}$.

Beweis. a) Aus $M \in \mathfrak{n}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$. Nach Satz 1 dann $E(M \cap M_j) = 0$, also auch $\mu_j(M \cap M_j) = 0$ und damit $\mu(M) = 0$.

b) Aus $\mu(M) = 0$ folgt $\mu_j(M \cap M_j) = 0$ für alle $j \in J$. Nach Lemma 1 ist dann auch $E(M \cap M_j) = 0$. Nach Satz 1 ist $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$ für alle $j \in J$, also $M \in \mathfrak{n}$; w. z. b. w.

Zur Konstruktion des direkten Integrals $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ benötigen wir eine Reihe von Sätzen aus [5], § 60—64. Ab § 60 findet in [5] (in unserer Terminologie gesprochen) die Tatsache Verwendung, daß die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ Wertebereich eines Spektralmaßes ist. In Satz 1 wurde gezeigt, daß wir dies jederzeit annehmen können. Es gelten deshalb die Sätze von § 60—64 auch für unseren Fall. Wir wollen hier noch die zum Verständnis der Sätze aus diesen Paragraphen notwendigen Definitionen (in unserer Terminologie) angeben. Eine Projektion $R \in \mathfrak{P} = \mathfrak{M}'^P$ heißt eine *Reihe*, wenn für alle $P \in \mathfrak{P}$ mit $P \leq R$ gilt $P = C(R)\,P$. Ist $E \in \mathfrak{M}$, dann heißt ein System $\{R_j : j \in J\}$ von von Null verschiedenen, paarweise orthogonalen Reihen ein *Orthogonalsystem* vom Typ E, wenn $C(R_j) = E$ für alle $j \in J$ gilt. Wegen [5], S. 99, Theorem 1 kann man nun die *Vielfachheit* $u(E)$ für ein $E \in \mathfrak{M}$ als die Mächtigkeit eines maximalen, orthogonalen Systems vom Typ E definieren. Wir sagen $E \in \mathfrak{M}$ besitzt *gleichmäßige Vielfachheit*, wenn $u(E_0) = u(E)$ für alle $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $E_0 \neq 0$ und $E_0 \leq E$ gilt.

Wir kommen nun zur Konstruktion des direkten Integrals. Nach [5], S. 102, Theorem 5 gilt: Wenn $E_u \in \mathfrak{M}$ für jede Kardinalzahl $1 \leq u \leq \dim \mathfrak{H}$ das Supremum aller Projektionen aus $\mathfrak{M}$ mit der gleichmäßigen Vielfachheit u ist, dann ist $\{E_u : u \leq \dim \mathfrak{H}\}$ ein orthogonales System, $\sup\{E_u : u \leq \dim \mathfrak{H}\} = I$ und $E_u = 0$[7]) oder E_u von der gleichmäßigen Vielfachheit u. Es sei $M_u \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_u) = E_u$. K' sei eine Menge der Mächtigkeit $\sup\{u : E_u \neq 0\}$. Wir

[7]) Wir setzen $\sup\{E : E \in \emptyset\} = 0$.

ordnen jedem u mit $E_u \neq 0$ eine Teilmenge $K_u \subset K'$ von der Mächtigkeit u so zu, daß aus $u < u'$ folgt $K_u \subset K_{u'}$. Für $x \in M_u$ setzen wir $K_x = K_u$. Damit haben wir jedem Punkt $x \in M_0 = \cup\{M_u : E_u \neq 0\}$ eine Menge K_x zugeordnet. Nach (7) ist $\overline{M}_0 = X_{\mathfrak{M}}$. Es sei $k \in K'$. Wir betrachten die Funktionen f_k mit $f_k(x) = 1$ für $k \in K_x$ und $= 0$ für $k \notin K_x$. Es ist dann f_k zunächst auf M_0 erklärt und $f_k(x) = 1$ für $x \in M_u$ mit $k \in K_u$ und sonst $f_k(x) = 0$. Diese Funktionen sind stetig auf M_0. Nach Lemma 4 kann man f_k auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig fortsetzen und wegen $\overline{M}_0 = X_{\mathfrak{M}}$ ist dies nur auf eine Weise möglich. Diese Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit f_k. Wir setzen nun

$$K_x = \{k : f_k(x) = 1\}. \tag{18}$$

Auf M_0 liefert dies offensichtlich die alten Mengen K_x.

Es sei $K = \cup\{K_x : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ und $\mathfrak{H}'$ ein Hilbert-Raum mit der orthonormierten Basis $\{e_k : k \in K\}$. Wir ordnen jedem $x \in X_{\mathfrak{M}}$ den von $\{e_k : k \in K_x\}$ aufgespannten Teilraum $\mathfrak{H}_x$ von $\mathfrak{H}'$ zu. Diese Zuordnung erfüllt (10). Zuvor zeigen wir noch, daß $\mathfrak{H}_x \neq \{0\}$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist. Das ist gleichwertig mit $K_x \neq \emptyset$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Für $u_0 = \inf\{u : E_u \neq 0\}$ gilt $E_{u_0} \neq 0$, da Mengen von Kardinalzahlen der Größe nach wohlgeordnet sind. Für $k_0 \in K_{u_0}$ gilt $f_{k_0}(x) = 1$ für alle $x \in M_0$, also auch für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist daher $k_0 \in K_x$, also $K_x \neq \emptyset$.

Zu (10) 1. Wegen $K = \cup\{K_x : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ ist (10) 1. erfüllt.

Zu (10) 2. Wir müssen zeigen: Wenn es ein K mit $k \in K_{x_0}$ und $k \notin K_{y_0}$ gibt, dann ist $K_{x_0} \supset K_{y_0}$. Für $x_0, y_0 \in M_0$ ist dies wegen unserer Wahl der K_u richtig. Es seien nun $x_0, y_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ beliebig, dann ist nach (18) $f_k(x) = 1$ in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und $= 0$ in einer Umgebung $U(y_0)$ von y_0. Für $x \in U(x_0) \cap M_0$ und $y \in U(y_0) \cap M_0$ gilt es also stets $K_x \supset K_y$. Es sei nun $k_0 \in K_{y_0}$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von f_{k_0} ein $y_1 \in U(y_0) \cap M_0$ mit $k_0 \in K_{y_1}$. Es ist aber $K_x \supset K_{y_1}$ für alle $x \in U(x_0) \cap M_0$ und damit $f_{k_0}(x) = 1$ in $U(x_0)$. Also ist $k_0 \in K_{x_0}$.

Zu (10) 3. $\{x : k \in K_x\} = \{x : f_k(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$, da f_k stetig ist und nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Da (10) erfüllt ist, können wir mit Hilfe von (11), (12) und (13) das direkte Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ erklären. Dieses direkte Integral ist eine Lösung unseres Umkehrproblems. Dazu haben wir zu zeigen, daß es eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ gibt, die das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ in das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$ im Sinne von (14) überführt.

$\{E_j : j \in J\}$ sei die separable Basis von I in $\mathfrak{M}$, die wir bereits zur Konstruktion von $\mu/\mathfrak{R}$ verwendet haben. Wir setzen $E_{j,u} = E_j E_u$ und $M_{j,u} = M_u \cap M_j$; dann ist $E(M_{j,u}) = E_{j,u}$ und $M_{j,u} \in \mathfrak{R}_0$. Ferner ist $\sup\{E_{j,u} : j \in J, u \leq \dim \mathfrak{H}\} = I$. Wir betrachten im folgenden nur mehr $E_{j,u}$ mit $E_{j,u} \neq 0$. Diese $E_{j,u}$ sind separabel, da $E_{j,u} \leq E_j$, und von gleichmäßiger Vielfachheit u, da $E_{j,u} \leq E_u$. Nach [5], S. 101, Theorem 4 gibt es also ein Orthogonalsystem $\{R^i_{j,u} : i \in I_u\}$ vom Typ $E_{j,u}$ und der Mächtigkeit u (I_u hat also die Mächtigkeit u), so daß $\sup\{R^i_{j,u} : i \in I_u\} = E_{j,u}$ ist. Zu jedem $i \in I_u$ gibt es ein $x^i_{j,u} \in \mathfrak{H}$ mit $Z(x^i_{j,u}) = R^i_{j,u}$ [zu $Z(x)$ s. S. 157]. In der Tat: Nach [5], S. 93, Theorem 3

gibt es ein $x^i_{j,u}$ im Wertebereich von $R^i_{j,u}$ mit $C(x^i_{j,u}) = E_{j,u}$ und nach [5], S. 92, Theorem 4 ist $Z(x^i_{j,u}) \leq R^i_{j,u}$. Da $R^i_{j,u}$ eine Reihe ist, gilt $Z(x^i_{j,u}) = C\left(Z(x^i_{j,u})\right) R^i_{j,u} = C(x^i_{j,u}) R^i_{j,u} = E_{j,u} R^i_{j,u} = R^i_{j,u}$.

Wir setzen $\mu^i_{j,u}(M) = \left(E(M)\, x^i_{j,u},\, x^i_{j,u}\right)$ für $M \in \mathfrak{N}_{j,u} = \{M : M \in \mathfrak{N}$ und $M \subset M_{j,u}\}$. Nach Lemma 1 ist $\mu^i_{j,u}$ ein endliches Maß über $\mathfrak{N}_{j,u}$ mit den Nullmengen $\mathfrak{N}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$. $\mathfrak{L}^i_{j,u}$ sei der Hilbert-Raum der über $M_{j,u}$ quadratisch $\mu^i_{j,u}$-integrierbaren Funktionen. Nach [5], S. 95, Theorem 1 gibt es eine unitäre Abbildung $\overline{U}^i_{j,u}$ von $\mathfrak{L}^i_{j,u}$ auf $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$, so daß

$$(\overline{U}^i_{j,u})^{-1} E(M) \overline{U}^i_{j,u} f = \chi_M f \text{ für alle } M \in \mathfrak{N}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{L}^i_{j,u}. \tag{19}$$

Die Verengung von $\mu/\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}_{j,u}$ ist ebenfalls ein endliches Maß mit den Nullmengen $\mathfrak{N}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$ [nach (17)]. Da beide Maße über $\mathfrak{N}_{j,u}$ die gleichen Nullmengen besitzen, können wir den Satz von RADON-NIKODYM anwenden und erhalten aus (19): Es gibt eine unitäre Abbildung $U^i_{j,u}$ des Hilbert-Raumes $\mathfrak{L}_{j,u}$ der über $M_{j,u}$ quadratisch μ-integrierbaren Funktionen auf $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$ mit

$$(U^i_{j,u})^{-1} E(M)\, U^i_{j,u} f = \chi_M f \text{ für } M \in \mathfrak{N}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{L}_{j,u}. \tag{19}$$

Mit $\mathfrak{S}_{j,u}$ bezeichnen wir den Teilraum von $\mathfrak{S}$, der aus allen Vektorfeldern f mit $f(x) = 0$ für $x \notin M_{j,u}$ besteht. $\mathfrak{S}_{j,u}$ ist unitär-isomorph zur u-fachen direkten Summe von $\mathfrak{L}_{j,u}$, da für jedes $k \in K_x = K_u$ $(x \in M_{j,u})$ der Teilraum aller $f(x) \in \mathfrak{S}_{j,u}$ mit $f(x) = f_k(x)\, e_k$ durch $f(x) \leftrightarrow f_k(x)$ unitär auf $\mathfrak{L}_{j,u}$ abgebildet wird und K_u die Mächtigkeit u hat. Wegen $\sup\{Z(x^i_{j,u}) : i \in I_u\} = \sup\{R^i_{j,u} : i \in I_u\} = E_{j,u}$ und $Z(x^i_{j,u})\, Z(x^{i'}_{j,u}) = R^i_{j,u} R^{i'}_{j,u} = 0$ ist $E_{j,u}\,\mathfrak{H}$ die direkte Summe der $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$ für $i \in I_u$. Setzt man nun die unitären Abbildungen $U^i_{j,u}$, $i \in I_u$, zusammen, so erhält man: Es gibt eine unitäre Abbildung $U_{j,u}$ von $\mathfrak{S}_{j,u}$ auf $E_{j,u}\,\mathfrak{H}$, so daß

$$U^{-1}_{j,u} E(M)\, U_{j,u} f = \chi_M f \text{ für } M \in \mathfrak{N}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{S}_{j,u}. \tag{19''}$$

Wegen $\sup\{E_{j,u} : j \in J,\ u \leq \dim \mathfrak{H}\} = I$ ist $\mathfrak{H}$ direkte Summe der $E_{j,u}\,\mathfrak{H}$ mit $E_{j,u} \neq 0$. Da andererseits $X_{\mathfrak{M}} - \bigcup\{M_{j,u} : j \in J,\ u \leq \dim \mathfrak{H}\} \in \mathfrak{n}$ [nach (7)] eine Nullmenge ist, ist $\mathfrak{S}$ direkte Summe der $\mathfrak{S}_{j,u}$. Wir können nun die unitären Abbildungen $U_{j,u}$ zu einer unitären Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ zusammensetzen. Wir haben noch zu zeigen, daß

$$U^{-1} E(M)\, U f = \chi_M f = E'(M) f \text{ für alle } M \in \mathfrak{N} \text{ und alle } f \in \mathfrak{S}. \tag{20}$$

Beweis. Die Gl. (20) ist im Sinne des Hilbert-Raumes $\mathfrak{S}$ zu verstehen und nicht punktweise. Da $0 < \mu(M_{j,u}) < +\infty$ für alle $E_{j,u} \neq 0$, so nimmt ein $f \in \mathfrak{S}$ wegen (12) 3. nach Vernachlässigung einer geeigneten μ-Nullmenge höchstens auf abzählbar vielen $M_{j,u}$ von Null verschiedene Werte an (beachte Lemma 9). M_{j_ν,u_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ seien diese Mengen. Da U alle $\mathfrak{S}_{j,u}$ auf $E(M_{j,u})\,\mathfrak{H}$ abbildet, steht Uf senkrecht auf allen $E(M_{j,u})\,\mathfrak{H}$ mit $M_{j,u} \neq M_{j_\nu,u_\nu}$. Es gilt daher für $M \in \mathfrak{N}$: $U^{-1}E(M)\,Uf = U^{-1}E(M)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_{j_\nu,u_\nu})\right) Uf = U^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M) E(M_{j_\nu,u_\nu})\, Uf = \sum_{\nu=1}^{\infty} U^{-1}_{j_\nu,u_\nu} E(M \cap M_{j_\nu,u_\nu})\, U_{j_\nu,u_\nu} \chi_{M_{j_\nu,u_\nu}} f$ (nach der Definition von U) $= \chi_M \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{M_{j_\nu,u_\nu}} f = \chi_M f$ (wegen der Wahl der M_{j_ν,u_ν}), w.z.b.w.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$ und $E/\mathfrak{R}$ das Spektralmaß von Satz 1, dann gibt es ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und eine unitäre Abbildung U von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ durch U in $E/\mathfrak{R}$ übergeführt wird, d.h.* (20) *erfüllt ist.*

Damit haben wir das zu Beginn dieses Abschnittes gesteckte Ziel erreicht und eine Lösung des Umkehrproblems gefunden.

7. Zerlegung linearer Transformationen

Wir sind ausgegangen von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$. Die Lösung des Umkehrproblems erlaubt es uns $\mathfrak{H}$ als direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ zu betrachten und $\mathfrak{M}$ als Wertebereich des zugehörigen Spektralmaßes. Für die Transformation aus $\mathfrak{M}$ ist damit eine übersichtliche Darstellung gewonnen. Man kann aber noch für eine weitere Klasse von Transformationen übersichtliche Darstellungen gewinnen.

Es sei im folgenden $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ das im vorigen Abschnitt konstruierte direkte Integral und $E/\mathfrak{R}$ das zugehörige Spektralmaß, dessen Wertebereich eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist. Die $\mathfrak{H}_x$ sind Teilräume eines Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}'$. Eine Funktion $\boldsymbol{A}$ über $X_{\mathfrak{M}}$, deren Werte beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{H}'$ sind, heißt ein zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ *gehöriges Feld von Transformationen*, wenn gilt:

(21)
$$\begin{cases} 1.\ \boldsymbol{A}(x) \text{ läßt } \mathfrak{H}_x \text{ invariant und } \boldsymbol{A}(x)h = 0 \text{ für } h \perp \mathfrak{H}_x,\ x \in X_{\mathfrak{M}}. \\ 2.\ \text{Aus } f \in \mathfrak{S} \text{ folgt } g \in \mathfrak{S}, \text{ wobei } g(x) = \boldsymbol{A}(x) f(x) \text{ ist.} \end{cases}$$

Eine Transformation A in $\mathfrak{S}$ heißt *zerlegbar* in $\mathfrak{S}$, wenn es ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen $\boldsymbol{A}$ gibt mit

(22) $$(Af)(x) = \boldsymbol{A}(x) f(x) \ \mu\text{-fast überall für alle } f \in \mathfrak{S}.$$

Wir schreiben dafür $A \sim \boldsymbol{A}(x)$.

Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$, dann ist $\lambda A \sim \lambda \boldsymbol{A}(x)$, $A + B \sim \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x)$ und $AB \sim \boldsymbol{A}(x)\, \boldsymbol{B}(x)$. Es gilt ferner:

(23) $$\text{Aus } A \sim \boldsymbol{A}(x) \text{ folgt } A \in \mathfrak{M}'.$$

Beweis. $(A \chi_M f)(x) = \boldsymbol{A}(x)\, \chi_M(x) f(x) = \chi_M(x)\, \boldsymbol{A}(x) f(x) = (\chi_M A f)(x)$ für alle $f \in \mathfrak{S}$. Also ist $AE = EA$ für alle $E \in \mathfrak{M}$, d.h. $A \in \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

Lemma 10. Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$, dann ist $a_{i,k}(x) = (\boldsymbol{A}(x) e_k, e_i)$ $\mathfrak{R}$-meßbar für $i, k \in K$.

Beweis. Wir setzen $f^k_{j,u}(x) = e_k$ für $x \in M_{j,u}$ und sonst $= 0$ (zu $M_{j,u}$ siehe Ende des letzten Abschnittes). Wegen $f^k_{j,u} \in \mathfrak{S}$ gilt $\boldsymbol{A}(x) f^k_{j,u}(x) \in \mathfrak{S}$, also ist $a_{i,k}(x)$ auf $M_{j,u}$ $\mathfrak{R}$-meßbar für $k, i \in K_u$. Für $k \notin K_u$ oder $i \notin K_u$ ist $a_{i,k}(x) = 0$ auf $M_{j,u}$, also ebenfalls $\mathfrak{R}$-meßbar. Aus Lemma 9 folgt dann die Behauptung.

Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$, so folgt aus $A = B$ im allgemeinen nicht $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ oder auch nur für μ-fast alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Es gilt vielmehr nur:

Lemma 11. Es sei $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$; dann ist $A = B$ gleichwertig mit $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ μ-fast überall für alle $i, k \in K$.

Beweis. a) $A = B$: Dann ist $Af^k_{j,u} = Bf^k_{j,u}$ (vgl. Beweis von Lemma 10), also $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ μ-fast überall auf $M_{j,u}$ und daher nach Lemma 9 auch μ-fast überall auf $X_{\mathfrak{M}}$.

b) Ist $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ μ-fast überall, dann ist $A(\chi_M f^k_{j,u}) = B(\chi_M f^k_{j,u})$ für $M \in \mathfrak{R}$. Da die lineare Hülle der $\chi_M f^k_{j,u}$ dicht in $\mathfrak{S}$ liegt und A und B beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{S}$ sind, ist $Af = Bf$ für alle $f \in \mathfrak{S}$, w. z. b. w.

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu retten, führen wir die stetigen Zerlegungen ein. Wir nennen ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen $\boldsymbol{A}$ *stetig*, wenn $(\boldsymbol{A}(x)f, g)$ eine stetige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$ ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$. Eine Zerlegung einer Transformation $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ nennen wir *stetig*, wenn $\boldsymbol{A}$ ein stetiges Feld von Transformationen ist; wir schreiben bei stetigen Zerlegungen $A \approx \boldsymbol{A}(x)$. Es gilt für $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$:

(24) $A = B$ ist gleichwertig mit $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. a) Aus $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ folgt offensichtlich $A = B$.

b) Aus $A = B$ folgt nach Lemma 11 $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ μ-fast überall. Aus der Stetigkeit folgt, daß diese Gleichung für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ gilt (Lemma 7). Dann ist aber auch $\boldsymbol{A}(x)e_k = \boldsymbol{B}(x)e_k$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ und alle $k \in K$ und damit auch $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$, w. z. b. w.

Im folgenden sollen stetige Zerlegungen genauer betrachtet werden. Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, so ist

(25) $$\sup\{\|\boldsymbol{A}(x)\| : x \in X\} = \|A\|\ ^{8}).$$

Beweis. Wir setzen $a_{i,k}(x) = (\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i)$. $a_{i,k}(x)$ ist stetig auf $X_{\mathfrak{M}}$. Ferner ist

(26) $$\|\boldsymbol{A}(x)\|^2 = \sup\left\{\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x)\, y_\nu\right|^2 : \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1;\ n, m = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Wir setzen vorübergehend $\sup\{\|\boldsymbol{A}(x)\| : x \in X_{\mathfrak{M}}\} = C$ und zeigen $\|A\| = C$.

a) $|Af|^2 = \int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu \leq C^2 \int |f(x)|^2 d\mu = C^2|f|^2$, also ist $\|A\| \leq C$.

b) Angenommen es wäre $C > \|A\|$, dann gibt es m, n und ein x_0 mit $\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x_0)\, y_\nu\right|^2 > \|A\|^2$. Aus der Stetigkeit der $a_{i,k}$ folgt, daß dies sogar für alle x einer geeigneten Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gilt. Wir können annehmen, daß $U(x_0)$ ganz in einem M_{j_0,u_0} liegt und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ ist. Ferner können wir annehmen, daß $k_\nu \in K_{u_0}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ ist, denn für $k \notin K_{u_0}$ ist $a_{i,k}(x) = 0$ in M_{j_0,u_0}. Wir setzen $f = \chi_{U(x_0)} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_{k_\nu}$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1$, dann ist $f \in \mathfrak{S}$ und $\|A\|^2|f|^2 \geq |Af|^2 = \int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu = \int_{U(x_0)} \sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x)\, y_\nu\right|^2 d\mu > \|A\|^2 \int_{U(x_0)} d\mu = \|A\|^2|f|^2$ (Widerspruch).

---

[8]) $\|A\| = \sup\{|Af| : |f| = 1\}$.

Lemma 12. Ist A eine Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$, deren Werte beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{H}'$ sind, so gibt es eine beschränkte, lineare Transformation A in $\mathfrak{S}$ mit $A \approx A(x)$ dann und nur dann, wenn

(27)
1. $A(x)$ den Teilraum $\mathfrak{H}_x$ invariant läßt und $A(x)h = 0$ für alle $h \perp \mathfrak{H}_x$ gilt,
2. $A(x)$ schwach stetig in $X_{\mathfrak{M}}$ ist, d.h. $(A(x)f, g)$ stetig für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$ ist, und
3. $\|A(x)\|$ beschränkt ist in $X_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Nur dann: Aus $A \approx A(x)$ folgt (27) 1. und 2. direkt aus der Definition und 3. aus (25).

Dann: a) $A(x)$ erfülle nun (27). Zunächst haben wir zu zeigen, daß $A(x)$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen ist. (21) 1. und (27) 1. sind identisch. Wir haben noch (21) 2. zu bestätigen. Wir setzen $g(x) = A(x)f(x)$ und zeigen: Aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt $g \in \mathfrak{S}$. Wegen (27) 1. ist $g(x) \in \mathfrak{H}_x$. Ferner ist, wegen $f \in \mathfrak{S}$, $(f(x), e_k) = 0$ bis auf abzählbar viele Ausnahmen $k_1, k_2, \ldots$, wenn wir auf einer geeigneten μ-Nullmenge $f(x)$ durch 0 ersetzen. Dann ist $(A(x)f(x), e_i) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,k_\nu}(x)\,(f(x), e_k)$ $\mathfrak{R}$-meßbar, da die $a_{i,k}$ und die $(f(x), e_k)$ es sind, d.h. (12) 1. ist erfüllt. Aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt noch, daß nach Abänderung auf einer geeigneten μ-Nullmenge f nur auf höchstens abzählbar vielen $M_{j,u}$ von Null verschiedene Werte annimmt. Auf $M_{j,u}$ sind aber bei festem k nur abzählbar viele $a_{i,k}$ nicht identisch Null (Beweis unter c). Dann ist aber $(A(x)f(x), e_i) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,k_\nu}(x)\,(f(x), e_{k_\nu})$ nur für abzählbar viele $i \in K$ nicht identisch Null. g erfüllt damit auch (12) 2. (12) 3. folgt aus (27) 3., denn $\int |A(x)f(x)|^2 d\mu \leq (\sup\{\|A(x)\| : x \in X_{\mathfrak{M}}\})^2 \int |f|^2 d\mu < +\infty$. Also ist $g \in \mathfrak{S}$ und $A(x)$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen.

b) Wegen (27) 2. ist $A(x)$ ein stetiges Feld von Transformationen. Wir definieren nun eine lineare Transformation A in $\mathfrak{S}$ durch $(Af)(x) = A(x)f(x)$ für alle $f \in \mathfrak{S}$. Wegen $|Af|^2 = \int |A(x)f(x)|^2 d\mu \leq (\sup\{\|A(x)\| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}|f|)^2$ ist A beschränkt. Also ist $A \approx A(x)$.

c) Wir haben noch die Behauptung über die $a_{i,k}$ zu beweisen. Es ist $(A(x) f^k_{j,u}(x), e_i) = a_{i,k}(x)$ auf $M_{j,u}$ (zur Bezeichnung s. Beweis von Lemma 10). Es sei $K'_k = \{i : i \in K \text{ und } a_{i,k} \neq 0 \text{ auf } M_{j,u}\}$. Wegen der Stetigkeit der $a_{i,k}$ ist $i \in K'_k$ gleichwertig mit $\int_{M_{j,u}} |a_{i,k}(x)|^2 d\mu > 0$. Es ist nun $\sum_{i \in K} \int_{M_{j,u}} |a_{i,k}(x)|^2 d\mu \leq \sum_{i \in K} \int_{M_{j,u}} |(A(x)\, f^k_{j,u}(x), e_i)|^2 d\mu \leq \sup\{\|A(x)\|^2 : x \in X_{\mathfrak{M}}\} \sum_{i \in K} \int |(f^k_{j,u}(x), e_i)|^2 d\mu =$ $\sup\{\|A(x)\|^2 : x \in X_{\mathfrak{M}}\} \int |f^k_{j,u}(x)|^2 d\mu < +\infty$, da $f^k_{j,u} \in \mathfrak{S}$. Also können bei festem k auf $M_{j,u}$ höchstens abzählbar viele $a_{i,k} \neq 0$ sein. Damit ist Lemma 12 vollständig bewiesen.

Nach Lemma 12 gibt es eine ein-eindeutige Abbildung von der Menge $\mathfrak{R}$ der stetig zerlegbaren Transformationen in $\mathfrak{S}$ auf die Menge $\tilde{\mathfrak{R}}$ der Felder

von Transformationen, die (27) erfüllen. Diese Abbildung hat noch folgende Eigenschaften: Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$, dann ist auch

$$(28) \qquad A + B \approx \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x), \quad \lambda A \approx \lambda \boldsymbol{A}(x) \text{ und } A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x).$$

(Es gilt im allgemeinen nicht $AB \approx \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$, sondern nur $AB \sim \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$.)

Beweis. Wir haben nur noch $A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x)$ zu zeigen. Die anderen Behauptungen sind offensichtlich richtig. Da $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt, erfüllt auch $\boldsymbol{A}^*(x)$ (27). Es gibt also ein $\bar{A}$ mit $\bar{A} \approx \boldsymbol{A}^*(x)$. Weiter gilt für $f, g \in \mathfrak{S}$ $(Af, g) = \int (\boldsymbol{A}(x) f(x), g(x))\, d\mu = \int (f(x), \boldsymbol{A}^*(x) g(x))\, d\mu = (f, \bar{A}g)$, also ist $\bar{A} = A^*$, w. z. b. w.

Es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}'$. $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}'$ folgt aus (23). Wir haben noch $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{M}'$ zu zeigen. Zunächst gilt:

$$(29) \qquad K_k = \{x : e_k \in \mathfrak{H}_x\} = \{x : k \in K_x\} = \{x : f_k(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0.$$

[Vgl. S. 167, zu (10) 3.]

Es sei nun $A \in \mathfrak{M}'$. Die Funktion $\varrho(M) = (\chi_M A f^k_{j,u}, f^i_{j,u}) = (A \chi_M f^k_{j,u}, f^i_{j,u})$ ist eine endliche total-additive Funktion auf $\mathfrak{R}_{j,u} = \{M : M \in \mathfrak{R} \text{ und } M \subset M_{j,u}\}$ und $\varrho(M) = 0$ für $M \in \mathfrak{R}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$. Nach dem Satz von RADON-NIKODYM gibt es eine $\mathfrak{R}$-meßbare Funktion $a_{i,k}$ auf $M_{j,u}$ so, daß

$$(30) \qquad \int_M a_{i,k}(x)\, d\mu = \int_M \left((A f^k_{j,u})(x), f^i_{j,u}(x)\right) d\mu \quad \text{für alle } M \in \mathfrak{R}_{j,u}.$$

Wir können $a_{i,k} \equiv 0$ auf $M_{j,u}$ annehmen, wenn entweder $i \notin K_u = K_x$ oder $k \notin K_u$ ist. Nach Lemma 7 und 4 können wir $a_{i,k}$ auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig annehmen. Wegen (29) bleibt $a_{i,k} \equiv 0$ für $i \notin K_x$ oder $k \notin K_x$. Es ist $\sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu, k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 \leq \|A\|^2$ für $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1$ und alle $\{k_1, \ldots, k_n\}$, $\{i_1, \ldots, i_m\}$ und $m, n = 1, 2, \ldots$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gäbe es wegen der Stetigkeit der $a_{i,k}$ ein $U(x_0)$, wie im Beweisteil b) von (26), mit $\sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu, k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 > \|A\|^2$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder $U(x_0) \subset M_{j,u}$, $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ und $k_\nu \in K_u$ annehmen. Wir setzen dann $f = \chi_{U(x_0)} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_{k_\nu}$. Aus (30) folgt $\left((A f^k_{j,u})(x), e_i\right) = a_{i,k}(x)$ μ-fast überall in $M_{j,u}$.

$$|Af|^2 = \int |(Af)(x)|^2\, d\mu \geq \int \sum_{\mu=1}^{m} |((Af)(x), e_{i_\mu})|^2\, d\mu$$

$$= \int \sum_{\mu=1}^{m} \left| \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu (A \chi_{U(x_0)} f^{k_\nu}_{j,u})(x), e_i \right) \right|^2 d\mu = \int \sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{U(x_0)}(x)\, y_\nu a_{i_\mu, k_\nu}(x) \right|^2 d\mu$$

$$= \int_{U(x_0)} \sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu a_{i_\mu, k_\nu}(x) \right|^2 d\mu > \|A\|^2 \cdot \int_{U(x_0)} d\mu = \|A\|^2 |f|^2 \quad \text{(Widerspruch)}$$

Es ist also

$$(31) \qquad \sup \left\{ \sum_{i \in K} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i,k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 \right\} \leq \|A\|^2 \quad \text{für alle } x \in X_{\mathfrak{M}}.$$

Es gibt daher zu jedem $x \in X_{\mathfrak{M}}$ eine beschränkte, lineare Transformation $\boldsymbol{A}(x)$ in $\mathfrak{H}'$ mit

$$(\boldsymbol{A}(x)\, e_k, e_i) = a_{i,k}(x).$$

Jetzt zeigen wir, daß $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt: (27) 1. folgt aus $a_{i,k}(x) = 0$ für $i \notin K_x$ oder $k \notin K_x$. (27) 3. folgt aus (31). Es ist $(\boldsymbol{A}(x) f, g)$ für $f, g \in \mathfrak{H}'$ stetig. Zunächst gilt dies für $f = e_k$ und $g = e_i$, $i, k \in K$, also auch für endliche Linearkombinationen der e_k. Wegen (31) ist $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq \|A\|$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Es seien $\{f_\nu\}$ und $\{g_\nu\}$ Folgen von Linearkombinationen der e_k mit $f = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu$ und $g = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu$. Wegen $|(\boldsymbol{A}(x) f_\nu, g_\nu) - (\boldsymbol{A}(x) f, g)| \leq \|A\| \|f_\nu - f\| g_\nu| + \|A\| |f| |g - g_\nu|$ konvergiert $(\boldsymbol{A}(x) f_\nu, g_\nu)$ gleichmäßig gegen $(A(x) f, g)$, also ist $(A(x) f, g)$ stetig. (27) ist also erfüllt.

Es gibt nach Lemma 12 eine Transformation $\bar{A}$ in $\mathfrak{S}$ mit $\bar{A} \approx \boldsymbol{A}(x)$. Im folgenden sei $M \in \mathfrak{R}_{j,u}$ und $M' \in \mathfrak{R}_{j',u'}$. Da $A \in \mathfrak{M}'$ ist, gilt: $(A \chi_M f^k_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = \int_{M \cap M'} \left((A f^k_{j,u})(x), f^i_{j',u'}(x)\right) d\mu = 0$ für $(j,u) \neq (j',u')$, da $M \cap M' \subset M_{j,u} \cap M_{j',u'} = \emptyset$ ist, und $= \int_{M \cap M'} a_{i,k}(x)\, d\mu$ für $(j,u) = (j',u')$ nach (30). Es gilt aber auch $(\bar{A} \chi_M f^k_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = \int_{M \cap M'} (\boldsymbol{A}(x) f^k_{j,u}(x), f^i_{j',u'}(x))\, d\mu = 0$ für $(j,u) \neq (j',u')$ und $= \int_{M \cap M'} (\boldsymbol{A}(x) e_k, e_i)\, d\mu = \int_{M \cap M'} a_{i,k}(x)\, d\mu$ für $(j,u) = (j',u')$. Also gilt $(A \chi_M f_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = (\bar{A} \chi_M f^k_{j,u}, \chi_M f^i_{j',u'})$. Da die Linearkombinationen der $\chi_M f^k_{j,u}$ dicht in $\mathfrak{S}$ liegen, gilt $(A f, g) = (\bar{A} f, g)$ für alle $f, g \in \mathfrak{S}$ und damit ist $\bar{A} = A$ bewiesen. Also ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A \in \mathfrak{R}$. Es ist also $\mathfrak{R} > \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3. *Durch $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ wird eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge der Felder von Transformationen, die (27) erfüllen, definiert. Für diese Abbildung gilt:*

1. Aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ folgt $A + B \approx \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x)$ und $\lambda A \approx \lambda \boldsymbol{A}(x)$ und $A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x)$.

2. $\|A\| = \sup\{\|\boldsymbol{A}(x)\| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.

Mit $\boldsymbol{I}(x)$ bezeichnen wir die Projektion von $\mathfrak{H}'$ auf $\mathfrak{H}_x$. Es ist

$$I \approx \boldsymbol{I}(x). \tag{33}$$

Beweis. $I \sim \boldsymbol{I}(x)$ ist klar. Wir haben nur noch die schwache Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$ zu zeigen. Die Stetigkeit von $(\boldsymbol{I}(x) e_k, e_i)$ folgt aus (29). Man erhält dann wegen $\|\boldsymbol{I}(x)\| = 1$ genau wie beim letzten Beweis die Stetigkeit von $(\boldsymbol{I}(x) f, g)$ für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$.

Ist $A \in \mathfrak{M}'$ und $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A'(x)$ die Verengung von $\boldsymbol{A}(x)$ auf $\mathfrak{H}_x$, dann gilt für die Abbildung $A \to A'(x)$:

Korollar zu Satz 3. Für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist $A \to A'(x)$ eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge $\mathfrak{A}_x$ aller beschränkten, linearen Transformationen in $\mathfrak{H}_x$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{cases} 1.\ (A+B)'(x) = A'(x) + B'(x), \quad (\lambda A)'(x) = \lambda A'(x), \quad (A^*)'(x) \\ \qquad = (A'(x))^*. \\ 2.\ \|A'(x)\| \leq \|A\|. \end{cases} \tag{34}$$

Beweis. Wir haben nur noch zu zeigen, daß es sich um eine Abbildung auf $\mathfrak{A}_x$ handelt. Ist $A' \in \mathfrak{A}_{x_0}$ und A'' die Operation in $\mathfrak{H}'$, die auf $\mathfrak{H}_{x_0}$ mit A' übereinstimmt und auf $\mathfrak{H}'^{\perp}_{x_0}$ identisch Null ist, dann ist $\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{A}(x)$ ein Feld von Transformationen, das (27) erfüllt. (27) 1. und 3. sind offensichtlich erfüllt. $(\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)e_k, e_i) = (A''\boldsymbol{I}(x)e_k, \boldsymbol{I}(x)e_i) = \chi_{K_k}(x)\chi_{K_i}(x)(A''e_k, e_i)$. Dieser Ausdruck ist wegen (29) stetig. Man zeigt wieder wie oben, daß auch $(\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)f, g)$ stetig ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$. Da (27) erfüllt ist, gibt es ein A mit $A \approx \boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)$. Also ist $\boldsymbol{A}(x_0) = \boldsymbol{I}(x_0)A''\boldsymbol{I}(x_0) = A''$ und $A'(x_0) = A'$, w. z. b. w.

Zu diesem Abschnitt vergleiche man auch [3], S. 115 ff., insbesondere die Formeln (218) bis (220), dort stehen die Ergebnisse von Satz 3.1. Diese Ergebnisse werden in [3] auf einem anderen Weg abgeleitet.

8. Die Transformationen aus $\mathfrak{M}''$

α sei eine endliche, stetige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$. Dann erfüllt $\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ (27) und es gibt daher ein $A \in \mathfrak{M}'$ mit $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$.

Satz 4. *$A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ ist gleichwertig mit $A \in \mathfrak{M}''$. Die ein-eindeutige Abbildung $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x) \leftrightarrow \alpha$ von $\mathfrak{M}''$ auf die Menge S aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ hat folgende Eigenschaften:*

(35)
1. *Aus $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$ folgt $A + B \leftrightarrow \alpha + \beta$, $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$[9]), $AB \leftrightarrow \alpha\beta$, $\lambda A \leftrightarrow \lambda\alpha$.*
2. $\|A\| = \sup\{|\alpha(x)| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.

Beweis. a) $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x) \in \mathfrak{M}'$; dann ist $AB \sim \alpha(x)\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{B}(x)\alpha(x)\boldsymbol{I}(x) \sim BA$. Also ist $AB = BA$ und damit $A \in \mathfrak{M}''$.

b) $A \in \mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Es ist also $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{M}'$.

α) Es ist $(\boldsymbol{A}(x)e_i, e_k) = a_{i,k}(x) = 0$ für $i \neq k$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mit $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Wir können $U(x_0) \subset M_{j_0,u_0}$ und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ annehmen. Es ist $i_0, k_0 \in K_{u_0}$, da sonst $a_{i_0,k_0}(x_0) = 0$ wäre. Wir definieren $\boldsymbol{B}(x)$ für $x \notin U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x) = 0$ und für $x \in U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x)e_k = 0$ für $k \neq k_0$ und $\boldsymbol{B}(x)e_{k_0} = e_{k_0}$. $\boldsymbol{B}(x)$ erfüllt (27); es gibt also ein $B \in \mathfrak{M}'$ mit $B \approx \boldsymbol{B}(x)$. Es ist einerseits $((AB f^{k_0}_{j_0,u_0})(x), e_{i_0}) = ((A\chi_{U(x_0)} f^{k_0}_{j_0,u_0})(x), e_{i_0}) = \chi_{U(x_0)}(x)a_{i_0,k_0}(x)$ für μ-fast alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$, andererseits ist $((BA f^{k_0}_{j_0,k_0})(x), e_{i_0}) = (g(x)e_{k_0}, e_{i_0}) = 0$ μ-fast überall in $X_{\mathfrak{M}}$. Es ist daher $a_{i_0,k_0}(x) = 0$ für $x \in U(x_0)$ (Widerspruch).

β) $a_{i,i}(x) = a_{k,k}(x)$ für alle $i, k \in K_x$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,i_0}(x_0) \neq a_{k_0,k_0}(x_0)$ mit $i_0, k_0 \in K_{x_0}$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f_{k_0} und f_{i_0} [vgl. (18)] und von a_{i_0,i_0} und a_{k_0,k_0} eine ganze Umgebung $U(x_0)$ mit $a_{i_0,i_0}(x) \neq a_{k_0,k_0}(x)$ und $i_0, k_0 \in K_x$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder annehmen, daß $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ und $U(x_0) \subset M_{j_0,u_0}$ ist. Wir definieren B' durch $B'e_i = 0$ für $i \neq i_0$ und $i \neq k_0$ und $B'(e_{i_0} - e_{k_0}) = 0$ und $B'(e_{i_0} + e_{k_0}) = e_{i_0} + e_{k_0}$. Es sei $\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{I}(x)B'\boldsymbol{I}(x)$. Da $U(x_0) \subset M_{j_0,u_0}$ ist, ist $i_0, k_0 \in K_x = K_{u_0}$ für alle $x \in M_{j_0,u_0}$. Dann ist $\boldsymbol{B}(x) = B'$ auf M_{j_0,u_0}. Es gilt also einerseits $(AB(f^{k_0}_{j_0,u_0} + f^{i_0}_{j_0,u_0}))(x) =$

[9]) $\bar{\alpha}$ ist die Funktion $\bar{\alpha}(x) = \overline{\alpha(x)}$ = Konjugierte zu $\alpha(x)$.

$\left(A\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)$ μ-fast überall und andererseits $\left(BA\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\boldsymbol{B}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)=\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)\,\frac{1}{2}\left(a_{i_0,i_0}(x)+a_{k_0,k_0}(x)\right)(e_{k_0}+e_{i_0})$ μ-fast überall. Also ist $a_{i_0,i_0}(x)=a_{k_0,k_0}(x)$ in M_{j_0,u_0} (Widerspruch). Wählt man insbesondere $i_0\in K_{u_0}$ mit $u_0=\min\{u\colon E_u\neq 0\}$, dann gilt $i_0\in K_x$ für alle $x\in X_{\mathfrak{M}}$ und daher $A\approx a_{i_0,i_0}(x)\boldsymbol{I}(x)$, also $A\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ mit $\alpha(x)=a_{i_0,i_0}(x)$, d.h. $\alpha(x)$ ist stetig über $X_{\mathfrak{M}}$.

c) Aus Satz 3 folgt (35) bis auf $AB\leftrightarrow\alpha\beta$. Es gilt aber $AB\sim(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$ und wegen der Stetigkeit von $\alpha\beta$ ist dann $AB\approx(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$, d.h. $AB\leftrightarrow\alpha\beta$, w. z. b. w.

9. Kommutative Ringe

Wir wollen nun einige Anwendungen unserer bisherigen Ergebnisse betrachten. Zunächst bestätigen wir die in (3) aufgestellte Behauptung.

Satz 5. *Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Projektionen in $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn $\mathfrak{M}''$ ein kommutativer Ring mit*

$$\mathfrak{M}''^{P}=\mathfrak{M}$$

ist.

Beweis. Dann: Siehe Bemerkung vor (3).

Nur dann: Wir können $\mathfrak{H}$ durch ein direktes Integral $\mathfrak{H}=\int\mathfrak{H}_x d\mu$ und $\mathfrak{M}$ durch den Wertebereich des zugehörigen Spektralmaßes ersetzen (Satz 2). $\mathfrak{M}''^{P}\supset\mathfrak{M}$ folgt bereits aus $\mathfrak{M}''\supset\mathfrak{M}$. Es sei nun $E\in\mathfrak{M}''^{P}$, dann ist nach Satz 4 $E\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ und $\alpha^2(x)=\alpha(x)$, da $E^2=E$. Also ist $\alpha(x)=1$ oder $=0$. Wegen der Stetigkeit ist damit $\alpha=\chi_{\mathfrak{M}}$ für ein $M\in\mathfrak{R}_0$. Also ist $E=E(M)$, d.h. $E\in\mathfrak{M}$. Daß $\mathfrak{M}''$ kommutativ ist, folgt ohne weiteres aus der Kommutativität von $\mathfrak{M}$.

Im folgenden benötigen wir noch die Beziehung

$$(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R} \tag{36}$$

für Ringe. Zum Beweis von (36) brauchen wir einen Satz, der sicherstellt, daß sich jede selbstadjungierte Transformation „beliebig genau" durch die Projektionen auf ihre invarianten Teilräume darstellen läßt. Ein solcher Satz ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Transformationen.

Lemma 13. Für einen Ring $\mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R}$ (vgl. [9], S. 392).

Beweis. a) Aus $\mathfrak{R}^{P}\subset\mathfrak{R}$ folgt $(\mathfrak{R}^{P})''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$.

b) Es sei $A\in\mathfrak{R}$ und $A\notin(\mathfrak{R}^{P})''$. Da $A=\frac{1}{2}(A^*+A)+\frac{1}{2i}(iA-iA^*)$ und $(A+A^*)\in\mathfrak{R}$ und $(iA-iA)\in\mathfrak{R}$, aber nicht beide in $(\mathfrak{R}^{P})''$, so können wir annehmen, daß A selbstadjungiert ist. Der Spektralsatz sagt dann aus, daß $A=\int\lambda\,dE_\lambda$ für eine geeignete Zerlegung der Einheit $\{E_\lambda\}$ ist und daß $E_\lambda\in\{A\}''$ (vgl. etwa [7], S. 25). Aus $A\in\mathfrak{R}$ folgt $\{A\}''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$, also $E_\lambda\in\mathfrak{R}$ für $-\infty<\lambda<+\infty$ und damit $E_\lambda\in(\mathfrak{R}^{P})''$. Als Ring ist $(\mathfrak{R}^{P})''$ schwach abgeschlossen (vgl. [9]). A liegt nach dem Spektralsatz in der schwachen Hülle der Linearkombinationen der E_λ, also auch in $(\mathfrak{R}^{P})''$ (Widerspruch).

Satz 6. *Jeder kommutative Ring $\mathfrak{R}$ ist isomorph der Menge S aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}^{P}$. Im einzelnen gilt:*

Beweis. Wir haben nur noch zu zeigen, daß es sich um eine Abbildung auf $\mathfrak{A}_x$ handelt. Ist $A' \in \mathfrak{A}_{x_0}$ und A'' die Operation in $\mathfrak{H}'$, die auf $\mathfrak{H}_{x_0}$ mit A' übereinstimmt und auf $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ identisch Null ist, dann ist $\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{A}(x)$ ein Feld von Transformationen, das (27) erfüllt. (27) 1. und 3. sind offensichtlich erfüllt. $(\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)e_k, e_i) = (A''\boldsymbol{I}(x)e_k, \boldsymbol{I}(x)e_i) = \chi_{K_k}(x)\chi_{K_i}(x)(A''e_k, e_i)$. Dieser Ausdruck ist wegen (29) stetig. Man zeigt wieder wie oben, daß auch $(\boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)f, g)$ stetig ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$. Da (27) erfüllt ist, gibt es ein A mit $A \approx \boldsymbol{I}(x)A''\boldsymbol{I}(x)$. Also ist $\boldsymbol{A}(x_0) = \boldsymbol{I}(x_0)A''\boldsymbol{I}(x_0) = A''$ und $A'(x_0) = A'$, w. z. b. w.

Zu diesem Abschnitt vergleiche man auch [3], S. 115 ff., insbesondere die Formeln (218) bis (220), dort stehen die Ergebnisse von Satz 3.1. Diese Ergebnisse werden in [3] auf einem anderen Weg abgeleitet.

8. Die Transformationen aus $\mathfrak{M}''$

α sei eine endliche, stetige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$. Dann erfüllt $\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ (27) und es gibt daher ein $A \in \mathfrak{M}'$ mit $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$.

Satz 4. *$A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ ist gleichwertig mit $A \in \mathfrak{M}''$. Die ein-eindeutige Abbildung $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x) \leftrightarrow \alpha$ von $\mathfrak{M}''$ auf die Menge S aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ hat folgende Eigenschaften:*

(35)
1. *Aus $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$ folgt $A + B \leftrightarrow \alpha + \beta$, $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$[9]), $AB \leftrightarrow \alpha\beta$, $\lambda A \leftrightarrow \lambda\alpha$.*
2. $\|A\| = \sup\{|\alpha(x)| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.

Beweis. a) $A \approx \alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x) \in \mathfrak{M}'$; dann ist $AB \sim \alpha(x)\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{B}(x)\alpha(x)\boldsymbol{I}(x) \sim BA$. Also ist $AB = BA$ und damit $A \in \mathfrak{M}''$.

b) $A \in \mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Es ist also $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{M}'$.

α) Es ist $(\boldsymbol{A}(x)e_i, e_k) = a_{i,k}(x) = 0$ für $i \neq k$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mit $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Wir können $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ annehmen. Es ist $i_0, k_0 \in K_{u_0}$, da sonst $a_{i_0,k_0}(x_0) = 0$ wäre. Wir definieren $\boldsymbol{B}(x)$ für $x \notin U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x) = 0$ und für $x \in U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x)e_k = 0$ für $k \neq k_0$ und $\boldsymbol{B}(x)e_{k_0} = e_{k_0}$. $\boldsymbol{B}(x)$ erfüllt (27); es gibt also ein $B \in \mathfrak{M}'$ mit $B \approx \boldsymbol{B}(x)$. Es ist einerseits $((AB f_{j_0,u_0}^{k_0})(x), e_{i_0}) = ((A\chi_{U(x_0)} f_{j_0,u_0}^{k_0})(x), e_{i_0}) = \chi_{U(x_0)}(x)a_{i_0,k_0}(x)$ für μ-fast alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$, andererseits ist $((BA f_{j_0,k_0}^{k_0})(x), e_{i_0}) = (g(x)e_{k_0}, e_{i_0}) = 0$ μ-fast überall in $X_{\mathfrak{M}}$. Es ist daher $a_{i_0,k_0}(x) = 0$ für $x \in U(x_0)$ (Widerspruch).

β) $a_{i,i}(x) = a_{k,k}(x)$ für alle $i, k \in K_x$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,i_0}(x_0) \neq a_{k_0,k_0}(x_0)$ mit $i_0, k_0 \in K_{x_0}$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f_{k_0} und f_{i_0} [vgl. (18)] und von a_{i_0,i_0} und a_{k_0,k_0} eine ganze Umgebung $U(x_0)$ mit $a_{i_0,i_0}(x) \neq a_{k_0,k_0}(x)$ und $i_0, k_0 \in K_x$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder annehmen, daß $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ und $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ ist. Wir definieren B' durch $B'e_i = 0$ für $i \neq i_0$ und $i \neq k_0$ und $B'(e_{i_0} - e_{k_0}) = 0$ und $B'(e_{i_0} + e_{k_0}) = e_{i_0} + e_{k_0}$. Es sei $\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{I}(x)B'\boldsymbol{I}(x)$. Da $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ ist, ist $i_0, k_0 \in K_x = K_{u_0}$ für alle $x \in M_{j_0,u_0}$. Dann ist $\boldsymbol{B}(x) = B'$ auf M_{j_0,u_0}. Es gilt also einerseits $(AB(f_{j_0,u_0}^{k_0} + f_{j_0,u_0}^{i_0}))(x) =$

[9]) $\bar{\alpha}$ ist die Funktion $\bar{\alpha}(x) = \overline{\alpha(x)}$ = Konjugierte zu $\alpha(x)$.

$\left(A\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)$ μ-fast überall und andererseits $\left(BA\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\boldsymbol{B}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)=\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)\,\frac{1}{2}\left(a_{i_0,i_0}(x)+a_{k_0,k_0}(x)\right)(e_{k_0}+e_{i_0})$ μ-fast überall. Also ist $a_{i_0,i_0}(x)=a_{k_0,k_0}(x)$ in M_{j_0,u_0} (Widerspruch). Wählt man insbesondere $i_0\in K_{u_0}$ mit $u_0=\min\{u\colon E_u\neq 0\}$, dann gilt $i_0\in K_x$ für alle $x\in X_{\mathfrak{M}}$ und daher $A\approx a_{i_0,i_0}(x)\boldsymbol{I}(x)$, also $A\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ mit $\alpha(x)=a_{i_0,i_0}(x)$, d.h. $\alpha(x)$ ist stetig über $X_{\mathfrak{M}}$.

c) Aus Satz 3 folgt (35) bis auf $AB\leftrightarrow\alpha\beta$. Es gilt aber $AB\sim(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$ und wegen der Stetigkeit von $\alpha\beta$ ist dann $AB\approx(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$, d.h. $AB\leftrightarrow\alpha\beta$, w. z. b. w.

9. Kommutative Ringe

Wir wollen nun einige Anwendungen unserer bisherigen Ergebnisse betrachten. Zunächst bestätigen wir die in (3) aufgestellte Behauptung.

Satz 5. *Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Projektionen in $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn $\mathfrak{M}''$ ein kommutativer Ring mit*

$$\mathfrak{M}''^{P}=\mathfrak{M}$$

ist.

Beweis. Dann: Siehe Bemerkung vor (3).

Nur dann: Wir können $\mathfrak{H}$ durch ein direktes Integral $\mathfrak{S}=\int\mathfrak{H}_x d\mu$ und $\mathfrak{M}$ durch den Wertebereich des zugehörigen Spektralmaßes ersetzen (Satz 2). $\mathfrak{M}''^{P}\supset\mathfrak{M}$ folgt bereits aus $\mathfrak{M}''\supset\mathfrak{M}$. Es sei nun $E\in\mathfrak{M}''^{P}$, dann ist nach Satz 4 $E\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ und $\alpha^2(x)=\alpha(x)$, da $E^2=E$. Also ist $\alpha(x)=1$ oder $=0$. Wegen der Stetigkeit ist damit $\alpha=\chi_{\mathfrak{M}}$ für ein $M\in\mathfrak{R}_0$. Also ist $E=E(M)$, d.h. $E\in\mathfrak{M}$. Daß $\mathfrak{M}''$ kommutativ ist, folgt ohne weiteres aus der Kommutativität von $\mathfrak{M}$.

Im folgenden benötigen wir noch die Beziehung

$$(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R} \tag{36}$$

für Ringe. Zum Beweis von (36) brauchen wir einen Satz, der sicherstellt, daß sich jede selbstadjungierte Transformation „beliebig genau" durch die Projektionen auf ihre invarianten Teilräume darstellen läßt. Ein solcher Satz ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Transformationen.

Lemma 13. Für einen Ring $\mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R}$ (vgl. [9], S. 392).

Beweis. a) Aus $\mathfrak{R}^{P}\subset\mathfrak{R}$ folgt $(\mathfrak{R}^{P})''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$.

b) Es sei $A\in\mathfrak{R}$ und $A\notin(\mathfrak{R}^{P})''$. Da $A=\frac{1}{2}(A^*+A)+\frac{1}{2i}(iA-iA^*)$ und $(A+A^*)\in\mathfrak{R}$ und $(iA-iA)\in\mathfrak{R}$, aber nicht beide in $(\mathfrak{R}^{P})''$, so können wir annehmen, daß A selbstadjungiert ist. Der Spektralsatz sagt dann aus, daß $A=\int\lambda\,dE_\lambda$ für eine geeignete Zerlegung der Einheit $\{E_\lambda\}$ ist und daß $E_\lambda\in\{A\}''$ (vgl. etwa [7], S. 25). Aus $A\in\mathfrak{R}$ folgt $\{A\}''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$, also $E_\lambda\in\mathfrak{R}$ für $-\infty<\lambda<+\infty$ und damit $E_\lambda\in(\mathfrak{R}^{P})''$. Als Ring ist $(\mathfrak{R}^{P})''$ schwach abgeschlossen (vgl. [9]). A liegt nach dem Spektralsatz in der schwachen Hülle der Linearkombinationen der E_λ, also auch in $(\mathfrak{R}^{P})''$ (Widerspruch).

Satz 6. *Jeder kommutative Ring $\mathfrak{R}$ ist isomorph der Menge S aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}^{P}$. Im einzelnen gilt:*

1. *Aus* $A \leftrightarrow \alpha$ *und* $B \leftrightarrow \beta$ *folgt* $A+B \leftrightarrow \alpha+\beta$, $\lambda A \leftrightarrow \lambda\alpha$, $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$ *und* $AB \leftrightarrow \alpha\beta$.

2. $\|A\| = \sup\{|\alpha(x)| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.

Beweis. Nach Satz 4 gilt dies für alle $A \in \mathfrak{M}'' = (\mathfrak{R}^P)''$ und nach Lemma 13 ist $(\mathfrak{R}^P)'' = \mathfrak{R}$, w. z. b. w.

Wir haben damit einen bekannten Satz (vgl. z.B. [3], S. 70) für den Spezialfall von Ringen in Hilbert-Räumen bewiesen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und $\mathfrak{R}^A$ die Menge aller selbstadjungierten Transformationen in $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{R}^A$ bei der „natürlichen" teilweisen Ordnung ein vollständiger Vektorverband. Wir geben zunächst der Vollständigkeit halber die Definitionen für Vektorverbände und vollständige Vektorverbände an. Ein *Vektorverein* R ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, in dem eine teilweise Ordnung ($\geq$) definiert ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Aus $a \geq b$ folgt $a+c \geq b+c$ für alle $c \in R$ und

2. aus $a \geq b$ und $\lambda \geq 0$ folgt $\lambda a \geq \lambda b$.

Ein Vektorverein heißt *Vektorverband* (Rieszscher Raum), falls er ein Verband bezüglich seiner teilweisen Ordnung ist. Ein Vektorverband heißt *vollständig*, wenn gilt: Ist J eine beliebige Menge und jedem $j \in J$ ein $a_j \in R$ zugeordnet und existiert ein $h \in R$ mit $a_j \leq h$ für alle $j \in J$, dann existiert auch das Supremum der a_j in R.

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring von Transformationen in* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{R}^A$ *die Menge der selbstadjungierten Transformationen aus* $\mathfrak{R}$, *und führt man in* $\mathfrak{R}^A$ *eine teilweise Ordnung durch* $A \geq B$ *dann und nur dann, wenn* $(Af, f) \geq (Bf, f)$ *für alle* $f \in \mathfrak{H}$, *dann ist* $\mathfrak{R}^A$ *ein vollständiger Vektorverband.*

Beweis. 1. Nach Satz 6 ist $\mathfrak{R}^A$ isomorph zur Menge S^R der endlichen, stetigen und reellen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^P$. Es sei $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$, dann ist $A \geq B$ gleichwertig mit $\alpha \geq \beta$, d.h. $\alpha(x) \geq \beta(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Aus $\alpha \geq \beta$ folgt $(Af, f) = \int (\alpha(x) f(x), f(x))\, d\mu = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu \geq \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (Bf, f)$. Angenommen, es wäre $A \geq B$ und $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ für ein $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mit $\alpha(x) < \beta(x)$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder $U(x_0) < M_{j_0, u_0}$ und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ annehmen. Es sei $k_0 \in K_{u_0}$. Dann ist $f = \chi_{U(x_0)} e_{k_0} \in \mathfrak{S}$ und es gilt $(Af, f) = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu < \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (Bf, f)$ (Widerspruch zu $A \geq B$).

2. $\mathfrak{R}^A$ ist also isomorph zum Vektorverband S^R. Wir haben nur noch zu zeigen, daß S^R ein vollständiger Vektorverband ist. Dies folgt so (vgl. [8], S. 214): Ist $\{\varphi_j : j \in J\}$ ein System von Funktionen aus S^R mit $\varphi_j \leq \varphi_0$ und $\varphi_0 \in S^R$, dann setzen wir $M_\alpha = \bigcup_{j \in J} \{x : \varphi_j(x) > \alpha\}$. M_α ist offen, da die φ_j stetig sind; ferner ist $M_\alpha = X_{\mathfrak{M}}$, falls $\alpha < \inf\{\varphi_{j_0}(x) : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ für irgendein $j_0 \in J$. Wir setzen $\varphi(x) = \sup\{\alpha : x \in \overline{M}_\alpha\}$ und zeigen $\varphi(x) = \sup\{\varphi_j : j \in J\}$. $\overline{M}_\alpha$ ist offen und abgeschlossen, daher ist wegen $\{x : \varphi(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{u=1}^{\infty} \overline{M}_{\alpha - \frac{1}{u}}$ und $\{x : \varphi(x) > \alpha\} = \bigcup_{u=1}^{\infty} \overline{M}_{\alpha + \frac{1}{u}}$ $\varphi(x)$ stetig. Ist $\varphi' \geq \varphi_j$ für alle $j \in J$ und $\varphi' \in S^R$,

dann gilt $\varphi(x) = \sup\{\alpha: x \in \overline{M}_\alpha\} \leq \sup\{\alpha: x \in \overline{M}'_\alpha\} \leq \varphi'(x)$, dabei ist $M'_\alpha = \{x: \varphi'(x) > \alpha\}$ und wegen der Stetigkeit $\varphi'(x) \geq \alpha$ für $x \in \overline{M}'_\alpha$. Insbesondere ist $\varphi_0 \geq \varphi$. Ferner ist $\varphi \geq \varphi_j$ für alle $j \in J$, denn $\varphi_j(x) > \alpha$ hat $x \in \overline{M}_\alpha$ und damit auch $\varphi(x) \geq \alpha$ zur Folge. Insbesondere ist $\varphi \geq \varphi_{j_0}$. Wegen $\varphi_0 \geq \varphi \geq \varphi_j$ ist φ endlich, also aus S^R und nach dem Bewiesenen ist $\varphi = \sup\{\varphi_j: j \in J\}$. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir nennen zwei Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ *isomorph*, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{R}_2$ gibt und aus $A_1 \leftrightarrow A_2$, $B_1 \leftrightarrow B_2$ folgt $\lambda A_1 + \mu B_1 \leftrightarrow \lambda A_2 + \mu B_2$ und $A_1 B_1 \leftrightarrow A_2 B_2$.

Satz 8. *Zwei kommutative Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind dann und nur dann isomorph, wenn $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ und $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ homöomorph sind. Für eine Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gilt noch: Aus $A_1 \leftrightarrow A_2$ folgt $A^* \leftrightarrow A^*$ und $\|A_1\| = \|A_2\|$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{R}_1^P = \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{R}_2^P = \mathfrak{M}_2$. Es genügt nach Satz 6 die Ringe der stetigen Funktionen S_1 und S_2 über $X_{\mathfrak{M}_1}$ bzw. $X_{\mathfrak{M}_2}$ zu betrachten.

a) Wenn $X_{\mathfrak{M}_1}$ und $X_{\mathfrak{M}_2}$ homöomorph sind, ist selbstverständlich S_1 isomorph zu S_2.

b) S_1 und S_2 seien isomorph. Jedem maximalen Ideal $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_2$ in S_1 bzw. S_2 entspricht genau ein Punkt $x_1 \in X_{\mathfrak{M}_1}$ bzw. $x_2 \in X_{\mathfrak{M}_2}$ mit $\mathfrak{p}_i = \{\alpha: \alpha \in S_i$ und $\alpha(x_i) = 0\}$, $i = 1, 2$ (vgl. [6], S. 54). Wir erhalten damit eine ein-eindeutige Abbildung $x_1 \leftrightarrow x_2$ von $X_{\mathfrak{M}_1}$ auf $X_{\mathfrak{M}_2}$. Diese Abbildung führt offene Mengen in offene Mengen über, ist also eine Homöomorphie. In der Tat: Jede offene Menge ist Vereinigung von gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen. Es genügt daher zu zeigen, daß diese Mengen ineinander übergehen. M_1 sei gleichzeitig offen und abgeschlossen in $X_{\mathfrak{M}_1}$ und $\chi_{M_1} \leftrightarrow \beta$. Da $\chi^2_{M_1} - \chi_{M_1} = 0$, ist $\beta^2 - \beta = 0$. Also ist auch β eine charakteristische Funktion χ_{M_2}, und da β stetig ist, ist auch M_2 offen und abgeschlossen. Die Menge der maximalen Ideale $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_1 \ni \chi_{M_1}$ geht über in die Menge der maximalen Ideale $\mathfrak{p}_2$ mit $\chi_{M_2} \notin \mathfrak{p}_2$, d.h. M_1 geht in M_2 über.

c) Gilt bei der Isomorphie $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ und bei der zugehörigen Homöomorphie $x_1 \leftrightarrow x_2$, dann ist $\alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)$. Nach b) gilt $\chi_{X_{\mathfrak{M}_1}} \leftrightarrow \chi_{X_{\mathfrak{M}_2}}$ und da $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) \cdot \chi_{X_{\mathfrak{M}_1}}$ in x_1 Null ist, ist also auch $\alpha_2 - \alpha_1(x_1)\chi_{X_{\mathfrak{M}_2}}$ Null in x_2, d.h. $\alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)$. Hieraus folgen ohne weiteres die restlichen Behauptungen von Satz 8.

Aus Satz 8 und der Bemerkung am Ende des 3. Abschnittes folgt: Für die Isomorphie zweier kommutativer Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}$ ist $\alpha(\mathfrak{R}_1^P) = \alpha(\mathfrak{R}_2^P)$ und $\gamma(\mathfrak{R}_1^P) = \gamma(\mathfrak{R}_2^P)$ notwendig und falls $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ Ringe von Transformationen in separablen Hilbert-Räumen sind, sogar hinreichend. In einem separablen Hilbert-Raum ist ein kommutativer Ring also entweder zu einem Ring $\mathfrak{R}_a$ aller beschränkten reellen Funktionen über einer endlichen oder abzählbaren Menge isomorph oder zu einem Ring $\mathfrak{R}_\mathfrak{T}$ aller stetigen Funktionen über dem topologischen Raum $X_\mathfrak{T}$ [= der topologische Raum, der zum Verband $\mathfrak{T}$ gehört (vgl. Ende des 2. Abschnittes)] oder zu einer direkten Summe eines Ringes $\mathfrak{R}_a$ mit dem Ring $\mathfrak{R}_\mathfrak{T}$.

Eine Abbildung eines Ringes $\mathfrak{R}_1$ auf einen Ring $\mathfrak{R}_2$ heißt Homomorphie, wenn aus $A_1 \to A_2$ und $B_1 \to B_2$ folgt $A_1 + B_1 \to A_2 + B_2$, $\lambda A_1 \to \lambda A_2$ und

$A_1 B_1 \to A_2 B_2$. Eine Homomorphie von $\mathfrak{R}_1$ auf den Körper der komplexen Zahlen nennen wir einen *Charakter*. Mit $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ bezeichnen wir die Menge aller Charaktere des Ringes $\mathfrak{R}$. In $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ führen wir die durch $A(\varphi) = \varphi(A)$ ($\varphi \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$, $A \in \mathfrak{R}$) erzeugte schwache Topologie ein, d.h. die Umgebungen von $\varphi_0 \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$ sind

$$(37) \qquad U(\varphi_0; A_1, \ldots, A_n; \varepsilon) = \{\varphi: |\varphi(A_\nu) - \varphi_0(A_\nu)| < \varepsilon \text{ für } = 1, \ldots, n\}$$

für $n = 1, 2, \ldots$ und $\varepsilon > 0$ und $A_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Satz 9. *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, so gibt es eine Homöomorphie ϱ von $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ auf $X_{\mathfrak{R}^P}$ mit $\varphi(A) = \alpha(\varrho(\varphi))$ für alle $\varphi \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$ und alle $A \in \mathfrak{R}$; α ist dabei die nach Satz 6 der Transformation $A \in \mathfrak{R}$ zugeordnete stetige Funktion über $X_{\mathfrak{R}^P}$.*

Beweis. a) Wir können wegen Satz 6 die homomorphen Abbildungen des Ringes S aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ auf den Körper der komplexen Zahlen als die Charaktere aus $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ betrachten. Ist φ solch ein Charakter, dann ist die Menge $K_\varphi = \{\alpha: \varphi(\alpha) = 0\}$ ein maximales Ideal in S. Es gibt also genau einen Punkt $x \in X_{\mathfrak{R}^P}$ mit $K_\varphi = \{\alpha: \alpha(x) = 0 \text{ und } \alpha \in S\}$ (vgl. [6], S. 54). Es sei $\varphi \leftrightarrow x$ unsere Abbildung ϱ. Wegen $\varphi(\chi_{X_{\mathfrak{R}^P}}) = 1$ ist $\varphi(\alpha) = \alpha(x)$. Jede Abbildung $\alpha \to \alpha(x)$ liefert natürlich einen Charakter.

b) Wir haben noch zu zeigen, daß $\varphi \leftrightarrow x$ eine Homöomorphie ist. Wegen der Ein-eindeutigkeit von $\varphi \leftrightarrow x$ und der Kompaktheit von $X_{\mathfrak{R}^P}$, genügt es zu zeigen, daß $x \to \varphi$ stetig ist. Ist $U(\varphi_0) = U(\varphi_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \varepsilon)$ eine Umgebung von φ_0 mit $x_0 \leftrightarrow \varphi_0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit $|\alpha_\nu(x_0) - \alpha_\nu(x)| < \varepsilon$ für $x \in U(x_0)$ und $\nu = 1, \ldots, n$. Es ist also $\varrho^{-1}(U(x_0)) < U(\varphi_0)$, d.h. $x \to \varphi$ ist stetig, w. z. b. w.

Satz 10. *Es gibt dann und nur dann eine homomorphe Abbildung des kommutativen Ringes $\mathfrak{R}_1$ auf den kommutativen Ring $\mathfrak{R}_2$, wenn $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ homöomorph zu einem Teilraum von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ ist. Geht bei der Homomorphie A_1 in A_2 über, so geht A_1^* in A_2^* über und es gilt $\|A_1\| \geq \|A_2\|$.*

Beweis. Wir können uns wegen Satz 6 auf homomorphe Abbildungen des Ringes S_1 der stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auf den Ring S_2 der stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ beschränken.

a) Ist $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ homöomorph einer Teilmenge M_0 von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$, dann können wir $X_{\mathfrak{R}_2^P} = M_0$ setzen und die Verengung einer Funktion $\alpha \in S_1$ auf M_0 liefert bereits eine Homomorphie[10]).

b) Es sei φ eine homomorphe Abbildung von S_1 auf S_2. Die Abbildung $\alpha \to (\varphi(\alpha))(x_2)$ ($x_2 \in X_{\mathfrak{R}_2^P}$) ist ein Charakter von $\mathfrak{R}_1$, also gibt es genau ein x_1 mit $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$ für alle $\alpha \in S_1$. Die Abbildung $x_2 \to x_1$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ auf eine Teilmenge von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ und es ist $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$. Da $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ kompakt ist, ist $x_2 \to x_1$ eine Homöomorphie, wenn $x_2 \to x_1$ stetig ist. U_0 sei eine Umgebung von x_1^0 mit $x_2^0 \to x_1^0$. Wir können annehmen, daß U_0 gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. χ_{U_0} ist dann aus S_1 und $\varphi(\chi_{U_0}) = \chi_M$ mit $M \in \mathfrak{R}_0$. Da $\chi_{U_0}(x_1) = (\varphi(\chi_{U_0}))(x_2) = \chi_M(x_2)$, ist

[10]) M_0 ist kompakt, also abgeschlossen in $X_{\mathfrak{R}_1^P}$. Nach [2], S. 27 kann man jede stetige Funktion auf M_0 zu einer stetigen Funktion auf $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ erweitern.

$x_2 \in M$ gleichwertig mit $x_1 \in U_0$. Also wird durch $x_2 \to x_1$ M in U_0 abgebildet, d.h. $x_2 \to x_1$ ist stetig.

c) Wegen b) können wir $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ als Teilmenge von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auffassen und wegen $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$ die Abbildung φ einfach als die Verengung von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auf $X_{\mathfrak{R}_2^P}$. Daraus folgt $A_1^* \to A_2^*$ und $\|A_1\| \geq \|A_2\|$.

10. Kommutative Ringe nicht beschränkter, linearer Transformationen

Es sei $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. Wegen der Ergebnisse des 6. Abschnittes können wir annehmen, daß $\mathfrak{H}$ ein direktes Integral $\int \mathfrak{H}_x d\mu$ ist, dessen zugehöriges Spektralmaß den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Der σ-Körper, über dem das Maß μ erklärt ist, enthält $X_{\mathfrak{M}}$ als größte Menge. Die Vektoren aus $\mathfrak{H}$ sind dann Vektorfelder über $X_{\mathfrak{M}}$. Im folgenden betrachten wir, wenn es für die Beweise nötig ist, $\mathfrak{H}$ als direktes Integral $\int \mathfrak{H}_x d\mu$. Die Übertragung der Ergebnisse auf allgemeine Hilbert-Räume geschieht durch Satz 2.

Eine stetige, reelle (nicht notwendig endliche) Funktion f über $X_{\mathfrak{M}}$ nennen wir *fast-endlich*, wenn sie bis auf eine nirgends-dichte Menge endlich ist (vgl. [8], S. 218). Eine komplexwertige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$ nennen wir fast-endlich, wenn ihr Real- und Imaginärteil stetig und fast-endlich sind. (Eine solche Funktion kann z.B. die Werte $a + i\infty$ oder $\infty - i\infty$ annehmen.) Mit Hilfe von Lemma 4 kann man in der Menge $\tilde{S}$ aller fast-endlichen komplex-wertigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ eine Addition, eine Multiplikation und eine Multiplikation mit komplexen Zahlen einführen. Wir führen dies für die Addition durch. Es sei $f, g \in \tilde{S}$ und $N = \{x: f(x) \text{ oder } g(x) \text{ nicht endlich}\}$. Auf der offenen Menge $X_{\mathfrak{M}} - N$ definieren wir h durch $h(x) = f(x) + g(x)$. Diese Funktion ist stetig in $X_{\mathfrak{M}} - N$. Nach Lemma 4 gibt es eine stetige Erweiterung von h auf $X_{\mathfrak{M}}$, und da $\overline{X_{\mathfrak{M}} - N} = X_{\mathfrak{M}}$ ist, gibt es nur eine solche Erweiterung. Wir bezeichnen auch diese erweiterte Funktion mit h und setzen $h = f + g$. Ganz entsprechend erklärt man die Multiplikation und die Multiplikation mit komplexen Zahlen. $\tilde{S}$ wird dadurch zu einem kommutativen Ring.

$\tilde{S}^R$ sei die Menge aller reellen Funktionen aus $\tilde{S}$. In $\tilde{S}^R$ wird durch die Definition $\alpha \geq \beta$ dann und nur dann, wenn $\alpha(x) \geq \beta(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ eine teilweise Ordnung eingeführt. Auf genau dieselbe Weise, wie beim Beweis von Satz 7 gezeigt wurde, daß S^R ein vollständiger Vektorverband ist, zeigt man, daß $\tilde{S}^R$ ein vollständiger Vektorverband ist.

Es sei nun α eine komplexe, fast-endliche Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$. Wir ordnen α eine Transformation A in $\mathfrak{H} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ auf folgende Weise zu:

1. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ von A enthält alle $f \in \mathfrak{H}$ mit $\alpha f \in \mathfrak{H}$, d.h. mit $\int |\alpha(x) f(x)|^2 d\mu$.

2. Für $f \in \mathfrak{D}_A$ setzen wir $(A f)(x) = \alpha(x) f(x)$.

(Auf die nirgends-dichte Menge $N = \{x: \alpha(x) \text{ nicht endlich}\}$ kommt es nicht an, da nirgends-dichte Mengen μ-Nullmengen sind.) Damit ist eine Abbildung von $\tilde{S}$ auf eine Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ von Transformationen in $\mathfrak{H}$ erklärt.

Wir betrachten zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung $\alpha \to A$.

1. $\alpha \to A$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Ist $\alpha \neq \alpha'$, dann gibt es wegen der Stetigkeit und der Fast-Endlichkeit eine Menge $U \in \mathfrak{R}_0$, auf der α und α' endlich und verschieden sind. Man kann ein $f \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A'}$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin U$ und mit $\alpha f \neq \alpha' f$ angeben. Also ist $A \neq A'$.

2. $\alpha \to A$ ist eine Erweiterung der in Satz 4 angegebenen Abbildung von S auf $\mathfrak{M}''$.

Im folgenden sei $\alpha \to A$.

3. A ist eine lineare Transformation.

Beweis. a) $\mathfrak{D}_A$ ist wegen

$$\int |\alpha(x)|^2 |f(x) + g(x)|^2 d\mu \leq 2 \int |\alpha(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu + 2 \int |\alpha(x)|^2 |g(x)|^2 d\mu$$

eine lineare Menge.

b) $A(f+g) = \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g = Af + Ag$.

4. $\mathfrak{D}_A$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$.

Beweis. Es sei $X_n = \{x : x \in X_{\mathfrak{M}} \text{ und } |\alpha(x)| < n\}$ für $n = 1, 2, \ldots$. X_n ist offen, also $\mathfrak{R}$-meßbar. Aus $f \in \mathfrak{H}$ folgt daher $f_n = \chi_{X_n} f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}$ und $|f - f_n|^2 = \int |f(x) - f_n(x)|^2 d\mu = \int \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) |f(x)|^2 d\mu$. Die Menge N aller Punkte mit $\alpha(x)$ nicht endlich ist abgeschlossen und nirgends dicht, also vom μ-Maß Null. Ferner ist $\lim_{n \to \infty} \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) = \chi_N(x)$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} |f - f_n|^2 = \lim_{n \to \infty} \int \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) |f(x)|^2 d\mu = \int \chi_N(x) |f(x)|^2 d\mu = 0.$$

$\mathfrak{D}_A$ liegt also dicht in $\mathfrak{H}$, w. z. b. w.

5. A ist eine abgeschlossene Transformation.

Beweis. Es sei $f_n \in \mathfrak{D}_A$ für $n = 1, 2, \ldots$ mit $f_n \to f \in \mathfrak{H}$ und $Af_n \to g \in \mathfrak{H}$. Wir haben $f \in \mathfrak{D}_A$ und $Af = g$ zu zeigen. Wegen Lemma 8 können wir $f(x) = \lim_{\nu \to \infty} f_{n_\nu}(x)$ und $g(x) = \lim_{\nu \to \infty} \alpha(x) f_{n_\nu}(x)$ μ-fast überall annehmen. Also ist $g(x) = \alpha(x) f(x)$ μ-fast überall, d. h. $f \in \mathfrak{D}_A$ und $Af = g$, w. z. b. w.

Da A eine dicht definierte, lineare und abgeschlossene Transformation ist, existiert A^* und ist ebenfalls eine dicht definierte, lineare und abgeschlossene Transformation (vgl. etwa [7], S. 28).

6. $\bar{\alpha} \to A^*$.

Beweis. Es sei $\bar{\alpha} \to \bar{A}$. Wir haben $\bar{A} = A^*$ zu zeigen. Es ist $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ dann und nur dann, wenn ein $g^* \in \mathfrak{H}$ existiert mit

$$(Af, g) = \int \big((\alpha(x) f(x), g(x)\big)\, d\mu = \int \big(f(x), g^*(x)\big)\, d\mu \tag{38}$$

für alle $f \in \mathfrak{D}_A$. Es ist dann $A^* g = g^*$. Ist $g \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$ und $g^* = \bar{\alpha} g$, so erfüllen g und g^* (38), also ist $\mathfrak{D}_{\bar{A}} \subset \mathfrak{D}_{A^*}$. Es sei nun $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ und $g^* = A^* g$. Wir setzen $f = \chi_M \chi_{M_{j,u}} e_k$ mit $k \in K_u$ und $M \in \mathfrak{R}$. Weiter setzen wir $f_n = \chi_{X_n} f$. Aus (38) folgt dann

$$\alpha(x)\big(e_k, g(x)\big) = \big(e_k, g^*(x)\big) \tag{39}$$

μ-fast überall in $X_n \cap M_{j,u}$ für $k \in K_u$. Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X_{\mathfrak{M}}$ gilt (39) sogar in

$M_{j,u}$ und wegen (11) für alle $k \in K$. Also ist $g^*(x) = \bar{\alpha}(x) g(x)$ μ-fast überall (Lemma 9 und (12) 2.). Hieraus folgt $g \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$ und $A^* g = \bar{\alpha} g$. Insgesamt haben wir damit $\mathfrak{D}_{\bar{A}} = \mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A^*}$ und $\bar{A} g = A^* g$ für $g \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$, d.h. $A^* = \bar{A}$, w. z. b. w.

7. A ist normal (zur Definition vgl. [7], S. 33).

Beweis. Es gilt nach 6. $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{\bar{A}} = \mathfrak{D}_{A^*}$ und $|Af|^2 = \int |\alpha(x) f(x)|^2 d\mu = \int |\bar{\alpha}(x) f(x)|^2 d\mu = |A^* f|^2$. Also sind A und A^* metrisch gleich, d.h. A ist normal (vgl. [7], S. 33).

Eine beschränkte, lineare Transformation B heißt mit der linearen Transformation T *vertauschbar*, wenn

$$BT \subset TB^{11})$$

ist.

8. Alle $B \in \mathfrak{M}'$ sind mit A vertauschbar.

Beweis. $f \in \mathfrak{D}_A$, dann ist $(BAf)(x) = \boldsymbol{B}(x)\,\alpha(x) f(x) = \alpha(x)\,\boldsymbol{B}(x) f(x) = (ABf)(x)$ μ-fast überall. Also ist $BA \subset AB$.

Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{R}}$ die Menge aller (dicht definierten, linearen, abgeschlossenen und) normalen Transformationen, mit denen alle Transformationen aus $\mathfrak{R}'$ vertauschbar sind.

Satz 11. *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, dann ist die Abbildung $\alpha \leftrightarrow A$ eine ein-eindeutige Abbildung der Menge $\tilde{S}$ aller fast-endlichen stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ auf die Menge $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit folgenden Eigenschaften: Aus $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$ und $C \leftrightarrow \mu\alpha + \lambda\beta$ und $D \leftrightarrow \alpha\beta$ folgt*

1. $Cf = \mu Af + \lambda Bf$ *für* $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$.
2. $Df = ABf$ *für* $f \in \mathfrak{D}_B$ *und* $Bf \in \mathfrak{D}_A$.
3. $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$.

Die Abbildung $\alpha \to A$ ist eine Erweiterung der in Satz 6 erklärten Abbildung von S auf $\mathfrak{R}$.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^P$. Nach 1. ist $\alpha \to A$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$. Zunächst zeigen wir $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{M}}$.

a) Es sei $A \in \tilde{\mathfrak{R}}$. Da A normal ist, gibt es eine komplexe Spektralschar $E(z)$ derart, daß $(Af, g) = \int z\, d(E(z) f, g)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A$, $g \in \mathfrak{H}$ mit $BE(z) = E(z) B$ für alle $B \in \mathfrak{R}'$ und alle komplexen Zahlen z. $f \in \mathfrak{D}_A$ genau dann, wenn $\int |z|^2 d|E(z) f|^2 < +\infty$ ist ([7], S. 50). Es sei $E(m, n) = E(m + in) - E(m - 1 + in) - E(n + i(m-1)) + E(m - 1 + i(n-1))$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die $E(m, n)$ sind paarweise orthogonal und es gilt $\sup \{E(m, n);\, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = I$. $A_{n,m} = AE(m, n)$ ist eine beschränkte, lineare Transformation, die überall definiert ist. Da $BA_{m,n} = BAE(m, n) = ABE(m, n) = AE(m, n) B = A_{m,n} B$ für alle $B \in \mathfrak{R}'$ ist, ist $A_{m,n} \in \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}$. Es gibt also nach Satz 6 eine endliche, stetige Funktion $\alpha_{m,n}$ mit $\alpha_{m,n} \to A_{m,n}$. Da $E(m, n) f = 0$ für $f \perp E(m, n) \mathfrak{H}$, so ist $\alpha_{m,n}(x) = 0$ für $x \notin M_{m,n}$, dabei ist $M_{m,n} \in \mathfrak{R}_0$ und $E(M_{m,n}) = E(m, n)$. Wir können daher $\alpha(x) = \alpha_{m,n}(x)$ für $x \in M_{m,n}$ setzen. α ist dann stetig und endlich auf $\cup \{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ und kann wegen $\overline{\cup \{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}} = X_{\mathfrak{M}}$ auf eine und nur eine Weise auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig

[11]) $A \subset B$ bedeutet $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_B$ und $Af = Bf$ für $f \in \mathfrak{D}_A$ (vgl. [7], S. 28).

fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit α. Sie gehört zu $\tilde{S}$, da $X_{\mathfrak{M}} - \cup\{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ nirgends-dicht ist. Wir zeigen, daß unsere Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Funktion α die Transformation A zuordnet ($\alpha \to A$). Es sei $f \in \mathfrak{D}_A$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ mit $f_\nu = \sum_{-\nu \le n,m \le \nu} E(m,n) f$. Es gilt $Af_n = \alpha f_n$ (wegen der Definition von α) und $Af = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{-\nu \le n,m \le \nu} E(m,n) Af = \lim_{\nu\to\infty} A \sum_{-\nu \le n,m \le \nu} E(m,n) f = \lim_{n\to\infty} Af_n$, da $E(m,n) \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$. Wir können nach Lemma 8 annehmen, daß $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $(Af)(x) = \lim_{n\to\infty} (Af_n)(x)$ μ-fast überall. Also gilt auch $(Af)(x) = \lim_{n\to\infty} (Af_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x) f_n(x) = \alpha(x) f(x)$ μ-fast überall, d.h. $Af = \alpha f$ für $f \in \mathfrak{D}_A$. Wir haben noch zu zeigen, daß aus $f \in \mathfrak{H}$ und $\alpha f \in \mathfrak{H}$ auch $f \in \mathfrak{D}_A$ folgt. Es ist wieder $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ mit $f_\nu = \sum_{-\nu \le m,n \le \nu} E(m,n) f$. Es gilt $(Af_n)(x) = \alpha(x) f_n(x)$ μ-fast überall. Wir können wieder $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ μ-fast überall annehmen. Dann gilt $f_n \to f$ und $\lim_{n\to\infty} (Af_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x) f_n(x) = \alpha(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \alpha(x) f(x)$ μ-fast überall, d.h. $Af_n \to \alpha f$. Da A abgeschlossen ist, ist $f \in \mathfrak{D}_A$. Wir haben damit $\alpha \to A$ bewiesen; es ist also $A \in \tilde{\mathfrak{M}}$.

b) In a) wurde $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ gezeigt. Aus 1. bis 8. vor Satz 11 folgt $\tilde{\mathfrak{M}} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$. Es ist also $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{M}}$. Die übrigen Behauptungen von Satz 11 sind nun einfache Folgerungen aus 1. bis 8.

Satz 12. *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und ist $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ die Menge der selbstadjungierten Elemente in $\tilde{\mathfrak{R}}$, dann kann man in $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ eine teilweise Ordnung einführen durch $A \ge B$ dann und nur dann, wenn $(Af, f) \ge (Bf, f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$. $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ wird dadurch zu einem vollständigen Verband.*

Beweis. Die Verengung der Abbildung $\alpha \to A$ von $\tilde{S}$ auf $\tilde{S}^R$ liefert nach Satz 11 eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}^R$ auf $\tilde{\mathfrak{R}}^A$. Da $\tilde{S}^R$ ein vollständiger Vektorverband ist, ist Satz 12 bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\alpha \ge \beta$ und $A \ge B$ gleichwertig sind ($\alpha \to A$, $\beta \to B$). Aus $\alpha \ge \beta$ folgt wegen $\int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu \ge \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu$ sofort $(Af, f) \ge (Bf, f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$, d.h. $A \ge B$. Ist $A \ge B$ und $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$, dann gibt es eine nicht leere Menge $U_0 \in \mathfrak{R}$ mit $U_0 \subset M_{j_0,u_0}$ und $\alpha(x) < \beta(x)$ und $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ endlich für $x \in U_0$. Also gilt für $f = \chi_{U_0} e_k$ $(k \in K_{u_0})$ $(Af, f) = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu < \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (Bf, f)$. Das ist ein Widerspruch zu $A \ge B$.

11. Reguläre Punkte

Wir kehren nun wieder zurück zu der im 7. Abschnitt betrachteten Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge der Felder von Transformationen, die (27) erfüllen (vgl. Satz 3). Es ist ein Mangel von Satz 3, daß dort nicht bewiesen werden konnte, daß aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ folgt $AB \approx \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß dies im allgemeinen gar nicht richtig ist. Wir nennen einen Punkt $x \in X_{\mathfrak{M}}$ regulär, wenn aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ und $C = AB \approx \boldsymbol{C}(x)$ für alle $A, B \in \mathfrak{M}'$ stets $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x) \boldsymbol{B}(x)$ folgt. Die regulären Punkte sind genau die Punkte, für welche die im Korollar zu Satz 4 ange-

gebene Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf $\mathfrak{A}_x$ eine Homomorphie ist, d.h. auch noch $AB \to A'(x)\,B'(x)$ gilt.

Lemma 14. Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A \sim \boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)$ schwach stetig in x_0, dann ist $\boldsymbol{A}(x_0) = \boldsymbol{B}(x_0)$.

Beweis. Wir nehmen an, es wäre $\boldsymbol{A}(x_0) \neq \boldsymbol{B}(x_0)$. Dann gibt es ein Indexpaar (i, k) mit $(\boldsymbol{A}(x_0)\,e_i, e_k) \neq (\boldsymbol{B}(x_0)\,e_i, e_k)$. Wegen der Stetigkeit gilt dies auch in einer ganzen Umgebung $U(x_0)$ von x_0. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $U(x_0)$ in einem $M_{j,u}$ liegt, aus $\mathfrak{R}_0$ stammt und sogar $\int\limits_{U(x_0)} (\boldsymbol{A}(x)\,e_i, e_k)\,d\mu \neq \int\limits_{U(x_0)} (\boldsymbol{B}(x)\,e_i, e_k)\,d\mu$. Dann ist aber $A\,\chi_{U(x_0)}\,e_i \neq A\,\chi_{U(x_0)}\,e_i$ (Widerspruch).

Lemma 15. Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, $B \approx \boldsymbol{B}(x)$, $AB \approx \boldsymbol{C}(x)$ und $BA \approx \boldsymbol{D}(x)$ und ferner $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig in x_0[12]), dann ist $\boldsymbol{C}(x_0) = \boldsymbol{A}(x_0)\,\boldsymbol{B}(x_0)$ und $\boldsymbol{D}(x_0) = \boldsymbol{B}(x_0)\,\boldsymbol{A}(x_0)$.

Beweis. Nach Lemma 14 genügt es zu zeigen, daß $\boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in x_0 sind. Daß $\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in x_0 ist, folgt wegen der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ in x_0 aus

$$\begin{aligned}\left|(\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)\,f, g) - (\boldsymbol{B}(x_0)\,\boldsymbol{A}(x_0)\,f, g)\right| \leq \left|((\boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{B}(x_0))\,\boldsymbol{A}(x_0)\,f, g)\right| + \\ + \left|(\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f, g)\right|.\end{aligned}$$

Der 1. Ausdruck geht gegen Null für $x \to x_0$, da $\boldsymbol{B}(x)$ schwach stetig in x_0 ist. Wegen

$$\left|(\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f, g)\right| \leq \left|\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f\right|\,|g| \leq \|B\|\,\left|\boldsymbol{A}(x)\,f - \boldsymbol{A}(x_0)\,f\right|\,|g|$$

und der starken Stetigkeit geht auch der 2. Ausdruck für $x \to x_0$ gegen Null. Da $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig in x_0 ist, ist $\boldsymbol{B}^*(x)\,\boldsymbol{A}^*(x)$ schwach stetig in x_0, also auch $(\boldsymbol{B}^*(x)\,\boldsymbol{A}^*(x))^* = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$.

Wir fügen noch einige Bemerkungen an, die im folgenden nützlich sind.

(40) { Aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}(x)\,e_i \to \boldsymbol{A}(x_0)\,e_i$ für $x \to x_0$ und alle $i \in K$ folgt die starke Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ in x_0.

Beweis. Es gilt auch $\boldsymbol{A}(x) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu} \to \boldsymbol{A}(x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu}$. Es sei f beliebig aus $\mathfrak{H}'$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu} = f_\varepsilon$ mit $|f_\varepsilon - f| < \frac{\varepsilon}{4\,|A|}$ und eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mit $|\boldsymbol{A}(x)\,f_\varepsilon - \boldsymbol{A}(x_0)\,f_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt (wegen $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq \|A\|$) $|\boldsymbol{A}(x)\,f - \boldsymbol{A}(x_0)\,f| \leq |\boldsymbol{A}(x)\,(f - f_\varepsilon)| + |\boldsymbol{A}(x)\,f_\varepsilon - \boldsymbol{A}(x_0)\,f_\varepsilon| + |\boldsymbol{A}(x_0)\,(f - f_\varepsilon)| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\,|A|} + \frac{\varepsilon}{2} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\,|A|}$. Also ist $A(x)$ stark stetig in x_0, w. z. b. w.

(41) { Ist A eine beschränkte, lineare Transformation in $\mathfrak{H}'$, dann ist $\boldsymbol{I}(x)\,A\,\boldsymbol{I}(x)$ überall stark stetig.

Beweis. Wegen (40) genügt es $\boldsymbol{I}(x)\,A\,\boldsymbol{I}(x)\,e_i \to \boldsymbol{I}(x_0)\,A\,\boldsymbol{I}(x_0)\,e_i$ zu beweisen. Ist $\boldsymbol{I}(x_0)\,e_i = 0$, dann ist $\boldsymbol{I}(x)\,e_i = 0$ in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0, da

[12]) $\boldsymbol{A}(x)$ heißt stark stetig in x_0, wenn $\boldsymbol{A}(x)\,f \to \boldsymbol{A}(x^0)\,f$ für $x \to x_0$ und für alle $f \in \mathfrak{H}'$.

$\{x: e_i \in \mathfrak{H}_x\}$ offen und abgeschlossen ist. Wegen $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i = 0$ für $x \in U(x_0)$ gilt $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i \to \boldsymbol{I}(x_0) A \boldsymbol{I}(x_0) e_i = 0$. Ist $\boldsymbol{I}(x) e_i = e_i$, dann gibt es ebenfalls eine Umgebung $U(x_0)$ mit $\boldsymbol{I}(x) e_i = e_i$ für alle $x \in U(x_0)$. Also ist in $U(x_0)$ $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i = \boldsymbol{I}(x) A e_i$. $\boldsymbol{I}(x) A e_i \to \boldsymbol{I}(x_0) A e_i$ folgt aus der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$, die ihrerseits wieder aus (40) und $\{x: e_i \in \mathfrak{H}_x\} \in \mathfrak{R}_0$ folgt. Damit ist (41) bewiesen.

Lemma 16. $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ ist dann und nur dann regulär, wenn alle $\boldsymbol{A}(x)$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ in x_0 stark stetig sind ($A \in \mathfrak{R}'$).

Beweis. Dann: Nach Lemma 15.

Nur dann: Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}(x)$ nicht stark stetig in x_0. Wir nehmen noch an, daß x_0 regulär sei und leiten daraus einen Widerspruch ab.

a) Es sei $B \approx \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$, dann ist $A - B \approx \boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$. Wegen (42) ist $\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$ nicht stark stetig in x_0. Wir können daher im folgenden zusätzlich annehmen, daß $\boldsymbol{A}(x_0) = 0$ ist.

b) Es ist $A = A_1 + i A_2$ mit $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und $A_2 = \frac{1}{2}(iA^* - iA)$. Es ist $\boldsymbol{A}_1(x_0) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{A}(x_0) + \boldsymbol{A}^*(x_0)\big) = 0$ und ebenso $\boldsymbol{A}_2(x_0) = 0$. $\boldsymbol{A}_1(x)$ und $\boldsymbol{A}_2(x)$ können nicht gleichzeitig in x_0 stark stetig sein, da sonst $\boldsymbol{A}(x)$ in x_0 stark stetig wäre. Wir können im folgenden annehmen, daß A auch noch selbstadjungiert ist.

c) Jede selbstadjungierte Operation A läßt sich bekanntlich als Differenz zweier positiv semidefiniter Operationen A^+ und A^- darstellen mit $A^+ A^- = 0$ (dies folgt ohne weiteres aus Satz 6). Es ist $A = A^+ - A^-$ und daher kann nicht gleichzeitig $\boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{C}(x)$ in x_0 stark stetig sein $\big(A^+ \approx \boldsymbol{B}(x)$ und $A^- \approx \boldsymbol{C}(x)\big)$. Da x_0 nach Annahme regulär ist, ist $\boldsymbol{B}(x_0)\, \boldsymbol{C}(x_0) = 0$. Wegen $\boldsymbol{B}(x_0) - \boldsymbol{C}(x_0) = \boldsymbol{A}(x_0) = 0$ ist $\boldsymbol{B}(x_0) = \boldsymbol{C}(x_0)$. Es ist also $\boldsymbol{B}(x_0)\, \boldsymbol{B}(x_0) = 0$. Ferner ist $\boldsymbol{B}(x_0)$ selbstadjungiert, da A^+ es ist. Es gilt nun $0 = \big(\boldsymbol{B}(x_0)^2 f, f\big) = \big(\boldsymbol{B}(x_0) f, \boldsymbol{B}(x_0) f\big) = |\boldsymbol{B}(x_0) f|^2$ für alle $f \in \mathfrak{H}'$. Es ist also $\boldsymbol{B}(x_0) = \boldsymbol{C}(x_0) = 0$. Wir können also sogar annehmen, daß A noch positiv semidefinit ist.

d) Da A positiv semidefinit ist, ist auch $\boldsymbol{A}(x)$ positiv semidefinit, denn $\big(\boldsymbol{A}(x_1) f, f\big) \gneqq 0$ hat $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \gneqq 0$ in einer ganzen Umgebung $U(x_1)$ von x_1 zur Folge. Man kann $U(x_1)$ so wählen, daß $\int\limits_{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big)\, d\mu \gneqq 0$. Dann ist für $g = \chi_{U(x_1)} \boldsymbol{I}(x) f$ nun $(A g, g) = \int\limits_{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) \boldsymbol{I}(x) f, \boldsymbol{I}(x) f\big)\, d\mu = \int\limits_{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big)\, d\mu \gneqq 0$. A wäre also nicht positiv semidefinit (Widerspruch). Wir können noch annehmen, daß $\|A\| \leq 1$ ist; dann ist auch $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq 1$. Für positiv semidefinite Transformationen mit $\|B\| \leq 1$ gilt allgemein $(Bf, f) \geq (Bf, Bf) = (B^2 f, f)$. (Dies kann man auch leicht aus Satz 6 folgern.) Es gilt also auch $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \geq \big(\boldsymbol{A}(x) f, \boldsymbol{A}(x) f\big) = \big(\boldsymbol{A}(x)^2 f, f\big)$. Da $\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in x_0 ist, gilt $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \to \big(\boldsymbol{A}(x_0) f, f\big) = 0$ für $x \to x_0$. Wegen $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \geq \big(\boldsymbol{A}(x) f, \boldsymbol{A}(x) f\big) \geq 0$ gilt auch $\boldsymbol{A}(x) f \to \boldsymbol{A}(x_0) f = 0$, d.h. $\boldsymbol{A}(x)$ ist stark stetig in x_0 (Widerspruch). x_0 kann also kein regulärer Punkt sein.

Satz 13. *Ein Punkt x_0 ist regulär, wenn x_0 isoliert ist in $X_{\mathfrak{M}}$ oder der Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_{x_0}$ endlich-dimensional ist. Alle anderen regulären Punkte bilden eine nirgends-dichte Menge.*

Beweis. 1. Ist x_0 isoliert, so ist $A(x)$ natürlich stark stetig in x_0. Nach Lemma 16 ist x_0 regulär. Ist $\mathfrak{H}_{x_0}$ endlich-dimensional, so gibt es eine ganze Umgebung $U(x_0)$ von x_0 mit $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$. Es gibt wegen der Stetigkeit der f_k [vgl. (18)] eine Umgebung U' von x_0 mit $K_x > K_{x_0}$ für alle $x < U'$. Gäbe es in jeder Umgebung U von x_0 mit $U < U'$ ein x_U mit $K_{x_U} \neq K_{x_0}$, so könnte man wegen der Stetigkeit der f_k $x_U \in U \cap M_0$ ($M_0 = \cup \{M_u : E_u \neq 0\}$ vgl. S. 166) wählen. Es ist dann $K_{x_U} = K_u \supsetneq K_{x_0}$. Es sei $u_0 = \min \{u : K_{x_U} = K_u\}$. Dann ist $K_{u_0} \supsetneq K_{x_0}$, da Kardinalzahlen wohlgeordnet sind. Es sei $k_0 \in K_{u_0}$ und $k \notin K_{x_0}$. Dann ist $f_{k_0}(x_0) = 1$, da $f_{k_0}(x_U) = 1$ für alle x_U (wegen $K_{x_U} > K_{u_0}$) und f_{k_0} stetig ist. Also $k_0 \in K_{x_0}$ (Widerspruch). Es gibt also eine Umgebung $U(x_0)$ mit $K_x = K_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$, d.h. $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$. Da in endlich-dimensionalen Räumen starke und schwache Stetigkeit dasselbe sind, ist die Verengung von $A(x)$ auf $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ stark stetig, und da $A(x)$ auf $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ die Nulltransformation ist, ist $A(x)$ in x_0 stark stetig. Wiederum ist nach Lemma 16 x_0 ein regulärer Punkt.

2. Die Menge M aller isolierten Punkte und aller Punkte mit endlich-dimensionalen $\mathfrak{H}_x$ ist offen. Es genügt daher zu zeigen, daß die regulären Punkte in $X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}$ eine nirgends-dichte Menge bilden. Es sei $M'_{j,u} = (X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) \cap M_{j,u}$ [13]), dann ist $M'_{j,u} \in \mathfrak{R}_0$ und $\cup M'_{j,u}$ offen. Wegen $\sup \{E(M'_{j,u}) : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) \sup \{E(M_{j,u}) : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) I = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M})$ und (7) ist $\cup \{M'_{j,u} : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}$. Es genügt daher zu zeigen, daß $M'_{j,u}$ keine regulären Punkte enthält.

Es sei $x_0 \in M'_{j,u}$. Wir betrachten nun Systeme von paarweise fremden, nicht leeren Teilmengen von $M'_{j,u}$, die aus $\mathfrak{R}_0$ stammen und x_0 nicht enthalten. Da $E(M'_{j,u})$ separabel ist, sind alle diese Systeme abzählbar oder endlich. Nach dem Zornschen Lemma gibt es maximale Systeme dieser Art. Ein maximales System kann nicht endlich sein, denn wäre $\{U_\nu : \nu = 1, \ldots, n\}$ ein maximales System, dann wäre $U = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu$ und $U < M'_{j,u}$. Die offene Menge $M'_{j,u} - U$ müßte gleich $\{x_0\}$ sein, da sonst unser System nicht maximal wäre; x_0 wäre also isoliert (Widerspruch).

Es sei nun $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ ein maximales System. Es ist $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U} = M'_{j,u}$. Wäre dies nicht der Fall, so wäre $M'_{j,u} - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ eine offene nicht leere Menge, die nicht aus dem Punkt x_0 allein besteht, da dieser Punkt nicht isoliert ist. Also könnte man das maximale System $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ noch erweitern (Widerspruch).

Da u eine unendliche Kardinalzahl ist (sonst wäre $M'_{j,u} < M$), gibt es eine Folge $\{i_\nu\}$ von paarweise verschiedenen $i_\nu \in K_u$; also ist $e_{i_\nu} \in \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für alle $x \in M'_{j,u}$. Wir betrachten nun das Feld von Transformationen $A(x)$ mit

$$A(x)\, e_{i_1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{U_\nu}(x)\, e_{i_\nu}, \qquad A(x)\, e_i = 0 \quad \text{für alle } i \neq i_1.$$

[13]) Zu $M_{j,u}$ s. S. 167.

$\boldsymbol{A}(x)$ erfüllt (27). (27) 1. folgt aus $e_{i_\nu} \in \mathfrak{H}_x$ für alle $x \in M'_{j,u}$. (27) 3. folgt aus $\boldsymbol{A}(x) e_{i_1} = e_{i_\nu}$ für $x \in U_\nu$, sonst $= 0$; also ist $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq 1$. $(\boldsymbol{A}(x) e_i, e_k)$ ist stetig, denn $(\boldsymbol{A}(x) e_i, e_k) = 0$ für $i \neq i_1$ oder $k \neq i_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $(\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}, e_k) = \chi_{U_\nu}(x)$ für $k = i_\nu$. χ_{U_ν} ist stetig wegen $U_\nu \in \mathfrak{R}_0$. Wegen $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq 1$ ist dann auch $(\boldsymbol{A}(x) f, g)$ stetig für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$ (vgl. S. 173). $\boldsymbol{A}(x)$ ist also schwach stetig.

$\boldsymbol{A}(x)$ ist aber nicht stark stetig in x_0. Es ist $\boldsymbol{A}(x_0) = 0$, da $x_0 \notin U_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots$, und $|\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}| = 1$ für $x \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. Jede Umgebung von x_0 enthält Punkte aus $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$, da $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu} = M'_{j,u}$. Es kann also $|\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}|$ nicht gegen Null konvergieren für $x \to x_0$ und damit erst recht nicht $\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}$ gegen $\boldsymbol{A}(x_0) e_{i_1} = 0$. $\boldsymbol{A}(x)$ ist nicht stark stetig in x_0. Da $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt, gibt es ein $A \in \mathfrak{M}'$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$. x_0 ist also nicht regulär, w. z. b. w.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen einfachen Bemerkungen über die Menge der Transformationen aus $\mathfrak{M}'$, deren stetige Zerlegungen in allen Punkten von $X_{\mathfrak{M}}$ stark stetig sind. Mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Menge der Transformationen aus $\mathfrak{M}'$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, für die $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}^*(x)$ in allen Punkten von $X_{\mathfrak{M}}$ stark stetig sind. $\mathfrak{N}$ hat folgende Eigenschaften:

1. Mit A und B gehören auch $\lambda A + \mu B$, A^* und AB zu $\mathfrak{N}$.

2. $\mathfrak{N}$ ist abgeschlossen gegen Normkonvergenz, d.h. aus $A_\nu \in \mathfrak{N}$ $\nu = 1, 2, \ldots$ und $\|A - A_\nu\| \to 0$ für $\nu \to \infty$ folgt $A \in \mathfrak{N}$.

3. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'$.

Beweis. Zu 1.: Wir beweisen nur die Behauptung für AB. Die anderen Behauptungen sind offensichtlich richtig. Es gilt

$$|\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x) f - \boldsymbol{A}(x_0)\boldsymbol{B}(x_0) f| \leq |(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\boldsymbol{B}(x_0) f| + |\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{B}(x_0)) f|$$
$$\leq |(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\boldsymbol{B}(x_0) f| + \|A\| \, |\boldsymbol{B}(x) f - \boldsymbol{B}(x_0) f|.$$

Für $x \to x_0$ gehen wegen der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)$ die beiden letzten Ausdrücke gegen Null; also ist $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$ stark stetig in x_0. Nach Lemma 17 ist $AB \approx \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$. Da $(AB)^* = B^* A^* \approx \boldsymbol{B}^*(x)\boldsymbol{A}^*(x)$ ebenfalls stark stetig ist, ist $AB \in \mathfrak{N}$.

Zu 2.: Aus $\|A - A_\nu\| < \varepsilon$ folgt nach Satz 3 $\|\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}_\nu(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Also ist $|\boldsymbol{A}_\nu(x) f - \boldsymbol{A}(x) f| \leq \varepsilon |f|$, falls nur ν hinreichend groß ist. Aus $|\boldsymbol{A}(x) f - \boldsymbol{A}(x_0) f| \leq |\boldsymbol{A}(x) f - \boldsymbol{A}_\nu(x) f| + |\boldsymbol{A}_\nu(x) f - \boldsymbol{A}_\nu(x_0) f| + |\boldsymbol{A}_\nu(x_0) f - \boldsymbol{A}(x_0) f|$ und der starken Stetigkeit der $\boldsymbol{A}_\nu(x)$ folgt die starke Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$. Da $\|A_\nu^* - A^*\| = \|A_\nu - A\|$, ist auch $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig. Es ist daher $A \in \mathfrak{N}$.

Zu 3.: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ folgt aus Satz 4 und der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$. $A \in \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}'$ hat nach Definition $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{N}$ zur Folge. Nach dem Beweis des Korollar von Satz 3 erfüllt $\boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x)$ (27) für alle beschränkten, linearen Transformationen C in $\mathfrak{H}'$. Es gibt also ein $C' \in \mathfrak{M}'$ mit $C' \approx \boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x)$. Wegen (41) gehört C' sogar zu $\mathfrak{N}$. Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, dann gilt wegen $A \in \mathfrak{N}'$ und $C' \in \mathfrak{N}$ und Lemma 15

$$\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x)$$

für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Wählen wir insbesondere für C eine Transformation B_{x_0}, die $\mathfrak{H}_{x_0}$ invariant läßt und $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ in die Null abbildet, dann ist $\boldsymbol{A}(x_0) B_{x_0} = B_{x_0} \boldsymbol{A}(x_0)$, da $\boldsymbol{I}(x_0) B_{x_0} \boldsymbol{I}(x_0) = B_{x_0}$. Beschränken wir die Transformationen von $\mathfrak{H}'$ auf $\mathfrak{H}_{x_0}$, dann gilt $A'(x_0) B'_{x_0} = B'_{x_0} A'(x_0)$ für alle Transformationen B'_{x_0} in $\mathfrak{H}_{x_0}$. Es ist daher $A'(x_0) = \alpha(x_0) I'_{x_0}$ (I'_{x_0} = identische Transformation in $\mathfrak{H}_{x_0}$) und damit $\boldsymbol{A}(x_0) = \alpha(x_0) \boldsymbol{I}(x_0)$. Da dies für alle $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ gilt, ist $A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$, d.h. $A \in \mathfrak{M}''$. Es ist also $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}''$. Aus $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$ folgt $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{N}'$. Also ist $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

Anhang: Nirgends-dichte und magere Mengen in $X_{\mathfrak{M}}$

Ist $X_{\mathfrak{M}}$ der zu einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ gehörige topologische Raum, dann ist *jede magere Menge nirgends-dicht*. In $X_{\mathfrak{M}}$ bedeutet also mager und nirgends-dicht dasselbe.

Beweis. N sei eine magere Menge in $X_{\mathfrak{M}}$ und $\{E_j : j \in J\}$ eine separable Basis von I in $\mathfrak{M}$. Es sei $E_j = E(M_j)$ mit $M_j \in \mathfrak{K}_0$. Die M_j sind paarweise fremd, $M = \bigcup \{M_j : j \in J\}$ ist offen und $\overline{M} = X_{\mathfrak{M}}$ [nach (7)].

a) N ist nach dem Beweis von Lemma 9 nirgends-dicht, wenn $N_j = N \cap M_j$ in M_j nirgends-dicht ist für alle $j \in J$.

b) In M_j können wir ein endliches Maß $\mu_j | \mathfrak{K}_j$ einführen [vgl. (15)]. Wir verengen dieses Maß auf den σ-Körper $\mathfrak{K}'_j$ aller Borel-Mengen in $\mathfrak{K}_j$. Das ist der kleinste σ-Körper, der alle kompakten Teilmengen von M_j enthält. Wir zeigen, daß das Maß $\mu_j | \mathfrak{K}'_j$ regulär ist (s. [4], S. 224). Es genügt

$$\mu_j(U) = \sup \{\mu_j(C) : C \text{ kompakt und } U \supset C\} \tag{42}$$

für alle offenen Mengen $U \subset M_j$ zu beweisen (nach [4], S. 228, Theorem F). Es sei $U \subset M_j$ und U offen. Ferner sei $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ ein maximales System von nicht leeren, paarweise fremden Mengen U_ν mit $U_\nu \in \mathfrak{K}_0$ und $U_\nu \subset U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es solche maximalen Systeme, und da $E(M_j)$ separabel ist, sind diese Systeme endlich oder abzählbar (dies haben wir bereits mit der Bezeichnung $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ vorweggenommen). Es ist $\mu_j(U) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(U_\nu) = \mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right) = \mu_j\left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}\right)$, da $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$ offen ist und nirgends-dichte Mengen das μ_j-Maß Null haben. Wäre $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu} \not\supset U$, dann wäre die offene Menge $U - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ nicht leer und man könnte $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ erweitern. Es ist also $U \subset \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ und $\mu_j(U) \leq \mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right)$. Insgesamt haben wir $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(U_\nu) = \mu_j(U)$. Ist das System $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ endlich, dann ist $\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu = \overline{\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu}$[14]) kompakt und wegen $\mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu\right) = \mu_j(U)$ ist (42) erfüllt. Ist das System unendlich, so ist

[14]) Ist $\{U_\nu : = 1, 2, \ldots\}$ endlich, dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}$ durch $\sum_{\nu=1}^{n}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{n}$ zu ersetzen.

$U_n' = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu$ kompakt und $\sup\{\mu_j(U_n'): n=1,2,\ldots\} = \sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\mu_j(U_\nu): n=1,2,\ldots\right\}$ $= \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_j(U_\nu) = \mu_j(U)$, also ist (42) erfüllt. Da $\mu_j/\mathfrak{R}_j$ regulär ist, gilt der Satz von LUSIN (vgl. [4], S. 242).

c) Wegen a) genügt es zu zeigen, daß eine magere Menge $N_j < M_j$ in M_j nirgends-dicht ist. Es ist $N_j = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$ mit nirgends-dichten N_ν. Dann ist auch $\overline{N}_\nu$ nirgends-dicht und $N_j' = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{N}_\nu$ ist mager. N_j' ist eine Borel-Menge mit $N_j' > N_j$. Es genügt zu zeigen, daß N_j' nirgends-dicht ist. $\chi_{N_j'}$ ist Borel-meßbar in M_j, also gibt es nach dem Satz von LUSIN zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge C_ε, auf der $\chi_{N_j'}$ stetig ist, mit $\mu_j(M_j - C_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Wegen $\mu_j(M_j - C_\varepsilon) = \mu_j(\overline{M_j - C_\varepsilon})$ können wir C_ε aus $\mathfrak{R}_0$ wählen. $D_\varepsilon = M_j - C_\varepsilon$ gehört dann ebenfalls zu $\mathfrak{R}_0$. Da $\chi_{N_j'}$ stetig auf C_ε ist und nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist $\{x: x \in C_\varepsilon \text{ und } \chi_{N_j'}(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0$. Da $\mu_j(N_j') = 0$, hat diese Menge das μ_j-Maß Null; also ist sie nach (17) leer. Dann ist $N_j' < D_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist $N_j' < \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{1/n} = D$. D ist abgeschlossen, da alle $D_{1/n}$ abgeschlossen sind, und $\mu_j(D) = 0$, da $\mu_j(D) \leq \mu_j(D_{1/n}) \leq 1/n$ für $n = 1, 2, \ldots$. D hat keine inneren Punkte, sonst gäbe es ein $U_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $U_0 < D$ und U_0 nicht leer und es wäre $0 < \mu_j(U_0) \leq \mu_j(D) = 0$ (Widerspruch). Also ist D eine nirgends-dichte Menge und damit auch N_j' und erst recht N_j, w. z. b. w.

Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, Vol. 25, New York 1948, Revised Edition. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale (Fascicule de Résultats). Paris: Hermann & Cie. 1953. — [3] GODEMENT, R.: Sur la théorie des representations unitaires. Ann. of Math. **53**, 68—124 (1951). — [4] HALMOS, P.: Measure Theory. New York: Van Nostrand Comp. 1950. — [5] HALMOS, P.: Introduction to the Hilbert-space. New York: Chelsea Publishing Comp. 1951. — [6] LOOMIS, L.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: Van Nostrand Comp. 1953. — [7] NAGY, B. v. Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Ergeb. d. Math., Bd. 5, H. 5. Berlin: Springer 1942. — [8] NAKANO, H.: Modern spectral theory. Tokyo: Maruzen Co. 1950. — [9] NEUMANN, J. v.: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Annalen **102**, 370—427 (1930). — [10] NEUMANN, J. v.: On rings of operators. Reduction theory. Ann. of Math. **50**, 401—485 (1949). — [11] STONE, M. H.: The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936). — [12] WALLMAN, H.: Lattices and topological spaces. Ann. of Math. **39**, 112—136 (1938).

Im Literaturverzeichnis sind nur Bücher und Arbeiten aufgeführt, auf die in dieser Arbeit direkt Bezug genommen wird. Weitere Literaturhinweise findet man in der angegebenen Literatur, vor allem in [6].

Mathematisches Institut der Universität München

(Eingegangen am 28. Dezember 1956)

CHIH-HAN SAH
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 189—204 (1957)

On a generalization of finite nilpotent groups

By
CHIH-HAN SAH

1. Introduction. SCHMIDT [4] and IWASAWA [3] had shown that a group (by which we mean a finite group), all of whose proper subgroups are nilpotent (such a group will be called an *SI*-group), is itself soluble. IWASAWA also proved that unless the order of an *SI*-group is divisible by exactly two distinct primes, it is even nilpotent [3; p. 2, Theorem 2]. In this paper, we shall extend the solubility property of *SI*-groups to a wider class of groups—the class of all semi-nilpotent groups.

A group G is called a semi-nilpotent group if it satisfies either of the following two equivalent conditions:

(A) If K is a non-normal nilpotent subgroup of G, then the normalizer of K in G is nilpotent.

(B) If P is a non-normal primary subgroup of G, then the normalizer of P in G is nilpotent.

It is clear that (B) is a consequence of (A). To show that (B) implies (A), we let K be a non-normal nilpotent subgroup of G. Then, for some prime p, the p-Sylow subgroup K_p of K is not normal in G. But from the fact that K_p is a characteristic subgroup of K, we see that K_p is a normal subgroup of the normalizer N of K in G. This means that N is a subgroup of the normalizer of K_p in G. By (B), this latter group is nilpotent, therefore, N is nilpotent and (A) holds in G.

From this definition, we see that all *SI*-groups are semi-nilpotent. Moreover, groups satisfying the condition (NP), to be called NP-groups, are also semi-nilpotent.

(NP) If P is a non-normal primary subgroup of G, then the normalizer of P in G is also a primary subgroup.

Before we summarize our results in the Main Theorem, we shall recall two nilpotent characteristic subgroups of a group which are important throughout the discussion.

Let G be a group, then the Fitting subgroup $F(G)$ of G is defined to be the product of all the normal nilpotent subgroups of G. $F(G)$ is a nilpotent characteristic subgroup of G; indeed, it is the largest nilpotent normal subgroup of G. We may also define $F(G)$ as the product of all the normal primary subgroups of G, or as the direct product of all the subgroups S_G, where S ranges over a complete representative set of Sylow subgroups of G and $S_G = \bigcap_{x \in G} x^{-1} S x$. Furthermore, we may write $F(G)$ as the direct product $F_0(G) \otimes F_1(G)$, where $F_0(G)$ is the direct product of all the primary components

of $F(G)$ which are Sylow subgroups of G and $F_1(G)$ is the direct product of all the remaining primary components of $F(G)$. It is clear that $F_0(G)$ is the direct product of all the distinct normal Sylow subgroups of G. From this we see that the order of $F_0(G)$ and the index of $F_0(G)$ in G are relatively prime; of course $F_0(G)$ is soluble. By a theorem of SCHUR-WITT-ZASSENHAUS [8; p. 132, Theorem 27], G splits over $F_0(G)$ and all complements of $F_0(G)$ in G are conjugate in G.

Again let G be a group, then the hypercenter $H(G)$ of G is defined to be the terminal member of the ascending central chain of the group G. $H(G)$ is a nilpotent characteristic subgroup of the group G. From a result of BAER [1; p. 40, Theorem 2''], we get that a normal p-subgroup N of the group G is part of $H(G)$ if, and only if the index in G of the centralizer of N in G is a power of p, where p is a prime. We also notice that a subgroup A of the group G is nilpotent if, and only if $H(G)A$ is nilpotent. The sufficiency of this condition is obvious. The necessity follows from the fact that the ascending central chain of G when connected with the ascending central chain of $H(G)A/H(G)$ is a central chain of the group $H(G)A$. From this we see that $H(G)$ is part of every maximal nilpotent subgroup of the group G.

We now collect the main properties of semi-nilpotent groups into the following:

MAIN THEOREM. If G is a semi-nilpotent group, then,

(A) $G/F(G)$ is cyclic.

(B) $F(G)=F_0(G)\,H(G)$.

(C) If G is not nilpotent, then $\{F(G)\}$ and {normalizers of non-normal Sylow subgroups of G} are the complete conjugate classes of maximal nilpotent subgroups of G. Moreover, if A and B are two distinct members of the second class, then $G=F(G)A=F(G)B$ and $H(G)=F(G)\cap A=F(G)\cap B=A\cap B$.

(A) shows that semi-nilpotent groups are cyclic extensions of nilpotent groups, hence are themselves soluble groups. (B) shows that in a semi-nilpotent group G, a maximal normal primary subgroup is either a Sylow subgroup of G or is part of the hypercenter $H(G)$. (A) and (B) show that unless G is the trivial group, both $F(G)$ and $F_0(G)$ are non-trivial for a semi-nilpotent group G. Finally, (A) and (C) show that for any two non-normal Sylow subgroups of a semi-nilpotent group G, their normalizers in G are conjugate maximal nilpotent subgroups, and are cyclic extensions of the subgroup $H(G)$.

From the first remark in the preceding paragraph we see that all SI-groups are soluble; thus, we obtain the theorem of SCHMIDT and IWASAWA as a corollary.

The remaining part of our investigation is devoted to a study of the structure of semi-nilpotent groups and of NP-groups. It will be shown that the structure of a semi-nilpotent group with a trivial center depends on the extension of a primary group P by a cyclic group A, where every non-trivial element of A induces an automorphism in P leaving only the identity of P fixed. For convenience, we shall call an automorphism of a group G an

F-automorphism, when it leaves only the identity element of G fixed. If a group A of automorphisms of G has the property that every non-trivial element of A is an F-automorphism of G, then we shall say that A is a group of F-automorphisms of G. If G and A are related in such fashion, then the extension of G by A effected by embedding G and A into the holomorph of G is called an F-pair and written as (G, A). In terms of these definitions, we see that the structure of a semi-nilpotent group with trivial center depends on a primary group P and the extension of P by a cyclic group A of F-automorphisms of P. If a semi-nilpotent group has a non-trivial center, then its structure may depend on the extension of a primary group by a cyclic primary group belonging to the same prime. In such cases, we know very little about the general structure of the semi-nilpotent group. However, we will see that somewhat better structure theorems may be obtained for NP-groups in general.

2. *Notations.* $H \leq G$ denotes that H is a subgroup of G. $H < G$ denotes that H is a proper subgroup of G. $H \lhd G$ means that H is a normal subgroup of G. $H^x = x^{-1}Hx$ is the set of all the elements of the form $y^x = x^{-1}yx$, where y ranges over the subgroup H. $N(H<G)$ is normalizer of H in G, which consists of all the elements x in G such that $H^x = H$. $C(H<G)$ is the centralizer of H in G, which consists of all the elements x in G such that $y^x = y$ for each element y of H. $Z(G)$ will denote the center of the group G. If N is a nilpotent group, then N_p will be used to denote the p-component of N; it is also the unique p-Sylow subgroup of N. If A is a subgroup of the group G, then $A_G = \bigcap_{x \in G} A^x$ is the largest normal subgroup of G which is part of A. We will use $\prod$ and $\otimes$ to denote direct product of groups. $\{s, \ldots, t\}$ will denote the subgroup generated by the elements $s, \ldots, t$ of the group G. $[G:H]$ will denote the index of the subgroup H in the group G. $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, and $[K, H]$ is the subgroup generated by the set of all $[x, y]$, where x and y range over the subsets K and H in the group G respectively.

3 *A theorem of Frobenius.* Throughout our discussion, a theorem of FROBENIUS and some of its consequences will be used. For convenience, we shall list these results in this section.

THEOREM OF FROBENIUS. If G is a group, $A \leq G$ such that $A = N(A<G)$, and $A^x \cap A = 1$ for each element x not in A, then, the set of elements in G, not contained in any subgroup conjugate to A, together with the identity element of G form a normal subgroup H of G.

A proof of this theorem may be found in SPEISER [6; p. 202, Theorem 180]. Although all known proofs of this theorem involve the use of group characters, SHAW [5] has given a simple proof under the additional hypothesis that A is soluble. For our purposes, A will not only be soluble, it will even be nilpotent.

If G, A, and H are related as stated in the theorem of FROBENIUS, then the following propositions hold:

Proposition A. $G = HA$.

Proposition B. A induces a group of F-automorphisms in H, hence $Z(G) = 1$.

Proposition C. $([H:1], [A:1]) = 1$, hence a nilpotent subgroup of G either is part of H or has order dividing $[A:1]$.

Proposition D. Any Sylow subgroup of A either is a cyclic group or is a generalized quaternion group.

Proposition E. If $[A:1]$ is even, then H is abelian and every element of H is transformed into its inverse by the element of order 2 in A. If $[A:1]$ is odd, then A is soluble. Thus, in all cases, the complements of H in G are conjugate to A in G.

Proposition F. $H = [G, H]$. If H is nilpotent, then $H = F(G)$.

Proofs. Proposition A is clear, for it is easy to see that HA contains H and all the conjugates of A in G.

Proposition B. Since $H \lhd G$, therefore A induces a group of automorphisms of H. If $1 \neq x \in A$ and $y \in H$ such that $y^x = y$, then $x = x^y \in A \cap A^y$. Thus, by the hypothesis on A, $y \in H \cap A = 1$. Hence, A induces a group of F-automorphisms in H and obviously $Z(G) = 1$.

Proposition C. If we decompose H into conjugate classes with respect to A, then except the class containing only the identity element, each class contains exactly $[A:1]$ elements; thus, the first assertion holds. In fact, we may even write $[H:1] \equiv 1 \bmod [A:1]$. The second assertion now follows from the first assertion together with the hypothesis on H and A. For an element $x \neq 1$ in H and an element $y \notin H$ must have relatively prime orders; by the hypothesis on H and A, $[x, y] \neq 1$. But elements of relatively prime orders must commute in a nilpotent group, [8; p. 113, Theorem 11].

Proposition D. This follows from Proposition B and a result of BURNSIDE [2; p. 335]. More precisely, BURNSIDE had shown that, under our hypothesis, A contains no non-cyclic subgroup of order p^2, where p is any prime. Since the center of a non-trivial Sylow subgroup of A contains elements of order a prime, we see easily that a p-Sylow subgroup of A contains exactly one subgroup of order p. Our result now follows from Theorem 15 [8; p. 118]. It should be noted here that right after the result of BURNSIDE quoted above, BURNSIDE attempted to apply the same method to show that A is a nilpotent group [2; p. 336, Theorem V]. However, ZASSENHAUS [7; p. 198] pointed out that this latter conclusions is false. Unfortunately, the counter-example furnished by ZASSENHAUS contains some misprints. We shall give a modified version of ZASSENHAUS' counter-example here. Let H be the additive group of a vector space of dimension 3 over the prime field of order 43, and let A be the group of linear automorphisms of H generated by the following matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4^6 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{12} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4^7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Since, 4 is a primitive 21-root of unity, we see easily that $a^b = a^2$, $a^7 = b^{21} = 1$. It is also easy to see that A induces a group of F-automorphisms in H, and A is not nilpotent. (It is to be understood that entries of the matrices are reduced mod 43.)

Proposition E. A proof of the first assertion may be found in [7; p. 189]. By applying Theorem 10 [8; p. 145], the second assertion holds. Finally by Proposition C above and by a theorem of SCHUR-WITT-ZASSENHAUS [8; p. 132, Theorem 27], the last assertion holds.

Proposition F. Since $H \lhd G$, we see that $[G, H] \leq H$. Let $1 \neq x \in A$, then we consider the mapping of H into $[G, H]$ induced by sending each element y of H onto the element $[x, y]$ of $[G, H]$. By Proposition B, x induces an F-automorphism in H; hence, $[x, y] = 1$ if and only if $y = 1$. It is now easy to see that $[x, y] = [x, z]$ implies that $[x, yz^{-1}] = 1$, where $y, z \in H$. Thus, $[G, H]$ contains at least as many elements as H. Combining this with the result that $[G, H] \leq H$, we have that $[G, H] = H$. The second assertion is an obvious consequence of Proposition C. It is interesting to notice that, if A is nilpotent, then H is the terminal member of the descending central chain of G. This follows immediately from the first assertion and a result of BAER [1; p. 36, (9)]. However, we will not make use of this fact during our discussion.

4. Maximal nilpotent subgroups of a semi-nilpotent group. Unless otherwise stated, we shall assume that G is a semi-nilpotent group throughout this section.

LEMMA 4.1. If A and B are two distinct maximal nilpotent subgroups of G, then $A \cap B = A_G \cap B_G \lhd G$.

Proof. It is obvious that $A_G \cap B_G \leq A \cap B$. We next fix A and choose $C \neq A$ to be a maximal nilpotent subgroup of G such that $A \cap B \leq A \cap C = D$ and D is maximal with respect to this latter property. We assert that $D \lhd G$. For if $D \not\lhd G$, then $N(D < G)$ would be nilpotent. We may then take T to be a maximal nilpotent subgroup of G such that $N(D < G) \leq T$. Now $D < A$ and A is nilpotent would imply that $N(D < A) > D$, by Theorem 10 [8; p. 111]. Hence, $T \cap A \geq N(D < G) \cap A = N(D < A) > D$, and by the choice of D we would have $T = A$. By a similar argument, we would then get that $D = A \cap C = T \cap C \geq N(D < G) \cap C = N(D < C) > D$. From this contradiction, we get $D \lhd G$. Thus, $D \leq A_G$, hence, $A \cap B \leq A_G$. By symmetry of A and B, we then have $A \cap B \leq A_G \cap B_G$. Therefore, $A \cap B = A_G \cap B_G \lhd G$. Q. E. D.

LEMMA 4.2. If S is a nilpotent subgroup of G such that $([G : S], [S : 1]) = 1$, and if $P \lhd S$ but $P \not\lhd G$, then $N(P < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G. On the other hand, if A is a maximal nilpotent subgroup of G, $B \lhd A$, and $B \not\lhd G$, then $A = N(B < G)$. In addition, if $([A : B], [B : 1]) = 1$, and $B_p \not\lhd G$ for each prime p, $p \mid [B : 1]$, then $([G : B], [B : 1]) = 1$.

Proof. Let S and P satisfy the first hypothesis. Since $P \not\lhd G$, $N(P < G)$ is therefore nilpotent. Let T be any nilpotent subgroup of G such that $N(P < G) \leq T$, then $P \lhd S$ implies that $S \leq N(P < G) \leq T$. From T is nilpotent and $([G : S], [S : 1]) = 1$, we conclude that S is a direct factor of T. Hence, $P \lhd T$ and $T \leq N(P < G)$. Therefore, $T = N(P < G)$ and $N(P < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G.

If A is a maximal nilpotent subgroup of G, $B \lhd A$, and $B \not\lhd G$, then $N(B < G)$ is nilpotent and $A \leq N(B < G)$. By the maximal nilpotency of A,

we see that $A = N(B < G)$. Finally, if $([A:B], [B:1]) = 1$ and $B_p \lhd G$ for each prime p, $p \mid [B:1]$, then $B_p = A_p$ by the choice of B. Applying the preceding result, we have $A = N(B_p < G)$. Let S be a p-Sylow subgroup of G such that $B_p \leq S$, then we have that $N(B_p < S) = N(B_p < G) \cap S = A \cap S = A_p = B_p$. Thus, B_p must be equal to the p-Sylow subgroup S of G. From this we get $([G:B], [B:1]) = 1$. Q. E. D.

COROLLARY. If A is a maximal nilpotent subgroup of G and $x \notin A$, then $A \cap A^x = A_G$. If S is a nilpotent subgroup of G such that $([G:S], [S:1]) = 1$ and $x \notin N(S < G)$, then $S_G = S \cap S^x = [N(S < G)]_G \cap S$.

Proof. Let A be a maximal subgroup of G. If $A \lhd G$, then $A \cap A^x = A = A_G$. If $A \not\lhd G$, then by Lemma 4.2, A and A^x are distinct maximal nilpotent subgroups of G. By Lemma 4.1, we then have $A \cap A^x = A_G$.

Let S be a nilpotent subgroup of G such that $([G:S], [S:1]) = 1$, and $x \notin N(S < G)$, then applying Lemma 4.2 to S we get that $N(S < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G. Since S is a characteristic subgroup of $N(S < G)$ and $S \not\lhd G$, therefore $N(S < G)$ is its own normalizer in G. From the hypothesis on S, it is clear that the p-component of S is the p-component of $N(S < G)$. From Lemma 4.2 applied to $N(S < G)$, we see that the p-component of $N(S < G)$ is either a normal subgroup of G or a p-Sylow subgroup of G; since $N(S < G)$ is nilpotent, we get the result $S_G = [N(S < G)]_G \cap S$. From this we obtain $S \cap S^x = [N(S < G)] \cap [N(S^x < G)] \cap S \cap S^x = [N(S < G)] \cap [N(S < G)]^x \cap S \cap S^x = [N(S < G)]_G \cap S \cap S^x = S_G \cap S^x = S_G$. Q. E. D.

LEMMA 4.3. If A is a maximal nilpotent subgroup of G, then there is a unique subgroup A' of G satisfying the following conditions:

(a) $A' \lhd G$.

(b) $A'A = G$.

(c) $A' \cap A = A_G$.

(d) $A' \geq F(G)$.

Proof. If $A \lhd G$, then G is a subgroup satisfying all the conditions in the lemma. From $A \lhd G$, we have that $A' \cap A = A_G = A$, or $A \leq A'$. Thus, (b) shows that G is the only subgroup that will satisfy all four conditions. If $A \not\lhd G$, then by Lemma 4.2, we have that $N(A/A_G < G/A_G) = N(A < G)/A_G = A/A_G$. From Corollary of Lemma 4.2, we have $A^x/A_G \cap A/A_G = 1$ for $x \notin A$. Now applying the theorem of FROBENIUS to the group G/A_G, we get that there is a unique subgroup A' of G satisfying the conditions (a), (b), and (c). Let P be a normal p-subgroup of G. If $P \leq A_G$, then $P \leq A'$. If $P \not\leq A_G$, then $A_G P/A_G$ is a normal p-subgroup of G/A_G. From Proposition C and the fact that A/A_G contains only the trivial normal subgroup of G/A_G, we see that $A_G P/A_G \leq A'/A_G$. Consequently, $P \leq A'$. Since $F(G)$ is the product of all such subgroups P for different primes, we get that $F(G) \leq A'$. Q. E. D.

THEOREM 1. If G is a semi-nilpotent group, then $G/F_0(G)$ is nilpotent.

Proof. We shall first show that $G/F(G)$ is nilpotent. Let $\{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ be a representative set of the set of all non-normal Sylow subgroups of G. If this set is empty, then G is nilpotent and we have nothing to prove. Assume

that $n \geq 1$, then by Lemma 4.2, $A_i = N(S_i < G) < G$ is a maximal nilpotent subgroup of G and $A_i = N(A_i < G)$, $1 \leq i \leq n$. By Lemma 4.3, there is a subgroup $A_i' \lhd G$ such that $A_i' A_i = G$, $A_i' \cap A_i = (A_i)_G$, and $A_i' \geq F(G)$, $1 \leq i \leq n$. Obviously, each G/A_i' is a nilpotent group, hence, $D = \prod_{1 \leq i \leq n} G/A_i'$ is also nilpotent. We now map G into D by sending an element x onto the element $(A_1' x, \ldots, A_n' x)$. This map is a homomorphism with the kernel $K = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i' \geq F(G)$. If $K > F(G)$, then K is not nilpotent, for $F(G)$ is the largest nilpotent normal subgroup of G. Thus, for some prime p, there is a p-Sylow subgroup T of K such that $T \lhd K$. Hence, $T > T_G = [F(G)]_p$. Let S be a p-Sylow subgroup of G such that $T \leq S$. Then, $S \not\lhd G$, since $S_G = [F(G)]_p < S$. Thus, S is conjugate to some S_i, $1 \leq i \leq n$. Say, $S^x = S_i$. Then, by the Corollary of Lemma 4.2, we get that $S_G = T_G < T^x = (K \cap S)^x = K \cap S_i = K \cap A_i' \cap S_i = K \cap (S_i)_G = (S_i)_G = S_G$, where the third equality holds because $K \lhd G$. This contradiction shows that $K = F(G)$, hence $G/F(G)$ is nilpotent.

Next, we shall show that if A is a maximal nilpotent subgroup of G and $A \lhd G$, then $G = F(G) A$. From $A \lhd G$, we get that $A_p \lhd G$ for some prime p. By Lemma 4.2, A_p is a p-Sylow subgroup of G and $A = N(A_p < G)$. Since $F(G) A_p / F(G)$ is a p-Sylow subgroup of the nilpotent group $G/F(G)$, we see that $F(G) A_p \lhd G$. Then, from the fact that A_p is a p-Sylow subgroup of G, we have that $G = N(F(G) A_p < G) = F(G) N(A_p < G) = F(G) A$.

If we collect all the distinct primary components of A which are not normal in G and form their direct product B, then it is immediate that $G = F(G) B$. $([G:B], [B:1]) = 1$ now holds by Lemma 4.2. If P is a p-Sylow subgroup of G and $(p, [B:1]) = 1$, then from the fact that $G/F(G)$ is isomorphic with a factor group of B, we get that $F(G) P/F(G)$ is the identity subgroup. Thus P is the p-component of $F(G)$, or $P \lhd G$. From this we get that $G = F_0(G) B$; hence, $G/F_0(G)$ is nilpotent. Indeed, B is a complement of $F_0(G)$ in G. Q. E. D.

COROLLARY. If A is a maximal nilpotent subgroup of G such that $A \lhd G$, then $G = F(G) A$ and $F(G) \cap A = A_G$.

Proof. The first assertion has been proved above. For the second assertion, we have clearly that $A_G \leq F(G)$. Applying Lemma 4.3 to G, we have $A_G \leq F(G) \cap A \leq A' \cap A = A_G$. Indeed, by the uniqueness of A', we have that $A' = F(G)$. Q. E. D.

THEOREM 2. If G is a semi-nilpotent group, then:

(a) $F(G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G.

(b) If A is a maximal nilpotent subgroup of G and $A \not\lhd G$, then $A_G = H(G)$.

(c) The set, $\{N(S < G) \mid S$ is a non-normal Sylow subgroup of $G\}$, is the only complete set of conjugate maximal nilpotent subgroups of G outside of the set $\{F(G)\}$.

(d) If A is a maximal nilpotent subgroup of G and $A \not\lhd G$, then $G/H(G)$ is the F-pair $(F(G)/H(G), A/H(G))$.

Proof. If G is nilpotent, then (a) is trivial, while (b), (c), and (d) hold vacuously. Hence, we may assume that G is not nilpotent.

(a) Let A be a maximal nilpotent subgroup of G such that $A \lhd\!\!\!\neq G$. Such subgroup exists by Lemma 4.2 and the hypothesis that G is not nilpotent. Then by the Corollary of Theorem 1 and Lemma 4.3, we see that G/A_G is the F-pair $(F(G)/A_G, A/A_G)$. By Proposition C we see that if $T > F(G)$, then T/A_G is not nilpotent. Thus, T is not nilpotent, and $F(G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G.

(b) For each prime p, $(A_G)_p$ is a normal p-subgroup of the group G, since it is a characteristic subgroup of the normal subgroup A_G of the group G. If B and C are the p-complements in A and in $F(G)$ respectively, then $C \lhd G$, since C is a characteristic subgroup of the characteristic subgroup $F(G)$ of G. Furthermore, $CB \leq C((A_G)_p < G)$, since $(A_G)_p$ is part of the p-components of the nilpotent groups A and $F(G)$. Thus, $[G:C((A_G)_p < G)]$ is a divisor of $[G:CB]$. But, we have that $[G:CB] = [G:F(G)B][F(G)B:CB]$, and, by the Corollary of Theorem 1, that $G = F(G)A$. Hence, $[G:F(G)B] \mid [A:B]$ and $[F(G)B:CB] \mid [F(G):C]$. Since both $[A:B]$ and $[F(G):C]$ are powers of the prime p by the definition of B and C, we see that $[G:C((A_G)_p < G)]$ is a power of p. Therefore, $(A_G)_p \leq H(G)$ by a remark in the introduction. Since p is arbitrary, we see that $A_G \leq H(G)$. Since we already know that $H(G)$ is part of every maximal nilpotent subgroup, we also have that $H(G) \leq A_G$. Thus, $A_G = H(G)$.

(a) and (b) together give us the result (d) immediately.

(c) By Lemma 4.2, it is immediate that the set under consideration consists of exactly all the maximal nilpotent subgroups of G which are not normal subgroups of G. Let A be one of these subgroups, then (d) above and Proposition E give us the result (c) immediately. Q. E. D.

COROLLARY. $F(G) = F_0(G)\,H(G)$.

Proof. According to our decomposition of $F(G)$ into the direct product of $F_0(G)$ and $F_1(G)$ in the introduction, it suffices to show that $F_1(G) \leq H(G)$. Let P be a primary component of $F_1(G)$, then P is not a Sylow subgroup of the group G. Let S be a Sylow subgroup of G such that $P \leq S$, then $P = S_G < S$. Hence, $A = N(S < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of G and $A \lhd\!\!\!\neq G$, by Lemma 4.2. By Theorem 2 we then have $P \leq A_G = H(G)$, since $P \lhd G$. Thus, $F_1(G) \leq H(G)$, since p may be chosen arbitrarily. Q.E.D.

5. General structure of semi-nilpotent groups.

THEOREM 3. If G is a semi-nilpotent group, then every subgroup and every homomorphic image of G is semi-nilpotent.

Proof. Let G be a semi-nilpotent group and $K \leq G$. If S is a non-normal nilpotent subgroup of K, then S is a non-normal nilpotent subgroup of G. Hence, $N(S < G)$ is nilpotent and $N(S < K) = N(S < G) \cap K$ is also nilpotent. Therefore, K is semi-nilpotent.

By an inductive argument, we see that in order to prove the second assertion, it suffices to prove that G/M is semi-nilpotent, where M is a

minimal normal subgroup of the semi-nilpotent group G. By Theorem 1, G is soluble, therefore M is an elementary abelian p-group for some prime p by applying Theorem 2 [8; p. 81]. Let P/M be a non-normal primary subgroup of G/M, then, $N(P/M<G/M)=N(P<G)/M$. If P/M is a p-group, then P is a non-normal p-subgroup of G; hence, $N(P<G)$ is nilpotent and $N(P/M<G/M)$ is nilpotent. If P/M is a q-group, $q \neq p$, then $P=MQ$, where Q is a q-Sylow subgroup of P and $Q \not\lhd G$. Therefore $N(Q<G)$ is nilpotent and $N(P/M<G/M)=N(P<G)/M=MN(Q<G)/M$ is also nilpotent. Thus, G/M is semi-nilpotent. Q. E. D.

We will make the remark here that under the hypothesis that every proper subgroup and every proper homomorphic image of the group G is semi-nilpotent, we cannot conclude that G is semi-nilpotent. Indeed, G may not be soluble, as the alternating symmetric group on five symbols shows.

THEOREM 4. (a) If G is a semi-nilpotent group and $G=A \otimes B$, where B is not nilpotent, then A is either hamiltonian or abelian.

(b) Let H and K be semi-nilpotent groups of relatively prime orders, then, $H \otimes K=G$ is semi-nilpotent if, and only if either both H and K are nilpotent or at least one of the two is hamiltonian or abelian.

Proof. (a) If $G=A \otimes B$ is a semi-nilpotent group and B is not nilpotent, then we let S be any cyclic subgroup of A. $B \leq N(S<G)$ and B is not nilpotent imply that $N(S<G)$ is not nilpotent. Thus, $S \lhd G$, or $S \lhd A$, and A is either hamiltonian or abelian. Moreover, $A \leq H(G)$.

(b) Let H and K be semi-nilpotent groups of relatively prime orders, then by (a) the condition on H and K is necessary for G to be semi-nilpotent. Conversely, if H and K are both nilpotent, then G is nilpotent, hence semi-nilpotent, in any case. If H is hamiltonian or abelian, then every non-normal primary subgroup P of G is a non-normal primary subgroup of K; thus, $N(P<K)$ is nilpotent by the semi-nilpotency of K. Then, $N(P<G)=H \otimes N(P<K)$ is nilpotent and G is semi-nilpotent. Q. E. D.

LEMMA 5.1. If G is a semi-nilpotent group and $H(G)$ contains a p-subgroup P such that $P \not\lhd G$, then $G/F(G)$ is a p-group. Thus, if G is not nilpotent, then every subgroup in the p-complement of $H(G)$ is normal subgroup of the group G.

Proof. Let $H(G)=\prod H_q$, where $H_q=[H(G)]_q$, then $P \leq H_p$. Clearly, $C(H_p<G) \leq N(P<G)$ and $N(P<G)$ is nilpotent. Therefore, $C(H_p<G)$ is nilpotent. From $H_p \lhd G$, we get $C(H_p<G) \lhd G$; hence, $C(H_p<G) \leq F(G)$. Since $[G:C(H_p<G)]$ is a power of p from a remark in the introduction, we see that $[G:F(G)]$ is a power of p. Q. E. D.

It is also clear that if a Sylow subgroup of G is contained in the p-complement of $H(G)$, then it is a direct factor of G. This fact, indeed, holds for every group G, see BAER [1; p. 41, Corollary 2].

LEMMA 5.2. If G is semi-nilpotent and A is a maximal nilpotent subgroup of the group G, then A/A_G is a cyclic group.

Proof. If either G is nilpotent or $A \lhd G$, then we have nothing to prove. Hence, we assume that G is not nilpotent and $A \not\lhd G$, then, $A_G = H(G)$ by Theorem 2(b). From Theorem 3, we may assume that $H(G) = 1$, and try to prove that A is cyclic under these conditions. Then, from Theorem 2(d), we see that G is the F-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$. From Proposition D and the fact that A is nilpotent, we see that A is either a cyclic group or the direct product of a cyclic group of odd order with a generalized quaternion group. We shall now show that the last case does not occur by proving that A is cyclic when $[A:1]$ is even. Suppose that $[A:1]$ is even and x is an element of order 2 in A. Let $1 \neq y \in F(G)$ be an element of order q. Then by Proposition E, we see that $\{y, x\}$ is the dihedral group of order $2q$, [6; p. 22], which is not nilpotent, because q is odd. Since $\{y, x\} \leq N(M < G)$, where $M = \{y\}$, therefore, $M \lhd G$. It is now clear that MA is an F-pair (M, A), A is isomorphic to a subgroup of the automorphism group of M, and M is a cyclic group of odd order; hence, A is cyclic, [8; p. 115]. Q. E. D.

COROLLARY. If G is semi-nilpotent, then $G/F(G)$ is cyclic.

Proof. By Corollary of Theorem 1, (b) of Theorem 2, Second Isomorphism Theorem [8; p. 34], and Lemma 5.2.

We shall now introduce the following definitions: An F-pair (H, A) is called a special F-pair, if H is a nilpotent group and A is a cyclic group. If A is representable as a subgroup of the automorphism group of an arbitrary group G, then we shall say that a subgroup S of G is an A-sub-admissible subgroup of G when S admits a non-trivial subgroup of A as a group of automorphisms. Finally, if we are given a set of F-pairs, $\{(S_i, A_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$, such that each A_i is isomorphic to a group A under a given isomorphism, ϑ_i, then we form the direct product $S = \prod_{1 \leq i \leq n} S_i$, and let A operate on S by defining the action of an element x of A on each of the component S_i of S to be that of $x\vartheta_i^{-1}$ of A_i. It is clear that by going over to the holomorph of S, we would obtain an F-pair (S, A). Such an F-pair (F, A) will be called the amalgamated product of (S_i, A_i) under ϑ_i.

THEOREM 5. G is a semi-nilpotent group with $Z(G) = 1$ if, and only if the following conditions hold in G:

(1) There is a subgroup A of G such that G is the special F-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$.

(2) Every A-sub-admissible subgroup of $F(G)$ is normal in G.

Proof. If G is a semi-nilpotent group with $Z(G) = 1$, then G is not nilpotent. Let A be a maximal nilpotent subgroup of G and $A \not\lhd G$, such subgroups exist by Lemma 4.2. From (b) and (d) of Theorem 2 and Lemma 5.2, we see that G is the special F-pair $(F(G), A)$. $F(G) = F_0(G)$ is a consequence of Proposition C, thus, (1) is necessary. If S is any A-sub-admissible subgroup of $F(G)$, then by Proposition C, $N(S < G)$ is not nilpotent. Thus, by the semi-nilpotency of the group G, $S \lhd G$. Hence, (2) is also necessary.

Conversely, if conditions (1) and (2) are satisfied by the group G, and P is a non-normal primary subgroup of G, then either P is part of $F(G)$, or it

is conjugate to a subgroup of A, by condition (1) and Proposition C. If $P \leq F(G)$ and $N(P<G)$ is not part of $F(G)$, then $N(P<G)$ contains a subgroup conjugate to a non-trivial subgroup of A. This means that a conjugate P^x of P is A-sub-admissible, therefore, by condition (2), $P^x \lhd G$; thus, $P \lhd G$. This contradiction shows that $N(P<G) \leq F(G)$, hence, $N(P<G)$ is nilpotent. On the other hand, if P is conjugate to a subgroup P^x of A, then $N(P^x<G) \geq A$. If $N(P^x<G)>A$, then $1<S=N(P^x<G)\cap F(G)$. It is clear that $S \lhd N(P^x<G)$ and $S \leq C(P^x<G)$. However, this latter is impossible in any F-pair, since S and P^x would generate a nilpotent subgroup with order not dividing either $[F(G):1]$ or $[A:1]$, contradicting Proposition C. Thus, $N(P^x<G)=[N(P<G)]^x = A$, or $N(P<G)$ is a cyclic group. Therefore, G is semi-nilpotent. $Z(G)=1$ is immediate by Proposition B together with the condition (1). Q. E. D.

We may also put Theorem 5 into the following form:

THEOREM 5′. *G is a semi-nilpotent group with $Z(G)=1$ if, and only if the following conditions hold in G:*

(1) There is a subgroup A of G such that G is the amalgamated product of the special F-pairs (S_i, A) under the identity automorphism of A, where S_i ranges over the set of all the distinct normal Sylow subgroups of G.

(2) For each i, every A-sub-admissible subgroup of S_i is normal in (S_i, A).

Proof. The necessity of these conditions is obvious from Theorem 5, once we recall that $F_0(G)=\prod_i S_i$.

Conversely, if conditions (1) and (2) are satisfied, we shall show that conditions (1) and (2) of Theorem 5 then hold. Clearly, condition (1) of Theorem 5 is a consequence of the condition (1) above, since $F_0(G)=\prod_i S_i$, where S_i ranges over the distinct normal Sylow subgroups of G. We next notice that $P \leq S_i$ and $P \lhd (S_i, A)$ imply that $P \lhd G$, since $S_j \leq N(P<G)$ for each $j \neq i$ and $G=(\prod_{j \neq i} S_j)(S_i, A)$. Hence, condition (2) of Theorem 5 hold, for an A-sub-admissible subgroup T of $F(G)=F_0(G)$ is the direct product of $T \cap S_i$, and each $T \cap S_i$ is an A-sub-admissible subgroup of S_i. Q. E. D.

THEOREM 6. *Let G be a group such that every subgroup of $H(G)$ is normal in G, then G is semi-nilpotent if, and only if the following conditions hold:*

(1) There is a subgroup A of G such that $G/H(G)$ is the special F-pair $(F(G)/H(G), A/H(G))$.

(2) If $S \not\lhd G$ and $H(G)\,S/H(G)$ is an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then $N(S<G) \leq F(G)$.

If these conditions hold in G, then $H(G)$ is part of the first, or part of the second member of the ascending central chain of $F(G)$, [8; p. 110], according as $H(G)$ is abelian or hamiltonian. Furthermore, the ascending central chain of G, [8; p. 110], terminates with $H(G)$ after at most m steps, where $m=\max_i m_i$, m_i is the least positive integer such that every element of the p_i primary component of $H(G)$ has an order dividing $(p_i)^{m_i}$.

Proof. If G is a nilpotent group, then the theorem is trivial. Since our hypothesis implies that G is either hamiltonian or abelian. We now assume that G is not nilpotent and that every subgroup of $H(G)$ is normal in G.

If G is semi-nilpotent, then (1) is a consequence of Theorems 3 and 5. Let $S \lhd G$ and $H(G)\,S/H(G)$ be an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then $N(S<G)$ is nilpotent; hence, $H(G)\,N(S<G)/H(G)$ is nilpotent and has a non-trivial intersection with $F(G)/H(G)$. From Proposition C applied to (1), we see that $H(G)\,N(S<G)/H(G)$ is part of $F(G)/H(G)$, or $N(S<G) \leq F(G)$. Thus, condition (2) holds.

Conversely, if G satisfies the conditions (1) and (2) in addition to the conditions stated at the beginning of this proof, then we let P be any non-normal p-subgroup of G for a prime p. It is clear that $P \not\leq H(G)$. Thus, we see that $H(G)\,P/H(G)$ is a non-trivial p-subgroup of $G/H(G)$. If $H(G)\,P/H(G)$ is an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then by (2), $N(S<G)$ is nilpotent. If $H(G)\,P/H(G)$ is a subgroup of $F(G)/H(G)$ which is not $A/H(G)$-sub-admissible, then we have the result, $F(G)/H(G) \geq N[H(G)\,P/H(G)< G/H(G)] = N[H(G)\,P<G]/H(G) \geq H(G)\,N(P<G)/H(G)$, or $N(P<G) \leq F(G)$, hence $N(P<G)$ is nilpotent. For, in an F-pair $G=(K, A)$, $S \leq K$ and $N(S<G) \not\leq K$ imply that a conjugate of S is A-sub-admissible. Now by (1), using Proposition C, the only other alternative is that $H(G)\,P/H(G)$ is conjugate to a subgroup of $A/H(G)$. Repeating the proof of Theorem 5, we have $A^x/H(G) = N[H(G)\,P/H(G)<G/H(G)] = N[H(G)\,P<G]/H(G) \geq H(G)\,N(P<G)/H(G)$, or $N(P<G) \leq A^x$, hence, $N(P<G)$ is nilpotent. Thus, G is semi-nilpotent.

For the remaining parts of the theorem, we see first that $F(G) = H(G) \cdot [G, F(G)]$ by Proposition F. Since every cyclic subgroup of $H(G)$ is normal in G and the automorphism group of a cyclic group is always abelian [8; p. 115], we see that $[[G, F(G)], H(G)] = 1$. If $H(G)$ is abelian, then $[F(G), H(G)] = 1$, or $H(G) \leq Z[F(G)]$. If $H(G)$ is hamiltonian, then $[F(G), H(G)] = [H(G), H(G)] \leq Z[H(G)] \leq Z[F(G)]$. For the last assertion of the theorem, it suffices to show that every element of order a prime in $H(G)$ is in $Z(G)$ and apply an induction argument to $G/Z(G)$, using Theorem 3. If $x \in H(G)$ is an element of order a prime p, then every element of G with order prime to p commutes with x [1; p. 38, Theorem 1]. In addition, since $\{x\} \lhd G$, every element in G with order a power of p must also commute with x, because the automorphism group of $\{x\}$ contains no element of order a proper power of p. Thus, $x \in Z(G)$. Q. E. D.

By (b) of Theorem 4, it is easily seen that condition (2) of Theorem 6 is indispensable. Furthermore, it can be shown that the condition (2) amounts to nothing more than the condition:

(2′) If $S \lhd G$ and $S \leq F(G)$, then $N(S<G)$ is nilpotent. Thus, (2) is not a very satisfactory condition.

Lemma 5.1 in a sense is the counterpart of the result of IWASAWA mentioned in the introduction—if the order of a group G has more than two distinct prime divisors, then G is an SI-group if and only if G is nilpotent.

For Lemma 5.1 is clearly equivalent to the statement that, if $H(G)$ contains non-normal primary subgroups of G for more than one prime, then G is a semi-nilpotent group if and only if G is nilpotent.

If $H(G)$ contains non-normal primary subgroup for the prime p only, then Lemma 5.1 shows that G is an extension of the nilpotent group $F(G)$ by a cyclic p-group. Here we run into the problem of having to extent a p-group $[F(G)]_p$ by a cyclic p-group. Thus, the structure of semi-nilpotent groups with non-trivial centers is much more complicated than that of semi-nilpotent groups with trivial centers.

6. General structure of NP-groups. We shall now show that somewhat better structure theorems may be obtained for NP-groups. However, it is to be expected that the basic structure of NP-groups should not differ too much from that of the semi-nilpotent groups, since their definitions are quite similar.

If we replace the word "semi-nilpotent" and "nilpotent" respectively by the words "NP-" and "primary" throughout Theorem 3 and its proof, we obtain the result that every subgroup and every homomorphic image of an NP-group is again an NP-group.

LEMMA 6.1. Let G be an NP-group and H be a nilpotent subgroup of G. If H is not primary, then every subgroup of H is normal in G.

Proof. It suffices to show that every cyclic primary subgroup P of H is normal in G. Since H is nilpotent and not primary, $N(P<G)$ is not primary. Thus, by property (NP) of G, $P \lhd G$. Q. E. D.

THEOREM 7. G is a nilpotent NP-group if, and only if G is either an abelian group, a hamiltonian group, or a primary group.

Proof. Apply the property (NP) and Lemma 6.1 to G. Q. E. D.

THEOREM 8. G is an NP-group with $Z(G)=1$ if, and only if the following conditions hold:

(1) G is the special F-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$, where A is a p-Sylow subgroup of G and p is the unique prime divisor of $[G:F(G)]$.

(2) If $F(G)$ is primary, then every A-sub-admissible subgroup of $F(G)$ is normal in G.

(3) If $F(G)$ is not primary, then every subgroup of $F(G)$ is normal in G. Indeed, G is isomorphic to a group defined by the following set of relations on the generators $x_1, \ldots, x_m$, and a:

$$[x_i, x_j] = (x_i)^{n_i} = 1 = a^{p^n},\ n_i \mid n_j \text{ for } i > j,\ 1 \leq i,\ j \leq m;$$

$$a^{-1} x_i a = (x_i)^k,\ 1 \leq i \leq m,\ k^{p^n} \equiv 1 \bmod n_1 \ (k \text{ is primitive});$$

$$[G:F(G)] = p^n,\ p^n \mid (q-1) \text{ where } q \text{ is any prime divisor of } [F(G):1];$$

$$n_1 \ldots n_m = [F(G):1].$$

Proof. If G is an NP-group with $Z(G)=1$, then by (1) of Theorem 5 we get the first part of (1) above; the second part of (1) follows immediately from Lemma 6.1 and the fact that $A \not\lhd G$.

Condition (2) of Theorem 8 is necessary by (2) of Theorem 5.

The first part of (3) in Theorem 8 is necessary by Lemma 6.1. If we let S be a cyclic subgroup of $F(G)$ with order a prime q, then it is easy to see that S and A generates an F-pair (S, A); hence, the restriction on $p^n = [A:1] \mid [G:F(G)]$ is necessary. From this we see that 2 is not a divisor of $[F(G):1]$, hence $F(G)$ must be an abelian group [8; p. 130]. By using (1) and the first assertion of (3) in Theorem 8, we then see easily that the defining relations among the generators of G must be of the form stated in the second part of (3), where $F(G) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ and $A = \{a\}$.

Conversely, if G satisfies the conditions (1), (2), and (3), then from Proposition B, $Z(G) = 1$. If P is a non-normal primary subgroup of G, then P is either a subgroup of $F(G)$ or conjugate to a subgroup of A. If $P \leq F(G)$, then (2) shows that $N(P<G) \leq F(G)$, hence $N(P<G)$ is primary, by the same argument as in Theorem 5. If P is conjugate to a subgroup of A, again using the same argument as in Theorem 5, we see that $N(P<G)$ is conjugate to A, hence it is primary by (1). Q. E. D.

We will now characterize completely NP-groups G such that $1 < H(G) < G$. By Lemma 6.1 and (c) of Theorem 2, we see that non-normal maximal nilpotent subgroups of G are the p-Sylow subgroups of G, where p is the unique prime divisor of $[G:F(G)]$. It is clear that $F(G) = F_0(G) \otimes H(G)$ and by hypothesis $F(G)$ is not primary. From Lemma 6.1 we see that every subgroup of $F(G)$ is normal in G. We now see that G may be considered as an extension of the abelian group $F_0(G)$ by a p-group A, since $F_0(G)$ may not contain any element of order 2. A is a Sylow subgroup of G such that the subgroup $H(G) \leq A$ induces the identity automorphism in $F_0(G)$ and $A/H(G)$ is cyclic of order $[G:F(G)]$.

It is now easy to see that the relations given in (3) of Theorem 8 may be used as part of the defining relations in G with the following modifications: the element a has order a power of p which is divisible by p^n; except for the condition $[G:F(G)] = p^n$, other occurrences of $F(G)$ are replaced by $F_0(G)$. Equivalently, what we have in (3) of Theorem 8 are the defining relations in $G/H(G)$, except that congruence modulo $H(G)$ needs only be used in $a^{p^n} = 1$, while equality actually holds for each of the remaining relations. Thus, for given $G/H(G)$, the structure of G depends only on the structure of A as an extension of $H(G)$, a p-group, by a cyclic p-group of order p^n such that every subgroup of $H(G)$ is normal in A.

We now consider the possibilities that $H(G)$ is hamiltonian and that it is abelian.

If $H(G)$ is hamiltonian, then $H(G) = Q \otimes T$, where Q is a quaternion group and T is an elementary abelian 2-group [8; p. 130]. It is then a simple matter to show that $A = \{H(G), a\}$, where a commutes with every element of $H(G)$, and A is determined up to isomorphism by any one of the following three relations: $a^{2^n} = 1$; a^{2^n} is the element of order 2 in Q; and when $T > 1$, a^{2^n} is an element of order 2 in T.

If $H(G)$ is abelian with the independent generators y_i, $1 \leq i \leq d$, satisfying the relations: $[y_i, y_j] = (y_i)^{p^{k_i}} = 1$, $k_i \geq k_j$ for $i < j$, $1 \leq i, j \leq d$, then, we may get all the non-isomorphic groups A by choosing the element a to satisfy the following relations:

$$a^{p^n} = y_j,\ k_j > k_{j+1},\ \text{where } y_{d+1} = 1,\ k_{d+1} = 0,\ k_{d+2} = -1,\ \text{and } 1 \leq j \leq d+1;$$

$$a^{-1} y_i a = (y_i)^{1+p^r},\ 1 \leq i \leq d,\ k_1 \geq r \geq \max[k_1 - n, k_j, 1],\ \text{when } p \neq 2,\ \text{or when } k_1 - r < 2;$$

$$a^{-1} y_i a = (y_i)^{e(1+2^r)},\ e = 1 \text{ or } -1 \text{ for } k_j < 2,\ e = 1 \text{ for } k_j \geq 2,$$

when $p = 2$ and $k_1 - 2 \geq r \geq \max[k_1 - n, k_j, 1]$.

From this discussion we get the following theorem:

THEOREM 9. *G is an NP-group with $1 < H(G) < G$ if, and only if*

$$G = \{x_1, \ldots, x_m, H(G), a\},$$

where x_i and a satisfy the relations given in (3) of Theorem 8 with the appropriate modifications indicated above. In addition, $\{H(G), a\}$ is a group A described in the discussion immediately preceding this theorem, and finally every element of $H(G)$ commutes with x_i, $1 \leq i \leq m$.

The verification of this theorem is quite straightforward, we only need to keep in mind that every subgroup of $F(G) = F_0(G) \otimes H(G)$ is normal in G, that $A/H(G)$ induces a cyclic p-group of F-automorphisms in $F_0(G)$, that $A/H(G)$ induces a cyclic p-group of automorphisms in the p-group $H(G)$, and that $G = F_0(G)A$.

Combining Theorems 7, 8, and 9, we see that the characterizations of NP-groups are complete except in the case when the NP-group G may be written as an F-pair $(F(G), A)$, where $F(G)$ is a q-group, A is a cyclic p-group, and p and q are distinct primes. In this case, we need to put down the condition (2) of Theorem 8.

7. *Remark.* We may use Theorem 1 to give a simple proof of a result of ZASSENHAUS [9; p. 61, Theorem 7].

THEOREM OF ZASSENHAUS. *A group G is abelian if, and only if for every abelian subgroup S of G, $N(S < G) = C(S < G)$.*

Proof. The necessity of the condition in the theorem is obvious. By using an induction argument on the order of the group G, we see that we may assume that every proper subgroup of G is abelian, hence G is semi-nilpotent. If G is nilpotent, then let M be a maximal abelian normal subgroup of G. By a result of ZASSENHAUS [8; p. 115], we have $M = C(M < G) = N(M < G) = G$, or G is abelian. If G is not nilpotent, then by Theorem 1, and the induction hypothesis, we have $1 < F_0(G) < G$, and $F_0(G)$ is an abelian normal subgroup of G; hence, $F_0(G) \leq Z(G)$. But G splits over $F_0(G)$, and the complement is also abelian, hence, G is abelian. This contradiction completes the proof. Q. E. D.

Bibliography

[1] BAER, R.: Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2. edit. New York 1955. — [3] IWASAWA, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) **23**, 1—4 (1941). — [4] SCHMIDT, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle sind. Rec. math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [5] SHAW, R. H.: Remark on a theorem of Frobenius. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 970 (1952). — [6] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [7] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Hamburg. Abh. **11**, 187—220 (1935). — [8] ZASSENHAUS, H.: The theory of groups. New York 1949. — [9] ZASSENHAUS, H.: A group-theoretic proof of a theorem of Maclagan-Wedderburn. Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, 53—63 (1952).

Dept. of Math., Princeton University, USA

(Eingegangen am 19. Februar 1957)

FAN, K.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 205—216 (1957)

Existence Theorems and Extreme Solutions for Inequalities Concerning Convex Functions or Linear Transformations *)

By
KY FAN

1. Introduction. This paper is concerned with consistency conditions and extreme solutions for inequalities involving convex functions or linear transformations. In section 2, we study a system (2) of inequalities concerning lower semi-continuous convex functions f_ν defined on a compact convex set in a topological vector space. Some examples and remarks related to results of 2 are given in section 3. In 4, the existence theorem concerning (2) established in 2 is applied to a relation of form (18) involving a continuous linear transformation A and a convex set C. In section 5, we discuss inequalities of form (23), (23') and (25) concerning a completely continuous linear transformation A. Actually relations (18) and (23) are not inequalities in the usual sense, but they are natural generalizations of inequalities. Since all vector spaces considered are real vector spaces, the word "real" will be omitted.

2. Systems of convex inequalities. As usual, a real-valued function f defined on a convex set K in a vector space is said to be *convex*, if

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

holds for any two elements x_1, x_2 of K and for any $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ with $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. f is said to be *concave*, if $-f$ is convex. It was shown in [4] that certain basic results on systems of linear inequalities can be extended to finite systems of strict inequalities of the form

$$f_i(x) < 0 \qquad (1 \leq i \leq m), \tag{1}$$

where f_i are convex functions defined on a convex set in a vector space. For such a system (1), results given in [4] are of purely algebraic nature and involve no topological consideration. In the present section, we shall be concerned with systems of inequalities of form (2), where each f_ν is a lower semi-continuous convex function defined on a compact convex set K in a topological vector space. Due to the fact that the inequalities in (2) are not strict, our results concerning systems (2) involve topological considerations, but they are analogous to the topology-free results in [4] for system (1).

THEOREM 1. *Let K be a compact convex set in a topological vector space. Let $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family* (finite or infinite) *of lower semi-continuous convex*

*) This work was sponsored by the U. S. National Science Foundation and the U. S. National Bureau of Standards.

functions defined on K. Then the system of inequalities

$$f_\nu(x) \leq 0 \qquad (\nu \in I) \tag{2}$$

is consistent on K [i.e. there exists an $x \in K$ satisfying (2)], *if and only if, for any finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of I and for any n non-negative numbers $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, the inequality*

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\nu_i}(x) \leq 0 \tag{3}$$

holds.

PROOF. Consider first the case $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ is finite. The existence of an $x \in K$ satisfying all m inequalities $f_i(x) \leq 0$ $(1 \leq i \leq m)$ is equivalent to the truth of the relation

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \leq 0.$$

or, what is the same,

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leq 0.$$

(Observe that the minimum in the last two relations exists, since K is compact and the function to be minimized is lower semi-continuous on K.) Now since each f_i is lower semi-continuous and convex on the compact convex set K, according to a minimax theorem [2, Theorem 1], [6], we have

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Therefore, the system $f_i(x) \leq 0$ $(1 \leq i \leq m)$ is consistent on K, if and only if

$$\operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leq 0,$$

which is precisely the condition stated in the theorem. This proves the theorem for a finite system.

The result for an infinite system follows immediately from the result in the finite case, if we observe that the infinite system (2) is consistent, if and only if every finite subsystem is consistent. In fact, for each $\nu \in I$, $S_\nu = \{x \in K \mid f_\nu(x) \leq 0\}$ is a closed subset of the compact set K, so $S = \bigcap_{\nu \in I} S_\nu$ is non-empty, when and only when any finite number of sets of the family $\{S_\nu\}_{\nu \in I}$ have a non-empty intersection.

THEOREM 2. *Let K be a compact convex set in a topological vector space. Let $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family of lower semi-continuous convex functions defined on K such that the system* (2) *is consistent on K, and let*

$$S = \{x \in K \mid f_\nu(x) \leq 0 \text{ for each } \nu \in I\}. \tag{4}$$

Then, for any upper semi-continuous concave function g defined on K, we have

$$\max_{x\in S} g(x) = \inf_{\substack{\nu_i\in I\\ \lambda_i\geq 0}} \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right], \tag{5}$$

where, for the infimum, $n=1, 2, 3, \ldots$; $\nu_i\in I$ and $\lambda_i\geq 0$ vary.

If $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ is finite and if the system of strict inequalities

$$f_i(x)<0 \qquad (1\leq i\leq m) \tag{6}$$

is consistent on K, then the infimum in (5) is actually a minimum, that is,

$$\max_{x\in S} g(x) = \min_{\lambda_i\geq 0} \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\right]. \tag{7}$$

Proof. First observe that both maxima in (5) exist, since S, K are compact and the functions to be maximized are upper semi-continuous. Let $\gamma=\max_{x\in S} g(x)$ and let $x_0\in S$ be such that $g(x_0)=\gamma$. For any finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of I and for any $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n)$, we have

$$\gamma\leq g(x_0) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x_0)\leq \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right].$$

Hence the infimum in (5) is $\geq\gamma$. For any $\varepsilon>0$, the system obtained by adjoining the inequality $\gamma+\varepsilon-g(x)\leq 0$ to (2) is inconsistent on K. By Theorem 1, there exist a finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of I and $n+1$ non-negative numbers $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n+1)$ such that

$$\min_{x\in K}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x) + \lambda_{n+1}\left(\gamma+\varepsilon-g(x)\right)\right] > 0.$$

As (2) is consistent, we have $\lambda_{n+1}>0$ and therefore we may assume $\lambda_{n+1}=1$. Then the last inequality becomes

$$\max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right] < \gamma+\varepsilon.$$

This shows that the infimum in (5) is $\leq\gamma$, and therefore equal to γ.

Assume now that $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ is finite and that system (6) of strict inequalities is consistent. As in the above, for each positive integer k, there exist $m+1$ non-negative numbers $\lambda_{ki}\geq 0$ $(1\leq i\leq m+1)$ such that

$$\min_{x\in K}\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ki} f_i(x) + \lambda_{k,m+1}\left(\gamma+\frac{1}{k}-g(x)\right)\right] > 0.$$

We may assume $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{ki}=1$. Then we can find an increasing sequence of k's such that the $m+1$ limits $\lim_{k\to\infty}\lambda_{ki}=\lambda_i$ $(1\leq i\leq m+1)$ exist. We have $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i=1$ and

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x) + \lambda_{m+1}\left(\gamma-g(x)\right)\geq 0 \qquad \text{for } x\in K. \tag{8}$$

If $\lambda_{m+1}>0$, then (8) can be written

$$\gamma \geq \operatorname*{Max}_{x\in K}\left[g(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}f_i(x)\right]$$

and consequently the infimum in (5) is actually a minimum. It remains therefore to prove that λ_{m+1} in (8) is positive. Suppose $\lambda_{m+1}=0$. Then (8) becomes $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\geq 0$ for $x\in K$. But $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, at least one λ_i is >0, so no $x\in K$ would satisfy (6). This shows $\lambda_{m+1}>0$ and thereby completes the proof.

In connection with Theorem 2, we mention that system (6) of strict inequalities is consistent on K, if and only if

$$\operatorname*{Min}_{x\in K}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)<0$$

holds for any m non-negative numbers λ_i, not all zero (see [4, Theorem 1]).

We shall say that a finite system

$$f_i(x)\leq 0 \qquad (1\leq i\leq m) \tag{9}$$

of inequalities is *irreducibly inconsistent* on K, if (9) is inconsistent on K and if every subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities is consistent. In case $m=1$, an inconsistent system formed by a single inequality will be regarded as irreducibly inconsistent.

THEOREM 3. *Let f_i $(1\leq i\leq m)$ be m lower semi-continuous convex functions defined on a compact convex set K in a topological vector space. Then the system (9) of inequalities is irreducibly inconsistent on K, if and only if the following two conditions are both fulfilled:*

(i) *There exist m positive numbers $\lambda_i>0$ such that*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)>0 \qquad \text{for all } x\in K.$$

(ii) *No linear combination of $m-1$ of the functions f_i with real coefficients can remain >0 throughout K.*

PROOF. The sufficiency is immediately seen. In fact, by Theorem 1, (i) implies the inconsistency of (9), and (ii) implies the consistency of any subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities.

Assume now that (9) is irreducibly inconsistent. Then (i) follows again from Theorem 1. It remains to prove (ii). Suppose there exist $m-1$ real numbers μ_i $(1\leq i\leq m-1)$ such that

$$\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i f_i(x)>0 \qquad \text{for all } x\in K. \tag{10}$$

To derive a contradiction, we first observe from (10) that $J=\{i\,|\,\mu_i<0\}$ is non-empty by considering an $x\in K$ satisfying the first $m-1$ inequalities of

(9). On the other hand, since (i) is true, there exist $m-1$ positive numbers $\lambda_i>0$ $(1\leq i\leq m-1)$ with the property that

$$f_m(x)+\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i f_i(x)>0 \qquad \text{for } x\in K. \tag{11}$$

Now, let $\varkappa=\operatorname{Max}_{i\in J}\frac{\lambda_i}{\mu_i}<0$ and let $\eta_i=\lambda_i-\varkappa\mu_i$ $(1\leq i\leq m-1)$. Then by (10), (11), every $x\in K$ satisfies

$$f_m(x)+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_i f_i(x)=f_m(x)+\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i f_i(x)-\varkappa\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i f_i(x)>f_m(x)+\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i f_i(x)>0.$$

As $\eta_i\geq 0$ $(1\leq i\leq m-1)$ and at least one $\eta_i=0$, by Theorem 1, there would be an inconsistent subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities. Thus the necessity of (ii) is proved.

3. Examples and remarks. Even for a finite system on a finite dimensional vector space, the compactness of K in Theorem 1 is an essential hypothesis. Consider for example the closed convex set K in the Euclidean 3-space formed by all points x whose coordinates (ξ_1, ξ_2, ξ_3) satisfy $\xi_j\geq 0$ $(j=1, 2, 3)$ and $\xi_3^2\leq\xi_1\xi_2$. Let f_i $(1\leq i\leq 4)$ be defined by $f_1(x)=-f_2(x)=\xi_1$, $f_3(x)=-f_4(x)=\xi_3-1$ for $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Then the system $f_i(x)\leq 0$ $(1\leq i\leq 4)$ is inconsistent on K. However, for any $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq 4)$, there exists an $x\in K$ such that $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i f_i(x)\leq 0$.

In the second part of Theorem 2, the additional hypothesis that the system (6) of strict inequalities is consistent is essential. Let K be the closed unit interval $0\leq x\leq 1$ in the real line. The system formed by the single inequality $x\leq 0$ is consistent on K, while the strict inequality $x<0$ is inconsistent on K. For the concave function g on K defined by $g(x)=(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$, we have $\operatorname{Inf}_{\lambda\geq 0}\operatorname{Max}_{0\leq x\leq 1}[(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}-\lambda x]=0$, but this infimum is not a minimum.

As an interesting example of application of Theorem 1, we include a simple proof of the following well-known theorem of HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA [5, p. 49]: *If the real numbers a_i, b_i $(1\leq i\leq n)$ satisfy the conditions*

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0, \qquad b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\leq\sum_{i=1}^{k}b_i \qquad (1\leq k\leq n), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i, \tag{14}$$

then there exists a doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ of order n such that

$$a_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}b_j \qquad (1\leq i\leq n). \tag{15}$$

Here we call a square matrix $P=(p_{ij})$ *doubly stochastic*, if $p_{ij}\geq 0$ and if $\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1$ for every i, $\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=1$ for every j. Let K denote the set of all

doubly stochastic matrices of order n. Then K may be regarded as a compact convex set in the n^2-dimensional Euclidean space. For any doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ of order n, let

$$f_i(P) = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Then the conclusion of the above theorem means that the system of $2n$ inequalities $f_i(P) \leq 0$, $-f_i(P) \leq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ has a solution $P \in K$. According to Theorem 1, this is equivalent to the following statement: For any n real numbers c_i (of arbitrary signs), there exists a doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ of order n such that $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P) \leq 0$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j. \tag{16}$$

To prove this statement, it suffices to consider the case where all $c_i \geq 0$. In fact, we can always introduce a number d such that $c_i' = c_i + d \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. If a doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ satisfies

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i' p_{ij} b_j,$$

then by virtue of (14) and $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, this same matrix also satisfies (16). Consider now any n numbers $c_i \geq 0$. Let π be a permutation of the indices $1, 2, \ldots, n$ such that $c_{\pi(1)} \geq c_{\pi(2)} \geq \cdots \geq c_{\pi(n)} \geq 0$. Then the doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ defined by

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = \pi(j), \\ 0, & \text{if } i \neq \pi(j), \end{cases}$$

satisfies (16). In fact, from (12), (13), we have

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j.$$

This completes the proof of HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA'S theorem.

Returning to Theorems 1, 2, 3, we observe that they can be generalized to results which involve no vector space. In fact, Theorem 1 remains true for a family of lower semi-continuous functions $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ defined on an arbitrary compact space K, provided this family of functions has the following property: For any two elements x_1, x_2 of K and for any $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ with $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, there exists an $x_0 \in K$ such that $f_\nu(x_0) \leq \alpha_1 f_\nu(x_1) + \alpha_2 f_\nu(x_2)$ for every $\nu \in I$. The proof needs no change, since the minimax theorem [2, Theorem 1] used in the proof involves no vector space. Theorems 2 and 3 can be generalized in a similar manner. To generalize Theorem 2, we assume that each f_ν is lower semi-continuous and g is upper semi-continuous on a compact space K, and that the family of functions obtained by adjoining $-g$ to $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ has the property described above in the generalization of Theorem 1.

4. Application to linear transformations. As usual, we denote by X^* the conjugate space of a normed vector space X. For a continuous linear transformation A from a normed vector space X into a normed vector space Y, we denote by A^* the transposed (i.e. the adjoint) linear transformation of A. For a convex set C in a normed vector space X, the polar convex set of C will be denoted by $\hat{C}$, which is defined by

$$\hat{C} = \{f \in X^* \mid f(x) \leq 1 \text{ for every } x \in C\}. \tag{17}$$

THEOREM 4. *Let A be a continuous linear transformation from a reflexive Banach space X into a normed vector space Y. Let C be a closed convex set in Y containing the null-element of Y. Let $y_0 \in Y$. Then:*

(i) *For $\varrho \geq 0$, there exists an $x \in X$ satisfying $\|x\| \leq \varrho$ and*

$$Ax - y_0 \in C, \tag{18}$$

if and only if

$$1 + f(y_0) + \varrho \|A^* f\| \geq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C}. \tag{19}$$

(ii) *If the set S of all $x \in X$ satisfying (18) is non-empty and if $0 \notin S$, then*

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \hat{C} \\ A^* f \neq 0}} \frac{-1 - f(y_0)}{\|A^* f\|}. \tag{20}$$

PROOF. (i) Since the convex set C is closed in Y and $0 \in C$, (18) is equivalent to the following system of inequalities

$$f(Ax - y_0) \leq 1 \quad \text{for } f \in \hat{C},$$

or, what is the same,

$$(A^* f)(x) - f(y_0) - 1 \leq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C}. \tag{21}$$

By reflexivity of X, the convex set $K = \{x \in X \mid \|x\| \leq \varrho\}$ is compact with respect to the weak topology of X. For each $f \in \hat{C}$, the left-hand side of (21) is a convex function of x which is continuous with respect to the weak topology of X. Hence by Theorem 1, there exists an $x \in K$ satisfying (21), if and only if

$$\operatorname*{Min}_{\|x\| \leq \varrho} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [(A^* f_i)(x) - f_i(y_0) - 1] \leq 0$$

holds for any finite number of $f_i \in \hat{C}$ and for any $\lambda_i \geq 0$ with $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Since $f_i \in \hat{C}$, $\lambda_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ imply $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in \hat{C}$, this condition is equivalent to

$$\operatorname*{Min}_{\|x\| \leq \varrho} [(A^* f)(x) - f(y_0) - 1] \leq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C},$$

which is precisely condition (19).

(ii) First $\sigma = \operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\|$ exists. This follows from the well-known fact that a non-empty closed convex set in a reflexive Banach space has at least an

element of least norm. Since $0 \notin S$, we have $\sigma > 0$. Condition (19) is satisfied for $\varrho \geq \sigma$, but not for $\varrho < \sigma$. This implies the existence of $f \in \hat{C}$ with $A^* f \neq 0$. From (i) it is clear that the supremum in (20) is $\leq \sigma$. For any ε such that $0 < \varepsilon \leq \sigma$, no $x \in X$ can satisfy both $\|x\| \leq \sigma - \varepsilon$ and (18). Again by (i), there exists an $f_\varepsilon \in \hat{C}$ such that

$$1 + f_\varepsilon(y_0) + (\sigma - \varepsilon)\|A^* f_\varepsilon\| < 0. \tag{22}$$

Since (19) holds for $f = f_\varepsilon$ and $\varrho = \sigma$, (22) implies $\sigma\|A^* f_\varepsilon\| > (\sigma - \varepsilon)\|A^* f_\varepsilon\|$, whence $A^* f_\varepsilon \neq 0$. Then (22) shows that the supremum in question is $> \sigma - \varepsilon$ and therefore is equal to σ.

We mention two special cases of Theorem 4.

(CASE 1) $C = \{y \in Y \mid \|y\| \leq \delta\}$, where $\delta \geq 0$.

In this case, it is easily seen that (18), (19), (20) become respectively

$$\|Ax - y_0\| \leq \delta, \tag{18'}$$

$$\delta\|f\| + f(y_0) + \varrho\|A^* f\| \geq 0 \text{ for all } f \in Y^*, \tag{19'}$$

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \sup_{\substack{f \in Y^* \\ \|A^* f\| = 1}} \{f(y_0) - \delta\|f\|\}. \tag{20'}$$

(CASE 2) C is a closed convex cone in Y (i.e. $C + C \subset C$ and $\lambda C \subset C$ for all $\lambda \geq 0$).

In this case, $\hat{C}$ is also a convex cone. In fact, $\hat{C} = \{f \in Y^* \mid f(y) \leq 0 \text{ for all } y \in C\}$. It can be easily seen that (19), (20) are respectively equivalent to

$$f(y_0) + \varrho\|A^* f\| \geq 0 \quad \text{for all } f \in \hat{C}, \tag{19''}$$

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \sup_{\substack{f \in \hat{C} \\ \|A^* f\| = 1}} [-f(y_0)]. \tag{20''}$$

5. Completely continuous linear transformations. In this section, we confine ourselves to completely continuous linear transformations.

A convex set C in a normed vector space X is said to be *Euclidean-closed*, if, for any continuous linear transformation T from X onto a finite dimensional Euclidean space E^n, the image $T(C)$ is a closed set in E^n. For example, every linear subspace (not necessarily closed) in X is Euclidean-closed. In case X is reflexive, every bounded closed convex set in X is compact with respect to the weak topology of X, and therefore is Euclidean-closed.

THEOREM 5. *Let C be a Euclidean-closed convex set in a Banach space X such that $0 \in C$. Let A be a completely continuous linear transformation of X into itself, let $y_0 \in X$ and $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ such that*

$$Ax - \lambda x - y_0 \in C, \tag{23}$$

if and only if

$$1 + f(y_0) \geq 0 \tag{24}$$

holds for every $f \in \hat{C}$ satisfying the equation $A^* f - \lambda f = 0$.

PROOF. The necessity of the condition is trivial. In fact, if $Ax_0-\lambda x_0-y_0=z_0\in C$, and if $f_0\in\hat{C}$, $A^*f_0-\lambda f_0=0$, then

$$f_0(y_0)=f_0(Ax_0-\lambda x_0-z_0)=(A^*f_0-\lambda f_0)(x_0)-f_0(z_0)$$
$$=-f_0(z_0)\geq -1.$$

To prove the sufficiency of the condition, we shall need the complete continuity of A and make use of SCHAUDER's generalization [8], [1, p. 160], [9, p. 340] of a classical theorem of FREDHOLM. First, if the equation $A^*g-\lambda g=0$ has no solution besides $g=0$, then the linear transformation $A-\lambda I$ (where I denotes the identity transformation of X) maps X onto itself, so obviously there exist $x\in X$ satisfying (23). Let now $g_1, g_2, \ldots, g_n$ be a maximal system of linearly independent solutions of the equation $A^*g-\lambda g=0$. Then for any $z\in X$, the equation $Ax-\lambda x-y_0=z$ has a solution $x\in X$, if and only if $g_i(y_0+z)=0$ $(1\leq i\leq n)$. Let D denote the convex set in the Euclidean n-space E^n formed by all points with coordinates $(g_1(z), g_2(z), \ldots, g_n(z))$, where $z\in C$. Let p denote the point in E^n with coordinates $(-g_1(y_0), -g_2(y_0), \ldots, -g_n(y_0))$. Suppose no $x\in X$ satisfies (23). Then in E^n, the point p is not contained in the convex set D. Since C is Euclidean-closed, D is closed in E^n. So there exists a hyperplane in E^n which separates p and D strictly. That is, there exist real numbers μ_i $(1\leq i\leq n)$ and α such that

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_i(z)<\alpha<-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_i(y_0) \qquad \text{for } z\in C.$$

Since $0\in C$, we must have $\alpha>0$. Therefore we may assume $\alpha=1$. Let $f=\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_i$. Then $f(z)<1<-f(y_0)$ for all $z\in C$, which implies $f\in\hat{C}$ and $1+f(y_0)<0$. Furthermore, since $A^*g_i-\lambda g_i=0$, we have $A^*f-\lambda f=0$. This proves the sufficiency of the condition.

In case the convex set C consists of the null-element of X only, (23) reduces to the linear equation $Ax-\lambda x-y_0=0$. Then, since $\hat{C}=X^*$, condition (24) is equivalent to "$f(y_0)=0$ for all solutions f of the equation $A^*f-\lambda f=0$". Hence, in this case, Theorem 5 becomes SCHAUDER's theorem used in the above proof.

If we use the recent generalization by LERAY [7] of SCHAUDER's theorem, Theorem 5 can be easily extended to locally convex topological vector spaces.

Even for a finite dimensional vector space X, the conclusion of Theorem 5 need not hold, if the convex set C is closed in X instead of being Euclidean-closed. Consider again the convex cone C in E^3 formed by all points $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ such that $\xi_j\geq 0$ $(j=1, 2, 3)$ and $\xi_3^2\leq\xi_1\xi_2$. Let A be the linear transformation in E^3 defined by $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=(0, \xi_2, 0)$, and let $y_0=(0, 0, -1)$. A linear form $f=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$ is in $\hat{C}$, if and only if $\alpha_1\leq 0$, $\alpha_2\leq 0$ and $\alpha_3\leq 2\,(\alpha_1\alpha_2)^{\frac{1}{2}}$. So a linear form $f=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$ satisfies $A^*f=0$ and $f\in\hat{C}$, if and only if $\alpha_1\leq 0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3\leq 0$. For such an f, we have $1+f(y_0)=1-\alpha_3\geq 1$. Thus condition (24) is satisfied. Nevertheless it is clear that no

$x \in E^3$ can satisfy $Ax - y_0 \in C$. (Here, because we are concerned with a finite dimensional vector space, the identity transformation I is completely continuous, so we simply write A instead of $A - \lambda I$.) Notice that the convex cone C is closed in E^3, but not Euclidean-closed.

If the Banach space X is reflexive, and if $C = \{x \in X \mid \|x\| \leq \delta\}$, where $\delta \geq 0$, then C is Euclidean-closed and Theorem 5 becomes the following result, which has already been given in [3, Theorem 24']:

THEOREM 5'. *Let X be a reflexive Banach space, and let A be a completely continuous linear transformation of X into itself. Let $y_0 \in X$, $\delta \geq 0$ and let $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ satisfying*

$$\|Ax - \lambda x - y_0\| \leq \delta, \tag{23'}$$

if and only if every solution $f \in X^*$ of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies the relation

$$|f(y_0)| \leq \delta \|f\|. \tag{24'}$$

Using this result, we shall prove

THEOREM 6. *Let X be a reflexive Banach space, and let A be a completely continuous linear transformation of X into itself. Let $y_0 \in X$, $\delta > 0$ and let $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ satisfying the strict inequality*

$$\|Ax - \lambda x - y_0\| < \delta, \tag{25}$$

if and only if every solution $f \neq 0$ of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies the strict inequality

$$|f(y_0)| < \delta \|f\|. \tag{26}$$

PROOF. Assume (25) has solutions $x \in X$. Then there exist $x_0 \in X$ and $\varepsilon > 0$ such that $\|Ax_0 - \lambda x_0 - y_0\| \leq \delta - \varepsilon$. By Theorem 5', every solution f of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies $|f(y_0)| \leq (\delta - \varepsilon)\|f\|$. If $f \neq 0$, then $(\delta - \varepsilon)\|f\| < \delta \|f\|$ and therefore (26).

To prove the converse, assume that no $x \in X$ satisfies (25). Then for every integer $n \geq \frac{1}{\delta}$, the inequality $\|Ax - \lambda x - y_0\| \leq \delta - \frac{1}{n}$ has no solution. By Theorem 5', there exists $f_n \in X^*$ such that

$$A^*f_n - \lambda f_n = 0, \quad |f_n(y_0)| > \left(\delta - \frac{1}{n}\right)\|f_n\|.$$

We may assume $\|f_n\| = 1$. Since X^* is reflexive, $\{f_n\}$ has a subsequence $\{f_{\nu_n}\}$ which converges weakly to some $f_0 \in X^*$. Clearly $\|f_0\| \leq 1$. As A^* is, like A, completely continuous, $\{A^*f_{\nu_n}\}$ converges strongly (and therefore also weakly) to A^*f_0. Hence we have $A^*f_0 - \lambda f_0 = 0$. Further,

$$|f_0(y_0)| = \lim_{n \to \infty} |f_{\nu_n}(y_0)| \geq \lim_{n \to \infty} \left(\delta - \frac{1}{\nu_n}\right)\|f_{\nu_n}\| = \delta \geq \delta \|f_0\|.$$

We also see that $f_0 \neq 0$, since $|f_0(y_0)| \geq \delta > 0$. Thus we have found an $f_0 \neq 0$ such that $A^* f_0 - \lambda f_0 = 0$ and $|f_0(y_0)| \geq \delta \|f_0\|$.

THEOREM 7. *Let A be a completely continuous linear transformation of a reflexive Banach space X into itself. Let $y_0 \in X$ and real numbers $\lambda \neq 0$, $\delta > 0$ be such that the strict inequality* (25) *has solutions $x \in X$. Let S denote the set of all solutions x of the inequality* (23′), *and assume that $0 \notin S$. Then*

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Max}_{\substack{f \in X^* \\ \|A^* f - \lambda f\| = 1}} [f(y_0) - \delta \|f\|]. \tag{27}$$

Furthermore, if σ denotes this common value and if $x_0 \in X$, $f_0 \in X^*$ are such that

$$x_0 \in S, \quad \|x_0\| = \sigma, \quad \|A^* f_0 - \lambda f_0\| = 1, \quad f_0(y_0) - \delta \|f_0\| = \sigma, \tag{28}$$

then

$$(A^* f_0 - \lambda f_0)(x_0) = \sigma. \tag{29}$$

(Consequently, when X is strictly convex[1]) x_0 is uniquely determined by f_0.)

PROOF. According to Case 1 of Theorem 4, $\sigma = \operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\|$ is equal to the supremum of $f(y_0) - \delta \|f\|$, when $f \in X^*$ varies under the condition $\|A^* f - \lambda f\| = 1$. We have to prove that this supremum is actually a maximum.

For every integer $n \geq \frac{1}{\sigma}$, no $x \in X$ can satisfy both $\|x\| \leq \sigma - \frac{1}{n}$ and (23′). According to Case 1 of Theorem 4 [see (19′)], there exists an $f_n \in X^*$ such that

$$|f_n(y_0)| - \delta \|f_n\| > \left(\sigma - \frac{1}{n}\right) \|A^* f_n - \lambda f_n\|.$$

We may assume $\|f_n\| = 1$ and $f_n(y_0) \geq 0$. By reflexivity of X^*, there exists a subsequence $\{f_{\nu_n}\}$ which converges weakly to some $f_0 \in X^*$. We have $\|f_0\| \leq 1$ and

$$\begin{aligned} f_0(y_0) - \delta \|f_0\| \geq f_0(y_0) - \delta &= \lim_{n \to \infty} \{f_{\nu_n}(y_0) - \delta \|f_{\nu_n}\|\} \\ &\geq \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sigma - \frac{1}{\nu_n}\right) \|A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\|. \end{aligned}$$

On the other hand, since A^* is completely continuous, $\{A^* f_{\nu_n}\}$ converges strongly to $A^* f_0$. So $\{A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\}$ converges weakly to $A^* f_0 - \lambda f_0$, and

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sigma - \frac{1}{\nu_n}\right) \|A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\| \geq \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\|.$$

Hence

$$f_0(y_0) - \delta \|f_0\| \geq f_0(y_0) - \delta \geq \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\|.$$

But (23′) has solutions x with $\|x\| = \sigma$, so according to Case 1 of Theorem 4, we must have equality signs in the last formula. Thus

$$f_0(y_0) - \delta \|f_0\| = \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\| \tag{30}$$

---

[1]) X is *strictly convex*, if no two distinct elements x_1, x_2 of X can satisfy $\|x_1\| = \|x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\|$.

and $\|f_0\| = 1$. Consider now any solution x_1 of the strict inequality (25). We have

$$f_0(y_0 + \lambda x_1 - A x_1) \leq \|f_0\| \cdot \|A x_1 - \lambda x_1 - y_0\| < \delta$$

and

$$(A^* f_0 - \lambda f_0)(x_1) > f_0(y_0) - \delta \geq 0.$$

This implies $A^* f_0 - \lambda f_0 \neq 0$. Hence (30) shows that the supremum σ is actually attained as a maximum.

Finally, if $x_0 \in X$ and $f_0 \in X^*$ satisfy (28), then

$$\begin{aligned} \sigma &= \|A^* f_0 - \lambda f_0\| \cdot \|x_0\| \geq (A^* f_0 - \lambda f_0)(x_0) \\ &= f_0(y_0) + f_0(A x_0 - \lambda x_0 - y_0) \geq \sigma + \delta \|f_0\| - \delta \|f_0\| = \sigma \end{aligned}$$

and therefore (29).

Bibliography

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] FAN, K.: Minimax theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 42—47 (1953). — [3] FAN, K.: On systems of linear inequalities. Linear inequalities and related systems (edited by H. W. KUHN and A. W. TUCKER, Annals of Mathematics Study 38, Princeton 1956), 99—156. — [4] FAN, K., I. GLICKSBERG and A. J. HOFFMAN: Systems of inequalities involving convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 617—622 (1957). — [5] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1934. — [6] KNESER, H.: Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 2418—2420 (1952). — [7] LERAY, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Sci. Math. Szeged B **12**, 177—186 (1950). — [8] SCHAUDER, J.: Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. Studia Math. **2**, 183—196 (1930). — [9] ZAANEN, A. C.: Linear analysis. New York-Amsterdam-Groningen 1953.

Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee (U.S.A.)

(Eingegangen am 2. März 1957)

MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 217—226 (1957)

On injective modules

By
KIITI MORITA, YUTAKA KAWADA and HIROYUKI TACHIKAWA

Let A be an associative ring which possesses a unit element 1 and satisfies the minimum condition for left ideals. Recently NAGAO-NAKAYAMA [9] have determined the structure of projective A-modules[1]), and for injective modules they have dealt only with the case where A is an algebra over a field. In the present paper we shall be concerned with injective modules for the general case.

In § 1 we shall state some theorems concerning projective modules; Theorem 1.3 is a generalization of a result obtained in a previous paper [8]. § 2 is devoted to the proofs of the theorems concerning injective modules which are dual to the theorems of § 1 in the sense of S. MACLANE [7]. In § 3 we shall discuss the decomposability of injective modules. Our results are stated as follows. An injective module is determined uniquely up to isomorphism by its semi-simple part and is indecomposable if and only if its semi-simple part is simple; in general an injective module is expressible as a direct sum of indecomposable injective modules. Here the semi-simple part of a left A-module L is defined to be the largest submodule of L which is semi-simple (= completely reducible).

In § 4 we shall discuss an annihilator relation between submodules of L and those of $\mathrm{Hom}(L, Q)$, and determine the structure of the endomorphism ring of Q where Q is an injective module. The former result may be considered as a basis of the duality relation of character modules for quasi-Frobenius rings (cf. [8]), while the latter result is available to derive the theorems in § 3.

As an application of our results, in § 5 we shall give a simple proof to the theorem that A is injective as a left A-module if and only if A is quasi-Frobenius.

Another characterization of quasi-Frobenius rings is obtained also. Any left A-module is isomorphic to a left A-module which is contained in a direct sum of free A-modules if and only if A is quasi-Frobenius.

Throughout this paper we assume that A is a ring which has a unit element and satisfies the minimum condition, and that N is the radical of A. For a left A-module L we denote by $S(L)$ the semi-simple part of L:

$$S(L) = \{x \mid Nx = 0,\ x \in L\}.$$

[1]) "Projective module" = "(M_0)-module", "injective module" = "(M_u)-module". In this paper we shall follow the terminologies of CARTAN-EILENBERG [1], while in the previous paper [8] we used (M_0)-modules and (M_u)-modules due to GASCHÜTZ [5].

§ 1. Projective modules

THEOREM 1.1[2]). Let P_1 and P_2 be projective left A-modules. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which each row is exact, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

If $\operatorname{Ker}\alpha_i < NP_i$, $i=1, 2$, then each such homomorphism φ is an epimorphism or isomorphism according as ϑ is an epimorphism or isomorphism.

Proof. The first part is obvious. Suppose that $\operatorname{Ker}\alpha_i < NP_i$, $i=1, 2$, and that ϑ is an epimorphism. Then we have $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\alpha_2 = \operatorname{Im}\varphi + NP_2$. From this it follows further that $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + N^jP_2$, $j=1, 2, \ldots$, since $P_2 = \operatorname{Im}\varphi + NP_2 = \operatorname{Im}\varphi + N(\operatorname{Im}\varphi + NP_2) = \operatorname{Im}\varphi + N^2P_2$. Therefore φ is an epimorphism since N is nilpotent. Moreover we have $P_1 = \operatorname{Ker}\varphi \oplus P_1'$ and $\varphi' : P_1' \to P_2$ is an isomorphism where $\varphi'(x) = \varphi(x)$ for $x \in P_1'$. If ϑ is an isomorphism, then we have a homomorphism $\psi : P_2 \to P_1$ by putting $\psi(x) = \varphi'^{-1}(x)$ for $x \in P_2$. As has been proved above, ψ must be an epimorphism. Thus we have $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

COROLLARY 1.2[2]). Let L be a left A-module and P a projective left A-module. If $L/NL \cong P/NP$, then there exists an epimorphism $\varphi : P \to L$; in case L is also projective, L is isomorphic to P.

Proof. This is an immediate consequence of Theorem 1.1.

THEOREM 1.3. Let P be a projective left A-module. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which each row is exact, ϑ is an isomorphism and each M_i is finitely generated, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \\ P & \xrightarrow{\alpha_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which φ is an isomorphism.

[2]) After completing the manuscript, we have found that EILENBERG [2] has already obtained these results.

Proof. We have clearly the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{j_1} & P/L_1 & \xrightarrow{\alpha_1'} & M_1 \\ & & \downarrow\vartheta' & & \downarrow\vartheta \\ P & \xrightarrow{j_2} & P/L_2 & \xrightarrow{\alpha_2'} & M_2 \end{array} \qquad \alpha_i = \alpha_i' j_i, \quad i = 1, 2$$

in which $L_i = \operatorname{Ker} \alpha_i$, j_i is the natural homomorphism ($i = 1, 2$) and ϑ' is an isomorphism. Therefore we have only to treat the case where $M_i = P/L_i$ and each α_i is the natural homomorphism j_i.

In this case we can construct, similarly as in [8], the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} P & \xrightarrow{j_1} & P/L_1 & \xrightarrow{k_1} & (P/L_1 + NP) & \xleftarrow{m_1} & P/NP & \xleftarrow{l} & P \\ & & \downarrow\vartheta & & \downarrow\vartheta^* & & \downarrow\varphi_0 & & \downarrow\varphi_1 \\ P & \xrightarrow{j_2} & P/L_2 & \xrightarrow{k_2} & (P/L_2 + NP) & \xleftarrow{m_2} & P/NP & \xleftarrow{l} & P \end{array}$$

in which k_i, m_i, l are all natural homomorphism and ϑ^*, φ_0, φ_1 are isomorphisms. Indeed, the existence of ϑ^* is obvious, and the existence of φ_0 follows easily from the assumption that P/L_i are finitely generated and from the fact that P/NP is semi-simple. Finally the existence of φ_1 is assured by Theorem 1.1.

Since $k_i j_i = m_i l$, $i = 1, 2$, we have

$$k_2 \vartheta j_1(x) = k_2 j_2 \varphi_1(x), \quad \text{for} \quad x \in P. \tag{1}$$

Since P is projective, as is proved in NAGAO-NAKAYAMA [9], P is expressed as a direct sum of indecomposable projective modules $A e_\lambda u_\lambda$ where each e_λ is a primitive idempotent of A and $A e_\lambda u_\lambda \cong A e_\lambda$ for each λ. From (1) we have $\vartheta j_1(x) - j_2 \varphi_1(x) \in (L_2 + NP)/L_2$, and hence we can find elements r_λ of NP such that

$$\vartheta j_1(e_\lambda u_\lambda) = j_2 \varphi_1(e_\lambda u_\lambda) + j_2(e_\lambda r_\lambda).$$

If we put

$$\varphi(\sum a_\lambda e_\lambda u_\lambda) = \varphi_1(\sum a_\lambda e_\lambda u_\lambda) + \sum a_\lambda e_\lambda r_\lambda,$$

where $a_\lambda \in A$, then $\varphi: P \to P$ is a homomorphism since $A e_\lambda u_\lambda \cong A e_\lambda$ and hence $a_\lambda e_\lambda u_\lambda = a_\lambda' e_\lambda u_\lambda \Leftrightarrow a_\lambda e_\lambda = a_\lambda' e_\lambda$. For this φ we have $\vartheta j_1 = j_2 \varphi$. Since $\varphi_0 l = l \varphi$ and φ_0 is an isomorphism, we see by Theorem 1.1 that φ is an isomorphism. This completes our proof.

Remark. The assumption that M_i are finitely generated is not redundant in Theorem 1.3.

§ 2. Injective modules

In this section we shall prove the theorems dual to those of § 1.

THEOREM 2.1. Let Q_1 and Q_2 be injective left A-modules. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q_1 \\ & & \downarrow\vartheta & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q_2 \end{array}$$

in which each row is exact, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q_1 \\ & & \downarrow\vartheta & & \downarrow\varphi \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q_2. \end{array}$$

If $\operatorname{Im}\beta_i > S(Q_i)$[3], $i=1, 2$, then each such homomorphism φ is a monomorphism or isomorphism according as ϑ is a monomorphism or isomorphism.

Proof. The first part is obvious. Suppose that $\operatorname{Im}\beta_i > S(Q_i)$, $i=1, 2$ and ϑ is a monomorphism. Then we have $0=\operatorname{Ker}\varphi\cap\operatorname{Im}\beta_1=\operatorname{Ker}\varphi\cap S(Q_1)$. Since $N^j(\operatorname{Ker}\varphi)<\operatorname{Ker}\varphi$, we have $N^j(\operatorname{Ker}\varphi)\cap S(Q_1)=0$ for $j=1, 2, \ldots$. Since N is nilpotent, we must have $N^j\operatorname{Ker}\varphi=0$ for some j. Then $N(N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi)=0$ and hence $N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi<N^{j-1}\operatorname{Ker}\varphi\cap S(Q)=0$. Thus we have $\operatorname{Ker}\varphi=0$ and φ is a monomorphism.

Let ϑ be now an isomorphism. Since Q_1 is injective there exists a submodule Q_2' of Q_2 such that $Q_2=\operatorname{Im}\varphi\oplus Q_2'$. We define a homomorphism $\psi: Q_2\to Q_1$ by putting $\psi(x)=\varphi^{-1}(x')$, if $x=x'+x''$, $x'\in\operatorname{Im}\varphi$, $x''\in Q_2'$. Then we have clearly $\beta_1\vartheta^{-1}=\psi\beta_2$. Hence we have $\operatorname{Ker}\psi=0$ by the first part of the proof. On the other hand, $\operatorname{Ker}\psi=Q_2'$. Thus $\varphi(Q_1)=Q_2$.

COROLLARY 2.2. Let L be a left A-module and Q an injective left A-module. If $S(L)\cong S(Q)$, then there exists a monomorphism $\varphi: L\to Q$; in case L is also injective, L is isomorphic to Q.

Proof. This is an immediate consequence of Theorem 2.1. Corollary 2.2 shows that an injective module is determined uniquely up to isomorphism by its semi-simple part.

THEOREM 2.3. Let Q be an injective left A-module. Then every diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q \\ & & \downarrow\vartheta & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q \end{array}$$

in which each row is exact, ϑ is an isomorphism and each M_i is finitely generated, can be imbedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q \\ & & \downarrow\vartheta & & \downarrow\varphi \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Q \end{array}$$

in which φ is an isomorphism.

[3] $S(Q)$ means the semi-simple part of Q; cf. the introduction.

Proof. Since M_i are finitely generated, there exists an isomorphism ϑ^* such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\beta_1'} & \beta_1(M_1)+S(Q) \xrightarrow{i} Q \\ \downarrow\vartheta & & \downarrow\vartheta^* \\ M_2 & \xrightarrow{\beta_2'} & \beta_2(M_2)+S(Q) \xrightarrow{i} Q \end{array}$$

is commutative, where $\beta_j = i\beta_j'$, $j=1, 2$ and i is the injection.

Applying Theorem 2.1 to the diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \beta_1(M_1)+S(Q) & \xrightarrow{i} & Q \\ & & \downarrow\vartheta^* & & \\ 0 & \longrightarrow & \beta_2(M_2)+S(Q) & \xrightarrow{i} & Q, \end{array}$$

we see that there exists an isomorphism $\varphi: Q \to Q$ such that $i\vartheta^* = \varphi i$. We have clearly $\beta_2\vartheta = \varphi\beta_1$. This completes our proof.

Remark. In Theorem 2.3 the assumption that M_i are finitely generated is not redundant as is easily shown.

§ 3. The decomposability of injective modules

In this section we shall establish the following theorems.

THEOREM 3.1. An injective left A-module Q is indecomposable if and only if its semi-simple part $S(Q)$ is simple.

THEOREM 3.2. An injective left A-module is expressed as a direct sum of indecomposable injective modules.

We shall begin with

LEMMA 3.3. Let Q be an injective left A-module and let C be a semi-simple submodule of Q. Then a maximal submodule L of Q such that $S(L)=C$, is an injective module with C as its semi-simple part.

Proof. By ZORN's lemma there exists such a maximal submodule L of Q with C as its semi-simple part.

Let f be any homomorphism of a left ideal I of A into L. Then, by ZORN's lemma, there exists a left ideal I_0 which is maximal with respect to the property that f can be extended to a homomorphism of I_0 into L. Let f_0 be a homomorphism of I_0 into L which is an extension of f.

Since Q is injective, there exists an element u of Q such that

$$f_0(a) = au, \qquad \text{for } a \in I_0. \tag{2}$$

Since I_0 is maximal, we have $I_0 = \{a \mid au \in L,\ a \in A\}$. We shall prove that $u \in L$.

Suppose that $u \notin L$. Then there exists a non-negative integer i such that $N^i u \not\subseteq L$, $N^{i+1}u \subseteq L$, where we put $N^0 = A$. If we put $L' = L + N^i u$, then $L \neq L'$ and $L \subset L'$. We shall show that $S(L') = C$.

To prove this it is sufficient to show that any simple submodule of L' is contained in C. Any simple submodule of L' is of the form $Ae_\lambda(v+a_0u)$ where e_λ is a primitive idempotent, and $v\in L$, $a_0\in N^i$. We have clearly $Ne_\lambda=\{x|x(e_\lambda v+e_\lambda a_0u)=0,\ x\in Ae_\lambda\}$. Hence

$$re_\lambda v=-re_\lambda a_0u \tag{3}$$

for any element r of N. Since $a_0\in N^i$, we have $re_\lambda a_0u\in N^{i+1}u\subset L$. Hence $Ne_\lambda a_0\subseteqq I_0$.

Let us put $J_0=\{x|xa_0\in I_0,\ x\in Ae_\lambda\}$. Then $J_0\supseteqq Ne_\lambda$. Hence J_0 is equal to either Ae_λ or Ne_λ. We distinguish two cases.

1) $J_0=Ae_\lambda$. In this case, $e_\lambda a_0\in I_0$ and hence $e_\lambda a_0u\in L$. Therefore $Ae_\lambda(v+a_0u)\subseteqq L$. Since the semi-simple part of L is C, we have $Ae_\lambda(v+a_0u)\subseteqq C$.

2) $J_0=Ne_\lambda$. We shall first show that $xe_\lambda a_0=x'e_\lambda a_0$ for $x,\ x'\in A$ implies $-xe_\lambda v=-x'e_\lambda v$. Because we have $(x-x')e_\lambda a_0=0$ and hence $(x-x')e_\lambda\in J_0=Ne_\lambda$. From (3) we have $(x-x')e_\lambda v=-(x-x')e_\lambda a_0u$, and the right hand side of this expression is equal to zero as is shown above. Thus we have $xe_\lambda v=x'e_\lambda v$. Now we shall define a homomorphism $\varphi: I_0+Ae_\lambda a_0\to L$ by

$$\varphi(x'+xe_\lambda a_0)=f_0(x')-xe_\lambda v.$$

If $xe_\lambda a_0\in I_0$, then we have $xe_\lambda\in J_0=Ne_\lambda$ and hence $f_0(xe_\lambda a_0)=xe_\lambda a_0u=-xe_\lambda v$ by (2) and (3). Therefore φ is single-valued, and hence φ is a homomorphism. Thus f_0 is extended to $\varphi: I_0+Ae_\lambda a_0\to L$. This contradicts the maximality of I_0. Therefore the case 2) is excluded.

Thus we have shown that $S(L')=C$. Since $L'\supset L$, this contradicts to the maximality of L. Therefore we have $u\in L$. This shows that L is injective.

LEMMA 3.4. Let C be a semi-simple left A-module. Then there exists an injective module Q such that $S(Q)=C$.

Proof. By CARTAN-EILENBERG [1], there exists an injective module Q_0 containing C. Hence the lemma follows readily from Lemma 3.3.

LEMMA 3.5. Let a left A module Q be a direct sum of submodules Q_λ. Then Q is injective if and only if each Q_λ is injective.

Proof. Since A is left Noetherian, the proof is easily obtained.

Now we shall proceed to the proofs of Theorems 3.1 and 3.2.

Proof of Theorem 3.1. Let Q be an injective left A-module and let Q be a direct sum of submodules Q_1 and Q_2. Then we have $S(Q)=S(Q_1)\oplus S(Q_2)$ and $S(Q_i)\neq 0$ if $Q_i\neq 0$. This shows that if $S(Q)$ is simple, then Q is indecomposable.

Now suppose that $S(Q)$ is not simple. Then $S(Q)$ is expressed as a direct sum of simple modules C_λ since $S(Q)$ is semi-simple. By Lemma 3.4 for each λ there exists an injective module Q_λ such that $S(Q_\lambda)=C_\lambda$. If we denote by Q' the direct sum of these modules Q_λ, then Q' is injective by Lemma 3.5 and $S(Q')$ is a direct sum of $S(Q_\lambda)=C_\lambda$. Therefore we have $S(Q)\cong S(Q')$. From Corollary 2.2 it follows that $Q\cong Q'$. This shows that if $S(Q)$ is not simple, then Q is decomposable. Thus Theorem 3.1 is proved.

The above consideration shows at the same time that an injective module is expressible as a direct sum of indecomposable injective modules. Thus Theorem 3.2 is proved.

COROLLARY 3.6. Let Ae_λ/Ne_λ, $\lambda=1, \ldots, k$ be the totality of simple left A modules which are not isomorphic one another. Let Q_λ be an injective module such that $S(Q_\lambda)=Ae_\lambda/Ne_\lambda$. Then any injective left A-module is isomorphic to a direct sum of injective modules each of which is isomorphic to some Q_λ.

§ 4. The endomorphism ring of an injective module

We shall first prove the following theorem.

THEOREM 4.1. Let Q be an injective left A-module and L an arbitrary left A-module. If every simple left A-module is isomorphic to a submodule of Q, then for any submodule L_0 of L we have

$$L_0 = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right)$$

where $\mathrm{Hom}(L, Q)$ means the set of all A-homomorphisms of L into Q and $\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right) = \{\varphi \mid \varphi(L_0)=0,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(L, Q)\}$, $\mathrm{Ann}(\Phi_0; L) = \{x \mid x \in L,\ \varphi_0(x)=0 \text{ for all } \varphi_0 \in \Phi_0\}$ for a subset Φ_0 of $\mathrm{Hom}(L, Q)$.

Proof. Let x_0 be any element of L which is not contained in L_0. Then we have $Ax_0+L_0 \neq Nx_0+L_0$; otherwise we would have $Ax_0+L_0=N^i x_0+L_0$, $i=1, 2, \ldots$. Hence $(Ax_0+L_0)/(Nx_0+L_0)$ is a simple module in which the residue class $\{x_0\}$ containing x_0 is not zero. By the assumption on Q there exists a monomorphism $\bar{\chi}$ of $(Ax_0+L_0)/(Nx_0+L_0)$ into Q. Hence there exists a homomorphism χ of Ax_0+L_0 into Q such that $\chi(Nx_0+L_0)=0$, $\chi(x_0) \neq 0$. Since Q is injective, χ is extended to a homomorphism φ of L into Q. For such φ we have clearly $\varphi(L_0)=0$, $\varphi(x_0) \neq 0$. This proves that

$$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right) < L_0.$$

Since by definition we have $L_0 < \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right); L\right)$, the desired relation is proved hereby.

Remark. In case there exists a simple module which is isomorphic to no submodule of Q, Theorem 4.1 fails to be true as is easily shown. In case A is quasi-Frobenius, A is injective as a left A-module and a right A-module (cf. Theorem 5.1 below), and hence the duality relation of character modules for quasi-Frobenius rings [8] is an immediate consequence of Theorem 4.1.

We now proceed to the case $L=Q$.

THEOREM 4.2. Let Q be an injective left A-module. Let Φ and Ψ be the endomorphism ring of Q and $S(Q)$ respectively. If we denote by Φ_N the set of all endomorphisms φ of Q such that $\varphi\left(S(Q)\right)=0$, then Φ_N is a two-sided nilpotent ideal of Φ and the residue class ring Φ/Φ_N is isomorphic to Ψ; more precisely if $N^m=0$, then $\Phi_N^m=0$.

Proof. Since Q is injective, any endomorphism ψ of $S(Q)$ can be extended to an endomorphism φ of Q: $\varphi(x)=\psi(x)$ for $x\in S(Q)$. On the other hand, $\varphi(S(Q))<S(Q)$ for any $\varphi\in\Phi$. Therefore we have a ring isomorphism $\Phi/\Phi_N\cong\Psi$ by the correspondence $\Phi\ni\varphi\to\tilde{\varphi}\in\Psi$ where $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)$ for $x\in S(Q)$.

Let us denote by $S^i(Q)$ the set of elements x of Q such that $N^ix=0$. Then we have $Q=S^m(Q)$, $S(Q)=S^1(Q)$ since $N^m=0$.

We shall prove that

$$\varphi(S^i(Q))<S^{i-1}(Q) \quad \text{for} \quad \varphi\in\Phi_N, \quad i\geq 2. \tag{4}$$

Since $\varphi(S(Q))=0$, there exists a homomorphism $\bar{\varphi}$ of $S^i(Q)/S(Q)$ into Q such that $\bar{\varphi}\chi(x)=\varphi(x)$ for each element x of $S^i(Q)$ where χ is the natural homomorphism of $S^i(Q)$ onto $S^i(Q)/S(Q)$. On the other hand, $N^iS^i(Q)=N[N^{i-1}S^i(Q)]=0$ and hence $N^{i-1}S^i(Q)<S(Q)$. Therefore we have

$$N^{i-1}\bar{\varphi}(S^i(Q)/S(Q))=\bar{\varphi}((N^{i-1}S^i(Q)+S(Q))/S(Q))=0.$$

This shows that $\varphi(S^i(Q))=\bar{\varphi}(S^i(Q)/S(Q))<S^{i-1}(Q)$.

Let φ_j, $j=1, 2, \ldots, m$ be any elements of Φ_N. Then from (4) it follows that $\varphi_m\varphi_{m-1}\cdots\varphi_2\varphi_1(Q)=0$, since $Q=S^m(Q)$. Thus we have $\Phi_N^m=0$. This completes the proof of Theorem 4.2.

COROLLARY 4.3. If an endomorphism ψ of $S(Q)$ is idempotent, then there exists an endomorphism φ of Q such that $\varphi(x)=\psi(x)$ for $x\in S(Q)$ and $\varphi(Q)$ is a direct summand of Q whose semi-simple part coincides with $\psi(S(Q))$.

Proof. The first assertion follows readily from the nilpotency of Φ_N (cf. M. DEURING [4], p. 16). Hence we have also $Q=\varphi(Q)\oplus(1-\varphi)(Q)$. From this we have further $S(Q)=S[\varphi(Q)]\oplus S[(1-\varphi)(Q)]$. On the other hand, $\varphi(Q)>\psi(S(Q))$, $(1-\varphi)(Q)>(1-\psi)(S(Q))$ and hence $S[\varphi(Q)]>\psi(S(Q))$, $S[(1-\varphi)(Q)]>(1-\psi)(S(Q))$. Since $S(Q)=\psi(S(Q))\oplus(1-\psi)(S(Q))$, we have $S[\varphi(Q)]=\psi(S(Q))$. This proves our corollary.

Corollary 4.3 yields actually another proof of Theorem 3.1 and Lemma 3.4.

The theorems concerning projective modules which are dual to Theorems 4.1 and 4.2 are stated as follows.

THEOREM 4.1′. Let P be a projective left A-module and L a left A-module. For a submodule L_0 of L we denote by Φ_0 the set of homomorphisms φ of P into L such that $\varphi(P)<L_0$. If every simple left A-module is isomorphic to a quotient module of P, then we have

$$L_0=\sum\varphi(P)$$

where φ ranges over the set Φ_0.

THEOREM 4.2′. Let P be a projective left A-module, and let Φ and Ψ be the endomorphism ring of P and P/NP respectively. If we denote by Φ_N the set of all endomorphisms φ of P such that $\varphi(P)<NP$, then Φ_N is a two-sided nilpotent ideal of Φ and the residue class ring Φ/Φ_N is isomorphic to Ψ.

§ 5. Quasi-Frobenius rings

As an application of our results in §§ 3 and 4 we can give a simple proof to the following theorem which is due to EILENBERG-NAKAYAMA [3] and IKEDA-NAKAYAMA [6], cf. also our previous paper [8].

THEOREM 5.1. A ring A which possesses a unit element and satisfies the minimum condition is an injective module as a left A-module if and only if A is a quasi-Frobenius ring.

Proof. The "if" part is proved in our previous paper [8]. We shall prove the "only if" part.

Suppose that A is injective as a left A-module. Any endomorphism φ of the left A-module A can be expressed as $\varphi(x) = xa$ with $a \in A$, and if we denote this a by a_φ, then the correspondence $\varphi \to a_\varphi$ yields an inverse-isomorphism λ of Φ onto A, where Φ is the ring of endomorphisms of A. Following the notation of NAKAYAMA let us put for a subset K of A

$$r(K) = \{x \mid Kx = 0,\ x \in A\}, \quad l(K) = \{x \mid xK = 0,\ x \in A\}.$$

Then by applying Theorem 4.2 to the case $Q = A$ we have

$$r(r(N)) = N, \tag{5}$$

since the semi-simple part of A coincides with $r(N)$, and $\lambda(\Phi_N) = N$.

Since Ae is indecomposable for every primitive idempotent e of A and is injective, its semi-simple part $r(N)e$ is simple by Theorem 3.1. Therefore if e' is another primitive idempotent of A, then by Corollary 2.2 we have

$$Ae \cong Ae' \Leftrightarrow r(N)e \cong r(N)e'. \tag{6}$$

From (6) we see that every simple left A-module is isomorphic to $r(N)e$ with a suitable idempotent e. Therefore we have by Theorem 4.1

$$r(N) = l(N). \tag{7}$$

For the character module of $r(N)e$ we have

$$\mathrm{Char}_A(r(N)e) \cong eA/r(r(N)e) \cap eA$$

since A is injective. From (5) it follows that $r(r(N)e) \cap eA = eN$. Hence we have

$$\mathrm{Char}_A(r(N)e) \cong eA/eN. \tag{8}$$

On the other hand, $\mathrm{Char}_A(eA/eN) \cong Ae \cap l(eN) = l(N)e$ and hence we have by (7)

$$\mathrm{Char}_A(eA/eN) \cong r(N)e. \tag{9}$$

Thus the character module of every simple left A-module and that of every simple right A-module are shown to be simple. Therefore we see by Theorem 2.1 in our previous paper [8] that A is quasi-Frobenius. This completes the proof of Theorem 5.1.

We shall give another characterization of quasi-Frobenius rings, which is closely connected with a result obtained in [8].

THEOREM 5.2. A ring A which possesses the unit element and satisfies the minimum condition is quasi-Frobenius if and only if any module is isomorphic to a submodule of a direct sum of free A-modules (or projective module) (resp. any module is isomorphic to a quotient module of an injective module).

Proof. If A is quasi-Frobenius, projective modules are identical with injective modules. Conversely, suppose that any module is contained in a projective module. Let Q be any indecomposable injective module. Then there exists a projective module P containing Q. Since Q is injective, there exists a submodule Q_0 such that $P=Q\oplus Q_0$. Hence Q is projective. Since Q is indecomposable, Q is isomorphic to Ae with a suitable primitive idempotent e. Therefore A is injective as a left A-module, since by Lemma 3.4 there exists, for any simple module Ae'/Ne', an injective module Q such that $S(Q)\cong Ae'/Ne'$. This shows by Theorem 5.1 that A is quasi-Frobenius. The proof is carried out similarly for the case where any module is isomorphic to a quotient module of an injective module.

Added in proof. Prof. R. BRAUER has communicated to one of the authors, in a reply to a letter in which some of our results were reported, that he had also obtained similar results as our Theorems 1.3, 2.3 and 3.1.

References

[1] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebras. Princeton Univ. Press 1956. — [2] EILENBERG, S.: Homological dimension and syzygies. Ann. of Math. **64**, 328—336 (1956). — [3] EILENBERG, S., and T. NAKAYAMA: On the dimension of modules and algebras II (Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings). Nagoya Math. J. **9**, 1—16 (1955). — [4] DEURING, M.: Algebren. Ergebn. Math. **4** (1934). — [5] GASCHÜTZ, W.: Über den Fundamentalsatz von MASCHKE zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [6] IKEDA, M., and T NAKAYAMA: On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Bull. Amer. Math. Soc. **60**, 15—19 (1954). — [7] MACLANE, S.: Duality for groups. Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 485—516 (1950). — [8] MORITA, K., and H. TACHIKAWA: Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings. Math. Z. **65**, 414—428 (1956). — [9] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164—170 (1953).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 2. März 1957)

CHEN, YUNG-MING
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 227–244 (1957)

Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems

By

CHEN YUNG-MING

1. The object of this paper is to prove some integrability theorems of functions defined by trigonometrical series and power series with monotone coefficients, and Laplace transforms of monotonic decreasing functions by the method of asymptotic approximations.

Suppose λ_n is positive and decreases steadily to zero as $n \to \infty$; then the series

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos n x, \tag{1.1}$$

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin n x \tag{1.2}$$

converge uniformly in any interval $0<\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$. R. P. BOAS ([1] (I), (III)), G. SUNOUCHI [11], B. SZ.-NAGY [13], S. IZUMI and M. SATÔ [8], and P. HEYWOOD ([6], (I), (II)) have investigated the necessary and sufficient conditions of the integrability of $x^{-\gamma}f(x)$ and $x^{-\gamma}g(x)$ in the sense of LEBESGUE and in the sense of CAUCHY. Those are only concerned with the asymptotic behaviour of functions on the right hand side of a singular point. From another point of view, in a previous note [2], the author has proved the following theorems:

THEOREM (A). If $f(x)$ is defined by (1.1), $p>1$, $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$\sum n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p < \infty. \tag{1.3}$$

THEOREM (B). If $g(x)$ is defined by (1.2), $p>1$, $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent. It may easily be seen that the „Geltungsbereich" of γ from these theorems can be extended to $1-p<\gamma \leq 0$, from which when $\gamma=0$ the results have previously been given by HARDY and LITTLEWOOD ([5] Theorem 5), [4]. I shall now state the following theorems:

THEOREM 1. Under the same condition of Theorem (A), with the exception of $1-p<\gamma<0$, $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent.

THEOREM 2. Under the same condition of Theorem (B), with the exception of $1-p<\gamma<0$, $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent.

For in the previous note [2], in the necessary condition (a) of the exampling proof, I assumed that $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$, $0<\gamma<1$. It follows then that $g(x)\in L^p(0,\pi)$; so that the function $g(x)$ defined by the series (1.2) can be term by term integrated. In fact, if we assume $1-p<\gamma<0$, $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p\in L(0,\pi)$, we may use HÖLDER's inequality to obtain

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^\pi |g(t)|\,dt &= \int_0^\pi t^{-\gamma/p}\,|g(t)|\cdot t^{\gamma/p}\,dt\\ &\leq \left(\int_0^\pi t^{-\gamma}|g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\pi t^{\gamma/(p-1)}\,dt\right)^{(p-1)/p}\\ &<\infty\,.\end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

So we still have $g(x)\in L(0,\pi)$, and that the series (1.2) can be term by term integrated. By following the same argument, without any alteration, we may obtain the results just stated.

The method we have used in Theorem 1 and Theorem 2 is merely by certain asymptotic approximations analogous to the method given by HARDY and LITTLEWOOD. On the other hand, MULHOLLAND [*10*] has generalized a series of results of HARDY and LITTLEWOOD, and the kernel of his „Verschärfungsmethoden" is to use the function $\Phi(x)$ which is also of interest in the present paper.

Let $\Phi(x)$ be an increasing function, satisfying:

(1.5a) $\Phi(x)$ is a non-negative function, such that $\Phi(x)/x$ is increasing as x is increasing from zero to infinity;

(1.5b) There exists a positive constant $k>1$, such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing as x is increasing from zero to infinity.

2. Let us consider the following theorems, in which $\gamma=0$ are included in certain results of MULHOLLAND [*10*].

THEOREM 3. Under the same condition of Theorem (A) (i.e. $0<\gamma<1$), a sufficient condition[1]) of $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of the series

$$\sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n)\,. \tag{2.1}$$

THEOREM 4. Under the same condition of Theorem (B), a necessary and sufficient condition that $x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of (2.1).

In particular cases, we have the following theorems which are also of interest.

THEOREM 5. If $m>0$, $0<\gamma<1$, then a sufficient condition that $x^{-\gamma}f(x)(1+\log^+ f(x))^m$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma-1}\lambda_n(1+\log^+ n\lambda_n)^m. \tag{2.2}$$

[1]) Cf. § 7 (d) below, the condition is not necessary.

9272-68 16 A

THEOREM 6. If $m>0$, $0<\gamma<1$, then a necessary and sufficient condition that $x^{-\gamma}g(x)\big(1+\log^+ g(x)\big)^m \in L(0,\pi)$ is the convergence of (2.2).

THEOREM 7. If $p>1$, $0<\gamma<1$, m is any real number, then a necessary and sufficient condition of $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p\big(1+\log^+ g(x)\big)^m$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p(1+\log^+ n\lambda_n)^m. \tag{2.3}$$

THEOREM 8. If $p>1$, $0<\gamma<1$, m is any real number, then a sufficient condition of $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p\big(1+\log^+ f(x)\big)^m$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of (2.3).

By combining Theorem 3 and Theorem 4, we have the following theorem concerning functions of a complex variable:

THEOREM 9. Suppose that (i) $0<\gamma<1$; (ii) $c_0\geq c_1\geq\cdots\to 0$;

$$A(\vartheta)=\sum_0^\infty c_n e^{ni\vartheta}. \tag{2.4}$$

Then a sufficient condition of $\vartheta^{-\gamma}\Phi\big(|A(\vartheta)|\big)$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(nc_n). \tag{2.5}$$

Consider a special case of Theorem 9:

THEOREM 10. Under the same condition of Theorem 9, with $m>0$, $p\geq 1$, a sufficient condition that $\vartheta^{-\gamma}\{A(\vartheta)\}^p\big(1+\log^+ A(\vartheta)\big)^m$ is integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of

$$\sum_n n^{\gamma+p-2}c_n^p(1+\log^+ nc_n)^m. \tag{2.6}$$

3. Preliminary Lemmas. In the following seven lemmas, some of which are well-known, and since they have independent interest and are the kernels of our problems, I shall state more than what we actually need.

LEMMA 1 [*10*]. Let $\Phi(x)$ be the function defined in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b). If $c>1$, $\lambda_n\geq 0$, then

$$\sum_1^\infty n^{-c}\Phi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\leq K\sum_1^\infty n^{-c}\Phi(n\lambda_n), \tag{3.1}$$

where $K=K(\Phi,c)$ depends on Φ and c.

LEMMA 2 [*10*]. Under the same condition of Lemma 1, and if

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt \qquad \big(h(t)\geq 0\big), \tag{3.2}$$

then we have

$$\int_0^a x^{-c}\Phi\big(H(x)\big)\,dx\leq K\int_0^a x^{-c}\Phi\big(xh(x)\big)\,dx, \tag{3.3}$$

where $K=K(\Phi,c)$, $a\geq 0$.

9272-68 16 A

LEMMA 3. Suppose $\Phi(x)$ is the function defined in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b), $c<1$, and that

$$\Re(x)=\int_{\lambda}^{a} h(t)\,dt \qquad (h(t)\geq 0,\ h(t)\in L(0,a)). \tag{3.4}$$

Then we have

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \leq K\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)\,dx, \tag{3.5}$$

where $K=K(\Phi,c)$, $a\geq 0$.

Proof. Let us consider at first some properties of the function $\Phi(x)$. Let

$$\varphi(t)=\Phi(t)/t, \tag{3.6}$$

then $\varphi(t)$ is increasing as t is increasing from zero to infinity. Since $\Phi(t)$ is a monotonic increasing function, $\Phi'(t)$ exists almost everywhere in $(0,a)$ ([15] § 11.42). Differentiating (3.6), we obtain

$$\begin{cases} \Phi'(t) > \Phi(t)/t \\ \qquad = \varphi(t) \qquad (0<t\leq a). \end{cases} \tag{3.7}$$

Since $\varrho(t)=\Phi(t)/t^k$ is decreasing, by differentiating $\varrho(t)$, we obtain

$$\Phi'(t) < k\,\Phi(t)/t = k\,\varphi(t) \qquad (k>1,\ 0<t\leq a). \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \\ = (1-c)^{-1}a^{1-c}\,\Phi\big(\Re(a)\big) + (1-c)^{-1}\int_0^a x^{1-c}h(x)\,\Phi'\big(\Re(x)\big)\,dx \\ = (1-c)^{-1}\displaystyle\int_0^a x^{1-c}h(x)\,\Phi'\big(\Re(x)\big)\,dx \\ \leq K\displaystyle\int_0^a x^{1-c}h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\,dx \\ = K\displaystyle\int_0^a x^{-c}\big\{x\,h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\big\}\,dx, \end{cases} \tag{3.9}$$

$K=K(\Phi,c)$ by (3.8). Let $t\geq 1$. Since $\varphi(u)$ is increasing, we have

$$\begin{cases} x\,h(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big) = t^{-1}\big\{t\,x\,h(x)\cdot\varphi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leq t^{-1}\,\mathrm{Max}\big\{t\,x\,h(x)\,\varphi\big(t\,x\,h(x)\big),\ \Re(x)\,\varphi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leq t^{-1}\big\{\Phi\big(t\,x\,h(x)\big)+\Phi\big(\Re(x)\big)\big\} \\ \qquad\qquad \leq t^{k-1}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)+t^{-1}\,\Phi\big(\Re(x)\big). \end{cases} \tag{3.10}$$

By substituting (3.10) in (3.9), we have

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx \leq K\Big\{t^{k-1}\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(x\,h(x)\big)\,dx + t^{-1}\int_0^a x^{-c}\,\Phi\big(\Re(x)\big)\,dx\Big\}, \tag{3.11}$$

where $K = K(\Phi, c)$; from (3.11) we obtain

$$\int_0^a x^{-c}\,\Phi(\Re(x))\,dx \leq \left\{\frac{K t^{k-1}}{1 - t^{-1}K}\right\} \int_0^a x^{-c}\,\Phi(x\,h(x))\,dx. \tag{3.12}$$

Finally we may assume $t > 1$ is sufficiently large and arbitrarily fixed. This completes the proof of Lemma 3.

4. Proof of Theorems 3—10 and Further Asymptotic Inequalities. In what follows I shall denote positive constants by K_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, either absolute constants or, if not specially mentioned, constants depending on certain functions and other numbers which are not necessary to explain in detail. I shall deduce an exampling proof of Theorem 4. The proof of Theorem 3 is analogous. It should be remarked that Theorems 5—10 are merely special cases of Theorem 3 and Theorem 4.

Let us denote

$$L_n = \sum_1^n \lambda_\nu. \tag{4.1}$$

We have

$$|g(x)| \leq K_1 L_n \quad [2]) \qquad (\pi/(n+1) \leq x \leq \pi/n). \tag{4.2}$$

Denote $\Phi|u| = \Phi(|u|)$, in virtue of Lemma 1, we obtain

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi x^{-\gamma}\,\Phi|g(x)|\,dx \\ &\leq K_2 \sum_2^\infty \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} n^\gamma\,\Phi(L_n)\,dx \\ &\leq K_3 \sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi(L_n) \\ &\leq K_4 \sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n). \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

This completes the proof of the sufficient condition of Theorem 4.

For the proof of the necessary condition, we require the following lemma:

LEMMA 4. [3]) $$\int_{1/n}^\pi \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq K\,n\,\lambda_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.4}$$

Proof. We have

$$g(t) \in L(1/n, \pi),$$

[2]) Cf. ([2], § 2.11).

[3]) I wish to take this opportunity of thanking the referee very gratefully for supplying this proof. This lemma was originally an unestablished relation given by the author in the form of a conjecture.

for every $n=1, 2, \ldots$. By ([16], p. 111, § 5.13),

$$
\left\{
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \left\{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} \Big/ 2\sin\frac{t}{2} \\
&= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \left\{1 - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} \Big/ 2\sin\frac{t}{2} \\
&\quad + \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \frac{\cos\frac{t}{2} - 1}{2\sin\frac{t}{2}} \\
&= \sum_1^\infty \Delta\lambda_n \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\lambda_1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{4} \\
&= \mathrm{I} - \mathrm{II}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.5}
$$

$$
|g(t)| \geq \mathrm{I} - \mathrm{II}. \tag{4.6}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt &\geq \sum_{\nu=1}^\infty \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{\lambda_1}{2}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{4}}{t}\,dt \\
&\geq C_1 \sum_{\nu=1}^\infty \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt - C_2,
\end{aligned}
\right. \tag{4.7}
$$

where

$$
C_2 = \frac{\lambda_1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{4}}{t}\,dt. \tag{4.8}
$$

Here, we can take $n \leq \nu \leq 6n$, $\quad \frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}} \geq \frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}} \geq \frac{2\pi}{6n+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{n}$.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt &\geq \int_{\frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}}}^{\frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}}} (\ldots)\,dt \\
&\geq \left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{4\pi}\right)^2 \int_{\frac{2\pi}{\nu+\frac{1}{2}}}^{\frac{4\pi}{\nu+\frac{1}{2}}} \sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}\,dt \\
&= \frac{\nu+\frac{1}{2}}{16\pi} \geq \frac{n}{16\pi}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.9}
$$

If $\nu > 6n$, we have

$$(4.10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \cdots \geq \int_{1/n}^{2/n} \cdots \\ \displaystyle\geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_{1/n}^{2/n} \sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}\,dt \\ \displaystyle= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left\{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_{1/n}^{2/n} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right) t\,dt\right\} \\ \displaystyle\geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left\{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\cdot 2\right\} \geq \frac{n}{12}. \end{cases}$$

It follows that

$$(4.11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq C_1 \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{t^2}\,dt - C_2 \\ \displaystyle\geq C_3 \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta\lambda_\nu \int_{1/n}^{\pi} \frac{dt}{t^2} - C_2 \qquad (n \geq N) \\ \displaystyle\geq C_4\, n\,\lambda_n - C_2. \end{cases}$$

If $g \not\equiv 0$, we have

$$(4.12)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq C_5 \qquad (n \geq N).$$

Now, if $n\lambda_n \geq \frac{2C_2}{C_4}$ $(n \geq N)$, then

$$(4.13)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq \frac{C_4}{2}\, n\,\lambda_n + C_2 - C_2 = \frac{C_4}{2}\, n\,\lambda_n.$$

If, for all n, $n\lambda_n < \frac{2C_2}{C_4}$, then we have

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq C_5 \\ \displaystyle\geq \frac{C_5}{\frac{2C_2}{C_4}} \cdot n\,\lambda_n \\ \displaystyle= \frac{C_4 C_5}{2C_2}\, n\,\lambda_n. \end{cases}$$

Therefore, in any case, we always have

$$(4.15)\qquad \int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt \geq K\, n\,\lambda_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

After establishing Lemma 4, we are now in a position to prove the necessary condition. By the monotone properties (1.5a), (1.5b) of Φ and in virtue of Lemma 3, Lemma 4, we have

$$
(4.16)\quad \begin{cases} \sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n) \le K \sum n^{\gamma-2}\,\Phi\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt\right) \\ \qquad \le K \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} x^{-\gamma}\,\Phi\left(\int_{x}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt\right) dx \\ \qquad \le K \int_{0}^{\pi} x^{-\gamma}\,\Phi\left(\int_{x}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t}\,dt\right) dx \\ \qquad \le K \int_{0}^{\pi} x^{-\gamma}\,\Phi\left(|g(x)|\right) dx. \end{cases}
$$

This completes the proof of the necessary condition of Theorem 4.

Now we are considering another type of asymptotic approximations. Suppose $\Psi(x)$ is positive when x is positive, and satisfying:

(4.17a) $\Psi(x)$ is increasing to infinity when x is increasing from zero to infinity;

(4.17b) $\Psi(x)/x$ is decreasing to zero when x is increasing from zero to infinity.

Then we may prove the analogous lemmas for $\Psi(x)$. The argument may be given in the similar manner as in Lemmata 1—3. The results are:

LEMMA 5. If $c>1$, $\lambda_n \ge 0$, then

$$
(4.18)\qquad \sum_{1}^{\infty} n^{-c}\,\Psi(\lambda_1+\cdots+\lambda_n) \ge K \sum_{1}^{\infty} n^{-c}\,\Psi(n\lambda_n),
$$

where $K=K(\Psi, c)$.

LEMMA 6. If $c>1$, $0<a\le\infty$, then

$$
(4.19)\qquad \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(H(x)\big)\,dx \ge K \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(x\,h(x)\big)\,dx,
$$

where $K=K(\Psi, c)$, $H(x)$ and $h(x)$ are defined by (3.2).

LEMMA 7. If $c<1$, $0<a\le\infty$, then

$$
(4.20)\qquad \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(\Re(x)\big)\,dx \ge K \int_{0}^{a} x^{-c}\,\Psi\big(x\,h(x)\big)\,dx,
$$

where $K=K(\Psi, c)$, and $\Re(x)$ is defined by (3.4).

5. Asymptotic Integrability Theorems for Laplace Transforms of Monotonic Decreasing Functions. Let us suppose that the non-increasing function $\vartheta(t)$ is positive, and that $e^{-xt}\vartheta(t)$ is $L(0, \infty)$ for every positive value

of x. Denote the Laplace transform of $\vartheta(t)$ by ω:

$$\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\vartheta(t)\,dt. \tag{5.1}$$

P. HEYWOOD [7][4]) has proved two theorems concerning two necessary and sufficient conditions of $x^{-\gamma}\omega(x)$ to be integrable $L(0, 1)$ and $L(1, \infty)$ respectively:

THEOREM (C). If $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\omega(x)\in L(0, 1)$ if and only if $t^{\gamma-1}\vartheta(t)\in L(1, \infty)$.

THEOREM (D). If $0<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\omega(x)\in L(1, \infty)$ if and only if $t^{\gamma-1}\vartheta(t)\in L(0, 1)$.

It is natural to inquire: What are the corresponding theorems for $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p$ [5]) and $x^{-\gamma}\Phi(\omega(x))$? And this is just what we require to know:

THEOREM 11. Suppose that $\Phi(x)$ is the given function given in § 1, satisfying (1.5a) and (1.5b), that $-\infty<\gamma<1$, and that

(i) $e^{-xt}\vartheta(t)\in L(0, \infty)$ $(x>0)$;

(ii) $\vartheta(t)>0$, as $t>0$, and is a non-increasing function;

(iii) $\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\vartheta(t)\,dt$.

Then $x^{-\gamma}\Phi(\omega(x))$ is integrable $L(0, 1)$ if and only if

$$t^{\gamma-2}\Phi\left(t\vartheta(t)\right)\in L(1, \infty). \tag{5.2}$$

By the method of asymptotic approximations, we can expand the function $\omega(x)$ as the sum of the sequence of functions in the following form:

$$\left\{\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_0^\infty \int_n^{n+1} e^{-xt}\vartheta(t)\,dt\\ &= \sum_0^\infty h_n(x)\,e^{-nx}\\ &= \sum_0^\infty h_n(x)\,(e^{-x})^n,\end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

where

$$\vartheta(n)\geq h_n(x)\geq e^{-x}\vartheta(n+1)>0 \qquad (0\leq x<1), \tag{5.4}$$

and

$$h_0(x)<\infty \qquad (0\leq x<1)\ [6]). \tag{5.5}$$

(a) To show that the condition is necessary: Suppose $x^{-\gamma}\Phi\left(\omega(x)\right)\in L(0, 1)$. Then it follows that $\omega(x)\in L(0, 1)$.

$$\int_1^\infty t^{\gamma-2}\Phi\left(t\vartheta(t)\right)dt \leq K_5\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\Phi\left(n\vartheta(n)\right). \tag{5.6}$$

[4]) For particular cases, cf. also ([14] formulae 350, 360).

[5]) For $\gamma=0$, cf. HARDY and LITTLEWOOD ([3] Theorem 23 with $p=q$).

[6]) Since $e^{-1}\int_0^1 \vartheta(t)\,dt<\omega(1)<\infty$; $\quad\vartheta(t)\in L(0, 1)$.

Let

$$\tau(x)=\int_x^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt \qquad (0\le x<1). \tag{5.7}$$

By (5.3) and (5.4), we have

$$\begin{cases} \tau(n^{-1})=\displaystyle\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt \\ \quad \ge K_6\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_{1/n}^{1} t^{-1}\vartheta(m)\,e^{-mt}\,dt \\ \quad \ge K_6\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\int_{1}^{n} s^{-1}\vartheta(m)\,e^{-ms/n}\,ds \\ \quad \ge K_6\,n\,\vartheta(n)\displaystyle\int_{1}^{n} s^{-1}e^{-s}\,ds \\ \quad \ge K_7\,n\,\vartheta(n) \qquad (n=2,3,\ldots). \end{cases} \tag{5.8}$$

Combining (5.6) and (5.8), and in virtue of Lemma 3, we have:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^{\infty} t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\vartheta(t)\big)\,dt \le K_8\sum_1^{\infty} n^{\gamma-2}\,\Phi\big(\tau(n^{-1})\big)^{7}) \\ \qquad\qquad \le K_9\displaystyle\sum_1^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^{-\gamma}\,\Phi\big(\tau(x)\big)\,dx \\ \qquad\qquad \le K_9\displaystyle\int_0^1 x^{-\gamma}\,\Phi\big(\tau(x)\big)\,dx \\ \qquad\qquad \le K_{10}\displaystyle\int_0^1 x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx. \end{cases} \tag{5.9}$$

This completes the proof of the necessary condition (a).

(b) To show that the condition is sufficient:

When $\dfrac{1}{n+1}\le x\le\dfrac{1}{n}$,

$$\begin{cases} \omega(x)=\displaystyle\int_0^{n+1} e^{-xt}\vartheta(t)\,dt+\int_{n+1}^{2(n+1)}+\int_{2(n+1)}^{3(n+1)}+\cdots \\ \quad \le\left(\dfrac{e}{e-1}\right)\displaystyle\int_0^{n+1} e^{-xt}\vartheta(t)\,dt \\ \quad =\left(\dfrac{e}{e-1}\right)\displaystyle\sum_0^{n+1} h_i(x)\,(e^{-x})^i \\ \quad \le K_{11}\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\vartheta(m),^{8}) \end{cases} \tag{5.10}$$

[7]) Since $1\cdot\vartheta(1)\le k\cdot 2\cdot\vartheta(2)$, the first term in the summation may be neglected. By (5.8), (1.5a), (1.5b) it follows that $\Phi(n\,\vartheta(n))\le K\,\Phi(\tau(n^{-1}))$.

[8]) In virtue of (5.4), (5.5), and (ii) of Theorem 11, the first term $\vartheta(0)$ and the last term $\vartheta(n+1)$ may be neglected.

where $K_{11}=K_{11}(\vartheta)$. By Lemma 1, we obtain

$$
\left\{\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx &= \sum_1^\infty \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx \\
&\le K_{12}\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi\big(\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)\big) \\
&\le K_{13}\sum_1^\infty n^{\gamma-2}\,\Phi\big(n\,\vartheta(n)\big) \\
&\le K_{14}\int_1^\infty t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\,dt.
\end{aligned}\right. \tag{5.11}
$$

Thus the proof of the sufficient condition of Theorem 11 is complete. It is very interesting to consider some special cases of Theorem 11:

THEOREM 12. Under the same condition of Theorem 11, and in addition, if $p\ge 1$, $m>0$, then

$$
x^{-\gamma}\big(1+\log^+\omega(x)\big)^m\{\omega(x)\}^p\in L(0,1) \tag{5.12}
$$

if and only if

$$
t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p\big(1+\log^+ t\,\vartheta(t)\big)^m\in L(1,\infty). \tag{5.13}
$$

In particular case,

THEOREM 13. If $p>1$, $-\infty<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p$ is integrable $L(0,1)$ if and only if $t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p$ is integrable $L(1,\infty)$.

Corresponding to Theorem (D), we shall now prove the following theorem:

THEOREM 14. Under the same condition of Theorem 11 (i.e. $-\infty<\gamma<1$),

$$
x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\in L(1,\infty) \tag{5.14}
$$

if and only if

$$
t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\in L(0,1). \tag{5.15}
$$

Proof. (a) To show that the condition is necessary:

$$
\left\{\begin{aligned}
\omega(n) &= \int_0^\infty e^{-nt}\,\vartheta(t)\,dt \\
&\ge e^{-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\vartheta(t)\,dt \\
&\ge K_{15}\,\vartheta(1/n)/n,
\end{aligned}\right. \tag{5.16}
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\,dt &= \sum_1^\infty \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\,dt \\
&\le K_{16}\sum_1^\infty n^{-\gamma}\,\Phi\big(\vartheta(1/n)/n\big) \\
&\le K_{17}\sum_1^\infty n^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(n)\big) \\
&\le K_{18}\int_1^\infty x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx.
\end{aligned}\right. \tag{5.17}
$$

(b) To show that the condition is sufficient: Denote

$$\Theta(t)=\int_0^t \vartheta(u)\,du. \tag{5.18}$$

$$\begin{cases} \omega(1/t)=\int_0^\infty e^{-u/t}\,\vartheta(u)\,du \\ \quad \le \int_0^t \cdots + \vartheta(t)\int_t^\infty e^{-u/t}\,du \\ \quad \le \int_0^t \vartheta(u)\,du + t\,\vartheta(t) \\ \quad \le 2\Theta(t). \end{cases} \tag{5.19}$$

By putting $x=1/t$, and in virtue of Lemma 2, we therefore have:

$$\begin{cases} \int_1^\infty x^{-\gamma}\,\Phi\big(\omega(x)\big)\,dx=\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(\omega(1/t)\big)\,dt \\ \quad \le K_{19}\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(\Theta(t)\big)\,dt \\ \quad \le K_{20}\int_0^1 t^{\gamma-2}\,\Phi\big(t\,\vartheta(t)\big)\,dt. \end{cases} \tag{5.20}$$

Thus the proof of the sufficient condition of Theorem 14 is complete. It is also of interest to consider some special cases of Theorem 14:

THEOREM 15. If $p>1$, $-\infty<\gamma<1$, then $x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p\in L(1,\infty)$ if and only if $t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p\in L(0,1)$.

THEOREM 16. If $p\ge 1$, $m>0$, $-\infty<\gamma<1$, then

$$x^{-\gamma}\{\omega(x)\}^p\big(1+\log^+\omega(x)\big)^m\in L(1,\infty) \tag{5.21}$$

if and only if

$$t^{\gamma+p-2}\{\vartheta(t)\}^p\big(1+\log^+\vartheta(t)\big)^m\in L(0,1). \tag{5.22}$$

6. Analogous Theorems for Power Series of Monotonic Decreasing Coefficients. The following theorem was proved by HARDY and LITTLEWOOD ([3] Theorem 15)[9]:

THEOREM (E). Suppose that c_n is positive for all values of n, that the radius of convergence of the series $\sum c_n x^n$ is at least 1, that $F(x)$ is defined by

$$F(x)=\sum_0^\infty c_n x^n, \tag{6.1}$$

[9]) Cf. also HEYWOOD ([7] Theorem 1).

for $0 \leq x < 1$, and that $0 < \gamma < 1$. Then $(1-x)^{-\gamma} F(x) \in L(0, 1)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} c_n$ is convergent.

It is natural to inquire: What is the corresponding theorem for $(1-x)^{-\gamma} \Phi(F(x))$? I shall now prove an analogous theorem for power series of monotone coefficients.

THEOREM 17. Suppose that c_n is positive or zero and is ultimately non-increasing[10]), that $F(x)$ is defined by (6.1) for $0 \leq x < 1$, and that $-\infty < \gamma < 1$. Then

$$(1-x)^{-\gamma} \Phi(F(x)) \in L(0, 1) \tag{6.2}$$

if and only if

$$\sum n^{\gamma-2} \Phi(n c_n) < \infty. \tag{6.3}$$

In particular,

THEOREM 18. Under the same condition of Theorem 17, with $m > 0$, $p \geq 1$, $1 - p \leq \gamma < 1$,

$$(1-x)^{-\gamma} \{F(x)\}^p \left(1 + \log^+ F(x)\right)^m \in L(0, 1) \tag{6.4}$$

if and only if

$$\sum_n n^{\gamma+p-2} c_n^p (1 + \log^+ n c_n)^m < \infty. \tag{6.5}$$

It can easily be seen from the following argument that the result of Theorem 17 is still valid if a finite number of the coefficients c_n are negative[11]). Theorem 17 breaks down when $\gamma = 1$. This may be justified by setting $F(x) \equiv 1$. For the sake of clarity, and without loss of generality, we now assume $c_0 \geq c_1 \geq \cdots$.

Proof of Theorem 17. (a) To show that the condition is necessary: Setting $1 - x = y$, in virtue of

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \tag{6.6}$$

we have, if $1/n \leq y \leq 1/(n+1)$,

$$\begin{cases} F(1-y) \geq K_{21} \sum_1^n c_i (1-y)^i \\ \qquad\quad \geq K_{21} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sum_1^n c_i \\ \qquad\quad \geq K_{22}\, n\, c_n \qquad (n \geq 2), \end{cases} \tag{6.7}$$

[1]) It follows that the radius of convergence of the series $\sum c_n x^n$ is at least 1;

$$(1-x)^{-\gamma} \{F(x)\}^p \in L(0, 1) \quad (p > 1,\ \gamma < 1 - p).$$

[11]) Cf. ([2] § 2, Remark 1), the function $F(x)$ should be replaced by its absolute value.

$$(6.8)\qquad \begin{cases} \sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n) \le K_{23}\int\limits_1^{\infty} t^{\gamma-2}\,\Phi(t\,c_{[t]})\,dt \\ \qquad\qquad \le K_{24}\int\limits_0^1 u^{-\gamma}\,\Phi(c_{[1/u]}/u)\,du \\ \qquad\qquad \le K_{25}\sum\limits_1^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} u^{-\gamma}\,\Phi(n\,c_n)\,du \\ \qquad\qquad \le K_{26}\int\limits_0^1 y^{-\gamma}\,\Phi\big(F(1-y)\big)\,dy \\ \qquad\qquad \le K_{26}\int\limits_0^1 (1-x)^{-\gamma}\,\Phi\big(F(x)\big)\,dx. \end{cases}$$

Hence the result follows at once.

(b) To show that the condition is also sufficient[12]): For the sake of simplicity and without loss of generality, we may assume $c_0=0$. Suppose $\sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n)<\infty$. Denote $S_n=c_1+\cdots+c_n$. We have

$$(6.9)\qquad \begin{cases} F(1-y) \le \sum\limits_1^n c_i + \sum\limits_{n+1}^{\infty} c_i\,(1-y)^i \\ \qquad\qquad \le S_n + c_n/y \\ \qquad\qquad \le K_{27}\,S_n \quad \left(\dfrac{1}{n+1} \le y \le \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

By Lemma 1, we have

$$(6.10)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^1 (1-x)^{-\gamma}\,\Phi\big(F(x)\big)\,dx = \sum\limits_1^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-\gamma}\,\Phi\big(F(1-y)\big)\,dy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \le K_{28}\sum\limits_1^{\infty} n^{\gamma-2}\,\Phi(S_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \le K_{29}\sum\limits_1^{\infty} n^{\gamma-2}\,\Phi(n\,c_n), \end{cases}$$

where $K_{29}=K_{29}(\Phi,\gamma)$. Thus the proof of the sufficient condition (b) of Theorem 17 is complete.

7. Negative Results. (a) Our arguments in Theorem 1 and Theorem 2 become invalid when we put $\gamma=1-p$, which is the critical point of the „Geltungsbereich" of γ. I shall now illustrate it by two examples:

(i) $$\lambda_n=(\log n)^{-1},\quad p>1,\quad \sum n^{\gamma+p-2}\,\lambda_n^p<\infty.$$

[12]) In particular, when $\Phi(u)=u^p$, cf. HARDY and LITTLEWOOD ([3] Theorem 3, with $\frac{1}{q}-1=-\gamma$, $r=p$).

We have $g(x) \sim 1/(x \cdot |\log x|)$, as $x \to 0$ ([16] § 5.221). We therefore have $x^{p-1}\{g(x)\}^p \in L(0, \pi)$. But since $g(x) \overline{\in} L(0, \pi)$, the series (1.2) is not a Fourier series[13]), so that it cannot be term by term integrated; therefore, the previous argument cannot be applied.

(ii) If we put $\lambda_n = (\log n)^{-\frac{1}{2}}$, then we have, by ([16], § 5.221),

$$f(x) \sim x^{-1}(\log(1/x))^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.1}$$

Take $p = \frac{4}{3}$, $\gamma = 1 - p$, then $\sum n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p$ is obviously divergent. But yet $x^{p-1}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$. Thus, Theorem 1 breaks down when $\gamma = 1 - p$.

(b) In Theorem 17, with $\gamma = 0$, it is impossible to eliminate the monotone property of the sequence c_n. In fact, there exists $F(x) = \sum c_n x^n$, with $F(x) \in L^2(0, 1)$ and $\sum c_n^2$ is divergent ([3], § 1.2). In case $\gamma = \varepsilon > 0$, we may follow the same reasoning by assuming $c_{n'} = n^{-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}$, $p = 2$. Then $\sum (n')^{\gamma+p-2} c_{n'}^2 \geq \sum (n \log n)^{-1} \to \infty$. After establishing the divergence of the series $\sum (n')^{\gamma+p-2} c_{n'}^p$, we may chose $n' = n'(n)$ sufficiently large, in order to make the lacunary series $\sum c_{n'} x^{n'} \sim (1-x)^{-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \delta}$. Then we can make $(1-x)^{-\gamma}\{F(x)\}^2 \in L(0, 1)$. Therefore the monotone property of c_n in Theorem 17 cannot be eliminated even when $0 < \gamma < 1$.

(c) Although the second type of asymptotic approximations has not yet been intensively investigated. I shall now lay out one preliminary result: In particular, when the function $\Psi(u) = u^p$, $0 < p < 1$, Theorem (A) breaks down[14]). For let us take $\lambda_n = (\log n)^{-1}$, $p = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, then $f(x) \sim 1/x(\log x)^2$. Although $x^{-\gamma}\{g(x)\}^p \overline{\in} L(0, \pi)$ (i.e. $\sum n^{\gamma+p-2}\lambda_n^p$ is divergent), we still have: $x^{-\gamma}\{f(x)\}^p \in L(0, \pi)$. Therefore, we can assert that there is no corresponding theorem for $f(x)$ when $\Psi(f(x))$ or, in particular, when $\{f(x)\}^p$ $(0 < p < 1)$ is used. And the problem concerning $f(x)$ is disposed of.

(d) We have proved the sufficient conditions of the integrability of $x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)$ and $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$. It is natural to inquire for the necessary condition of Theorem 3. But, unfortunately, the result is negative: Not only the inequality

$$\int_{1/n}^{\pi} \frac{|f(t)|}{t}\, dt \geq K\lambda_n \tag{7.2}$$

cannot always be satisfied, but also the convergence of $\sum n^{\gamma-2}\Phi(n\lambda_n)$ is not always necessary for $x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|)$ to be integrable $L(0, \pi)$.

For the „Gegenbeispiel", it should be remarked that our argument of Theorem 4 is still applicable for $\gamma = 0$. So it is enough to illustrate an example for $\gamma = 0$.

---

[13]) For cosine series, given $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \to 0$, we cannot assure that $\sum \lambda_n \cos nx$ is a Fourier-Lebesgue series [12].

[14]) Cf. ([2] Theorem 3).

Setting $\gamma = 0$,

$$\lambda_n = (\log n)^{-1}, \tag{7.3}$$

$$\Phi(u) = u(1 + \log^+ u)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.4}$$

We have, as in (a), $f(x) \sim x^{-1}|\log x|^{-2}$, as $x \to 0$.

$$x^{-\gamma}\Phi(|f(x)|) \sim x^{-1}|\log x|^{-\frac{3}{2}} \in L(0, \pi). \tag{7.5}$$

But

$$\left\{\begin{aligned} \sum n^{\gamma-2}\Phi(n\lambda_n) &= \sum n^{-2} \cdot n(\log n)^{-1}\left(1 + \log^+ [n(\log n)^{-1}]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum n^{-1}(\log n)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - o(1)\right) \to \infty. \end{aligned}\right. \tag{7.6}$$

Thus, the condition of Theorem 3 is certainly not necessary.

8. Further Integrability Theorems. Applying Theorem 3 and Theorem 4 to the Riemann-Liouville fractional integrals, we obtain

THEOREM 19. If $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \to 0$, $c_0 = 0$, $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-t)\, t^{\alpha-1}\, dt, \tag{8.1}$$

then a sufficient condition that $x^{-\gamma}\Phi|f_\alpha(x)| \in L(0, 1)$ is the convergence of the series

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(n^{1-\alpha}c_n). \tag{8.2}$$

The following theorem is due to HARDY and LITTLEWOOD ([5], Theorem 11):

THEOREM (F). Suppose that $f(\vartheta) \sim \sum c_n e^{ni\vartheta}$, and that $|f| \cdot \log^+|f|$ belongs to L. Then $\sum c_n^*/n$ is convergent and $\sum \exp(-k/|c_n|)$ is convergent for every positive value of k, where $\{c_n^*\}$ is the rearrangement of $\{c_n\}$. It may be seen that, if c_n are real, we actually have:

THEOREM (G)[15].

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|f(\vartheta)|}\, d\vartheta \leq A(k) \sum_1^\infty n^{-2} \exp\Big(k \sum_{-n}^{n} c_m^*\Big). \tag{8.3}$$

For $e^{|f(\vartheta)|} = 1 + |f(\vartheta)| + \frac{|f(\vartheta)|^2}{2!} + \cdots$. By applying HEYWOOD's theorem [6], Theorem (A), and Theorem (B), it is easy to verify the following more general theorem:

THEOREM 20. Suppose $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \to 0$, $0 < \gamma < 1$,

$$f(\vartheta) \sim \sum_0^\infty c_n e^{ni\vartheta}. \tag{8.4}$$

Then

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta^{-\gamma} e^{|f(\vartheta)|}\, d\vartheta < \infty \tag{8.5}$$

[15]) Cf. HARDY and LITTLEWOOD ([5] Theorem 9).

if and only if

$$\sum n^{\gamma-2}\exp(n c_n) < \infty. \tag{8.6}$$

By a similar argument, and in virtue of Theorem (E) and Theorem 17, we obtain

THEOREM 21. Under the same condition of Theorem 20, except that $-\infty<\gamma<1$, $F(x)=\sum_0^\infty c_n x^n$, a necessary and sufficient condition that

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{-\gamma} e^{F(x)}\, dx < \infty \tag{8.7}$$

is the convergence of the series (8.6).

THEOREM 22. Under the same condition of Theorem 21, with an addition that $\omega(x)$ is the function defined in § 5,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{-\gamma} e^{\omega(x)}\, dx < \infty \tag{8.8}$$

if and only if

$$\int_1^\infty t^{\gamma-2}\exp\left(t\vartheta(t)\right) dt < \infty. \tag{8.9}$$

Another type of integrability theorems can be obtained by integration with respect to the variable p. I shall now illustrate an example for Theorem 18:

THEOREM 23. If $1-p_2<\gamma<1$, $p_2>p_1>1$, $m>0$, $F(x)$ is defined by (6.1), then

$$\int_0^1 (1-x)^{-\gamma}(1+\log^+ F(x))^m \frac{\{[F(x)]^{p_2}-[F(x)]^{p_1}\}}{\log F(x)}\, dx < \infty \tag{8.10}$$

if and only if

$$\sum_n n^{\gamma-2}(1+\log^+ n c_n)^m \left\{\frac{n^{p_2}c_n^{p_2}-n^{p_1}c_n^{p_1}}{\log(n c_n)}\right\} < \infty. \tag{8.11}$$

Further analogous theorems for power series, trigonometrical series, and Laplace transforms can be obtained in this way.

Finally, I wish to express my thanks to the referee who suggested to me to work toward asymptotic approximations from the results of the original draft of this paper.

References

[1] BOAS, R. P., Jr.: Integrability of trigonometric series. I. Duke Math. J. **18**, 787—793 (1951). — III. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217—221 (1952). — [2] CHEN, Y. M.: On the integrability of functions defined by trigonometrical series. Math. Z. **66**, 9—12 (1956). — [3] HARDY, G. H., u. J. E. LITTLEWOOD: Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. J. f. Math. **156**, 141—158 (1927). — [4] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. Math. Ann. **97**, 159—209 (1926). — [5] HARDY, G. H.,

and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. **6**, 3—9 (1931). — [*6*] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. I. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **5**, 71—76 (1954). — II. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 77—79 (1955). — [*7*] HEYWOOD, P.: Integrability theorems for power series and Laplace transforms. J. London Math. Soc. **30**, 302—310 (1955). — [*8*] IZUMI, S., and M. SATÔ: Integrability of trigonometrical series. I. Tôhoku Math. J. (2) **6** 258—263 (1954). — [*9*] KENNEDY, P. B.: Integrability theorems for power series. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 316—320 (1955). — [*10*] MULHOLLAND, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem. Proc. London Math. Soc. **35**, 257—293 (1933). — [*11*] SUNOUCHI, G.: Integrability of trigonometrical series. J. of Math. (Tokyo) **1**, 99—103 (1953). — [*12*] SZIDON, S.: Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. Math. Z. **12**, 121—127 (1921). — [*13*] SZ.-NAGY, B.: Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, 118—135 (1949). — [*14*] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1952. — [*15*] TITCHMARSH, E. C.: The Theory of Functions. Oxford 1939. — [*16*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

Math. Dept., Nanyang University, Singapore

(Eingegangen am 7. März 1957)

STALLMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 245—266 (1957)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III *)

Von
FRIEDEMANN STALLMANN

Einleitung

Im folgenden werden wir mit den in I[1]) und II[2]) entwickelten Methoden die Lamésche Differentialgleichung untersuchen. Im Gegensatz zu den mehr geometrisch anschaulichen Betrachtungen in I, 3.1 bis 3.3 soll hier die numerische Berechnung der charakteristischen Zahlen bei geschlossenen Umläufen gemäß I, 1.5 bis 1.6 im Vordergrund stehen. Ferner soll der bisher noch nicht behandelte Fall der Laméschen Differentialgleichung bei großen Werten δ genauer diskutiert werden. Für genauere numerische Rechnungen ziehen wir die in II untersuchten hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktionen heran. Auch Fehlerabschätzungen werden durchgeführt.

Die Bezeichnungen aus den beiden ersten Teilen werden unverändert übernommen und auch die Numerierung der Paragraphen wie bisher weitergeführt. Es beziehen sich also die Hinweise auf § 1 bis § 3 auf Teil I, § 4 bis § 10 auf Teil II und § 11 bis § 12 auf den vorliegenden Teil III. Entsprechendes gilt natürlich auch für die zitierten Formeln.

§ 11. Die Laméşche Differentialgleichung. Allgemeines und asymptotische Integration für kleine Werte δ

11.1. Wir legen unseren Betrachtungen wieder die Form (3.1) der Laméschen Differentialgleichung zugrunde. Da wir uns aber zunächst auf keine bestimmte Form der Liouville-Transformation festlegen wollen, schreiben wir sie mit b statt ϱ^2, wo b nur reell sein soll. Sie erhält dann die Form:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{3}{16}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{(x-e_\nu)^2} + \frac{(\frac{5}{4}+\delta^2)\,x+b}{4\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)}. \tag{11.1.1}$$

Es sei wieder

$$e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3}, \quad 0 \le k^2 \le 1. \tag{11.1.2}$$

Wie in 3.2 erwähnt, bildet der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (11.1.1) die obere Halbebene auf ein Kreisbogenviereck ab, wobei die Stellen $x = e_1, e_2, e_3$ in Winkel der Größe $\pi/2$ und die Stelle $x = \infty$

*) Der vorliegende Teil III bildet zusammen mit Teil II die Habilitationsschrift des Verfassers, die von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule Gießen angenommen wurde.

[1]) Math. Z. **60**, 187—212 (1954).

[2]) Math. Z. **68**, 27—76 (1957).

in einen Winkel der Größe $\delta\pi$ übergeht. Im Gegensatz zu den bisher behandelten Kreisbogendreiecken sind die Kreisbogenvierecke durch die Angabe der Eckenwinkel noch nicht eindeutig bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Die Gestalt des Kreisbogenvierecks hängt noch ab von den beiden Winkeln zwischen den Paaren gegenüberliegender Seiten, wobei noch die Überdeckungsverhältnisse in der η-Ebene zu berücksichtigen sind. Hiermit hängt es zusammen, daß in (11.1.1) außer δ noch zwei weitere Parameter frei gewählt werden können, nämlich das Doppelverhältnis der Verzweigungspunkte k^2 und der akzessorische Parameter b. Die Abhängigkeit des Vierecks von diesen Parametern haben wir uns auf geometrischem Wege in 3.2 veranschaulicht. Hier wollen wir diese Überlegungen durch numerische Abschätzungen der Winkelgrößen ergänzen.

Wir gehen hierzu aus von den Überlegungen in 1.5 und 1.6. Die gesuchten Winkelgrößen sind im wesentlichen die charakteristischen Exponenten zu gewissen geschlossenen Umläufen der Lösungen von (11.1.1) in der x-Ebene. Wir betrachten speziell einen Weg, der die singulären Stellen e_1 und e_2 aber nicht e_3 umschließt, sowie einen Weg, der e_2 und e_3 aber nicht e_1 umschließt. Die zugehörigen Winkelgrößen bezeichnen wir bzw. mit δ_{12} und δ_{23}. Es schneiden sich dann nach 1.6 die Paare gegenüberliegender Seiten unter den Winkeln $\pi\delta_{12}$ und $\pi\delta_{23}$.

Zur Berechnung dieser Winkelgrößen benutzen wir die Formel (1.11) Da wir die Lösungen der Differentialgleichung (11.1.1) mit Hilfe der asymptotischen Integration abschätzen, schreiben wir (1.11) in eine Formel für die durch die Liouville-Transformation aus den $y(x)$ entstandenen $u(\xi)$ um. Bei dieser Transformation geht der geschlossene Weg in der x-Ebene in einen im allgemeinen offenen Weg in der ξ-Ebene über. ξ_1 sei der — in weitem Umfang willkürlich wählbare — Anfangspunkt, ξ_2 der Endpunkt dieses Weges. Die Größe $\sqrt[4]{\varphi(x)}$ nehme bei dem geschlossenen Umlauf in der x-Ebene den Faktor $e^{\frac{i\pi}{2}r}$ $(r=0,1,2,3)$ an. Unter diesen Voraussetzungen erhält Formel (1.11) die Gestalt:

$$\text{(11.1.3)}\qquad \left\{\begin{aligned}\cos\pi\delta = -\frac{1}{2W(u_1,u_2)}\Bigg(&\begin{vmatrix} u_1(\xi_1), & e^{-\frac{i\pi}{2}r}u_2(\xi_2)\\ u_1'(\xi_1), & e^{\frac{i\pi}{2}r}u_2'(\xi_2)\end{vmatrix} + \\ &+\begin{vmatrix} e^{-\frac{i\pi}{2}r}u_1(\xi_2), & u_2(\xi_1)\\ e^{\frac{i\pi}{2}r}u_1'(\xi_2), & u_2'(\xi_1)\end{vmatrix}\Bigg).\end{aligned}\right.$$

Bei geeigneter Wahl der Anfangspunkte und Integrationswege lassen sich die $u_{1,2}(\xi_{1,2})$ mit Hilfe der asymptotischen Integration abschätzen. Die $u'_{1,2}(\xi_{1,2})$ schätzen wir ab mit Hilfe der Formel

$$\text{(11.1.4)}\qquad u'(\xi) = v'(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{v_1(\zeta)\,v_2'(\xi) - v_2(\zeta)\,v_1'(\xi)}{W(v_1,v_2)}\,q(\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta,$$

die wir aus (2.16) durch Ableitung erhalten. Da $u(\xi)$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist dies keine Integralgleichung sondern eine Quadratur.

11.2. Wie in 3.1 betrachten wir zunächst die Liouville-Transformation

$$\text{(11.2.1)} \qquad \begin{cases} \xi(x) = \varrho \int\limits_{\infty}^{x} \dfrac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \\ u(\xi) = \sqrt[4]{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\, y(x). \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (11.1.1) geht dann über in[3])

$$\text{(11.2.2)} \qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K') + \frac{b-\varrho^2}{\varrho^2} = 1 + \frac{Q(\xi)}{\varrho^2}.$$

Das ξ-Polygon ist hier das Rechteck

$$-\varrho K \leq \Re(\xi) \leq 0, \quad 0 \leq \Im(\xi) \leq \varrho K'.$$

Die geschlossenen Umläufe in der x-Ebene, die den Größen δ_{12} und δ_{23} zugeordnet sind, sind Periodenwege, die zu den Integralperioden $2i\varrho K'$ und $2\varrho K$ gehören. In der ξ-Ebene sind dies Wege, die von ξ_1 aus nach $\xi_1 + 2i\varrho K'$ bzw. nach $\xi_1 + 2\varrho K$ verlaufen. Als zweckmäßig für die Rechnung erweisen sich die Wege, die längs der Kanten der Periodenrechtecke von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ bzw. nach $\varrho K + i\varrho K'$ verlaufen. Auf diesen Geraden ist $\wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K')$ reell, so daß alle Rechnungen im Reellen durchgeführt werden können[4]).

11.3. Auf den betrachteten Wegen ist $Q(\xi)$ frei von Singularitäten. Wir können daher für die asymptotische Integration die Exponentialfunktionen $e^{\pm\xi}$ als Hilfsfunktionen wählen. Die mit $e^{\pm\xi}$ multiplizierten Lösungen $u_{1,2}(\xi)$ bezeichnen wir mit $U_{1,2}(\xi)$:

$$U_1(\xi) = e^{-\xi} u_1(\xi), \quad U_2(\xi) = e^{\xi} u_2(\xi),$$

und es gilt nach (2.23) die Abschätzung

$$\text{(11.3.1)} \qquad |U_i(\xi) - 1| \leq e^{I(\xi)} - 1$$

mit

$$I(\xi) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\, |d\zeta|,$$

wobei für $k(\zeta)$ die Abschätzung

$$k(\zeta) \leq \left| \frac{1 - e^{2(\xi-\zeta)}}{2\varrho^2} \right| |Q(\zeta)|$$

[3]) K, K' sind die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung in der Legendreschen Normalform zum Modul k in (11.1.2).

[4]) Genau genommen müßten wir die Ecken des Periodenrechtecks durch kleine Halbkreise umgehen, weil nur dann die Wege auch in der x-Ebene zulässig sind. Da die Differentialgleichung (11.2.2) aber auf diesen Ecken regulär ist, können wir diese Halbkreise zu Geraden deformieren.

bzw.

$$k(\zeta) \leq \left| \frac{e^{2(\xi-\zeta)}-1}{2\varrho^2} \right| |Q(\zeta)|,$$

für alle ξ und ζ auf dem Integrationsweg und für hinreichend große ϱ gelten muß.

Zur Abschätzung der Ableitungen $u'_{1,2}(\xi)$ benutzen wir die Formel (11.1.4). Angewandt auf den vorliegenden Spezialfall schreibt sie sich nach leichter Umformung:

$$u'_1(\xi) = e^{\xi}\left(1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{e^{2(\zeta-\xi)}+1}{2\varrho^2} Q(\zeta)\, U_1(\zeta)\, d\zeta\right), \tag{11.3.2}$$

$$u'_2(\xi) = -e^{-\xi}\left(1 - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{e^{2(\xi-\zeta)}+1}{2\varrho^2} Q(\zeta)\, U_2(\zeta)\, d\zeta\right). \tag{11.3.3}$$

11.4. Mit Hilfe dieser Gleichungen schätzen wir zunächst δ_{12} ab. Als Integrationsweg haben wir nach 11.2 die Gerade von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ zu betrachten. Auf dieser Geraden ist $\xi - \zeta$ rein imaginär und wir können daher setzen

$$k(\zeta) = \frac{|Q(\zeta)|}{\varrho^2}. \tag{11.4.1}$$

Weiter wählen wir ϱ so, daß das Integral

$$\int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} |Q(\zeta)|\, |d\zeta|$$

möglichst klein wird. Dies ist dann der Fall, wenn $Q(\zeta)$ an den Stellen $-\varrho K \pm i\varrho \frac{K'}{2}$ verschwindet, d.h. es muß sein

$$\frac{b-\varrho^2}{\varrho^2} = \frac{1-(2\delta)^2}{4}\, \wp\left(-\varrho K \pm i\varrho \frac{K'}{2};\, 2\varrho K, 2i\varrho K'\right), \tag{11.4.2}$$

woraus nach leichter Rechnung folgt[5])

$$\varrho^2 = b - \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k^2}{3} - (1-k)\right). \tag{11.4.3}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$I(\xi) \leq I_0 = \int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} k(\zeta)\, |d\zeta| = \frac{2}{\varrho} \left| \frac{1-(2\delta)^2}{4} \right| (1-k). \tag{11.4.4}$$

Es ist also auf dem Integrationsweg

$$|U_{1,2}(\xi)| \leq e^{I_0}. \tag{11.4.5}$$

[5]) Falls (11.4.3) einen negativen Wert für ϱ^2 ergibt, transformiere man die Differentialgleichung durch die Substitution $x \to -x$. Es geht dann b in $-b$ und k^2 in k'^2 über, was zu positiven Werten von ϱ^2 führt.

Die Integrale in (11.3.2), (11.3.3) lassen sich abschätzen durch

$$\left| \int_{-\varrho K+i\varrho K'}^{-\varrho K-i\varrho K'} \frac{e^{\pm 2(\xi-\zeta)}+1}{2\varrho^2}\, Q(\zeta)\, U_{1,2}(\zeta)\, d\zeta \right| \leq I_0 e^{I_0}. \tag{11.4.6}$$

So können wir schließlich setzen:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}(1+E_1), \\ u_1'(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1'(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}(1+E_1^*), \\ u_2(\xi_1) = e^{\varrho K-i\varrho K'}, & u_2(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_2), \\ u_2'(\xi_1) = -e^{\varrho K-i\varrho K'}, & u_2'(\xi_2) = -e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_2^*), \end{cases} \tag{11.4.7}$$

und es gelten die Abschätzungen

$$|E_{1,2}| \leq e^{I_0}-1, \quad |E_{1,2}^*| \leq I_0 e^{I_0}. \tag{11.4.8}$$

Setzt man die Werte (11.4.8) in die Formel (11.1.3) ein, wobei $r=2$ zu setzen ist, so erhält man

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\varrho K' + \frac{E_1+E_1^*}{4} e^{-2i\varrho K'} + \frac{E_2+E_2^*}{4} e^{2i\varrho K'}. \tag{11.4.9}$$

Da $\cos \pi \delta_{12}$ jedenfalls reell sein muß, kann man statt dessen auch schreiben

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\varrho K' + \varepsilon \cos \gamma, \tag{11.4.10}$$

wo $\varepsilon = \left| \frac{E_1+E_1^*}{2} \right|$ und $\gamma = 2\varrho K' - \arg(E_1+E_1^*)$ ist.

11.5. Ganz analog verläuft die Abschätzung von δ_{23}. Als Integrationsweg haben wir die Gerade zwischen $-\varrho K+i\varrho K'$ und $+\varrho K+i\varrho K'$ zu betrachten. Auf diesem Weg ist $u_1(\xi)$ von links nach rechts, $u_2(\xi)$ von rechts nach links zu integrieren, damit die Größen $e^{2(\zeta-\xi)}$ bzw. $e^{2(\xi-\zeta)}$ beschränkt bleiben.

Wir können dann für $k(\zeta)$ setzen:

$$k(\zeta) = \frac{|Q(\zeta)|}{2\varrho^2}. \tag{11.5.1}$$

Dann wird

$$I(\xi) \leq I_0' = \frac{1}{\varrho} \left| \frac{1-(2\delta)^2}{4} \right| (1-k'), \tag{11.5.2}$$

wenn wir — auf Grund der gleichen Überlegungen wie in 11.4 — für ϱ^2 die folgende Größe wählen:

$$\varrho^2 = b + \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k'^2}{3} - (1-k')\right), \quad \text{mit } k'^2 = 1-k^2. \tag{11.5.3}$$

Wenn wir also setzen:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_1), \\ u_1'(\xi_1) = e^{-\varrho K+i\varrho K'}, & u_1'(\xi_2) = e^{\varrho K+i\varrho K'}(1+E_1^*), \\ u_2(\xi_1) = e^{\varrho K-i\varrho K'}(1+E_2), & u_2(\xi_2) = e^{-\varrho K-i\varrho K'}, \\ u_2'(\xi_1) = -e^{\varrho K-i\varrho K'}(1+E_2^*), & u_2'(\xi_2) = -e^{-\varrho K-i\varrho K'}, \end{cases} \tag{11.5.4}$$

so gelten die Abschätzungen:

$$|E_{1,2}| \leq e^{I_0'} - 1, \quad |E_{1,2}^*| \leq 2I_0' e^{I_0'}. \tag{11.5.5}$$

Da die Differentialgleichung symmetrisch in $\xi - i\varrho K'$ ist, muß $u_1(\xi_2) = u_2(\xi_1)$ und $u_1'(\xi_2) = -u_2'(\xi_1)$ sein. Es ist daher

$$E_1 = E_2 \quad \text{und} \quad E_1^* = E_2^*.$$

Diese Größen sind zudem reell.

Die Wronskische Determinante erhält den Wert

$$W(u_1, u_2) = -(2 + E_1 + E_1^*). \tag{11.5.6}$$

So wird schließlich:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \pi \delta_{23} &= \frac{e^{-2\varrho K} + (1 + E_1)(1 + E_1^*) e^{2\varrho K}}{2 + E_1 + E_1^*} \\ &= \mathfrak{Cof}\, 2\varrho K + \frac{(E_1 + E_1^*)\, \mathfrak{Sin}\, 2\varrho K + E_1 E_1^* e^{2\varrho K}}{2 + E_1 + E_1^*}. \end{aligned} \right. \tag{11.5.7}$$

11.6. Wie man aus (11.4.4) und (11.5.2) ersieht, hängt die Güte der Abschätzung nicht nur von ϱ sondern auch noch wesentlich von dem Modul k bzw. k' ab. Ist k oder k' klein, so läßt sich die Abschätzung der zugehörigen Größe δ_{12} bzw. δ_{23} wesentlich verbessern, wenn man statt der Exponentialfunktion die hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktionen heranzieht.

Als Hilfsdifferentialgleichung benutzen wir die in § 5 diskutierte Differentialgleichung (5.1.3). Wir setzen dort $\delta_0 = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = \delta$ und $\delta_\infty = \frac{2i\varrho K}{\pi}$ bzw. $\delta_\infty = \frac{2\varrho K'}{\pi}$. Wir betrachten also die folgenden Hilfsdifferentialgleichungen:

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4\varrho^2 K^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\xi \pi}{2\varrho K}}, \tag{11.6.1}$$

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4\varrho^2 K'^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\xi \pi}{2\varrho K'}}. \tag{11.6.2}$$

(11.6.1) dient zur Abschätzung von δ_{12}, (11.6.2) zur Abschätzung von δ_{23}.

11.7. Wir beginnen mit der Abschätzung von δ_{12}. Wie in (2.15) sei $q(\xi)$ definiert durch

$$\frac{u''}{u} = \frac{v''}{v} + \frac{q(\xi)}{\varrho^2}.$$

Das Integral

$$\int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} |q(\zeta)|\, |d\zeta|$$

erhält sein Minimum für

$$\varrho^2 = b - \frac{1 - (2\delta)^2}{4} \left(\frac{2 - k^2}{3} - (1 - k) - \frac{\pi^2}{4K^2} \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi}{4} \frac{K'}{K}} \right). \tag{11.7.1}$$

Als Hilfsfunktionen für die asymptotische Integration benutzen wir die in (5.3.1) definierten $v_1^{(1)}(\xi), v_1^{(2)}(\xi)$. Für $\xi \to -\varrho K + i\infty$ gilt

$$v_1^{(1)} = e^{\xi+\varrho K} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad v_1^{(2)} = e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \tag{11.7.2}$$

und für $\xi \to -\varrho K - i\infty$ wegen (5.3.2)

$$\begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = 4^{\frac{2i\varrho K}{\pi}}\, 2\pi H_0\left(-\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{\xi+\varrho K} + \\ \qquad + \frac{\cos\pi\delta}{\sin 2i\varrho K}\, e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = -\frac{\cos\pi\delta}{\sin 2i\varrho K}\, e^{\xi+\varrho K} + \\ \qquad + 4^{-\frac{2i\varrho K}{\pi}}\, 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{-(\xi+\varrho K)} + O\left(\frac{1}{\xi}\right). \end{cases} \tag{11.7.3}$$

Da die Voraussetzungen von 2.8 und 2.10 für die asymptotische Integration von $-\varrho K + i\varrho K'$ nach $-\varrho K - i\varrho K'$ auf dem betrachteten Integrationsweg erfüllt sind, gibt es zwei linear unabhängige Lösungen von (11.2.2), für die nach (2.45) gilt:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = v_1^{(1)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\ u_2(\xi) = v_1^{(2)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \end{cases} \tag{11.7.4}$$

Wegen (11.1.4) gilt dann auch auf dem Integrationsweg:

$$\begin{cases} u_1'(\xi) = v_1^{(1)\prime}(\xi) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right); \\ u_2'(\xi) = v_1^{(2)\prime}(\xi) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \end{cases} \tag{11.7.5}$$

Die asymptotischen Abschätzungen (11.7.2), (11.7.3) und die durch Differentiation daraus entstehenden für die $v_1^{(i)\prime}$ geben in Verbindung mit (11.7.4), (11.7.5) Abschätzungen für $u_{1,2}^{(\prime)}$ an den Stellen

$$\xi_1 = -\varrho K - i\varrho K', \quad \xi_2 = -\varrho K + i\varrho K'.$$

Eingesetzt in Formel (11.1.3) ergibt das

$$\begin{cases} \cos\pi\delta_{12} = 4^{-\frac{2i\varrho K}{\pi}}\, 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{2i\varrho K'} + \\ \qquad + 4^{\frac{2i\varrho K}{\pi}}\, 2\pi H_0\left(-\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) e^{-2i\varrho K'} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \end{cases} \tag{11.7.6}$$

oder anders geschrieben

$$\cos\pi\delta_{12} = C\cos(2\varrho K' + \gamma) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right); \tag{11.7.7}$$

dabei ist

$$C^2 = \left| 2\pi H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right)\right|^2 = \frac{\mathfrak{Cof}^2 2\varrho K - \sin^2\pi\delta}{\mathfrak{Sin}^2 2\varrho K},$$

$$\gamma = \arg H_0\left(\frac{2i\varrho K}{\pi}, \frac{1}{2}, \delta\right) - \frac{2\varrho K}{\pi}\log 4.$$

11.8. Ganz entsprechend kann auch die Größe δ_{23} abgeschätzt werden. Wir benutzen jetzt die Hilfsdifferentialgleichung (11.6.2) und erhalten zunächst als günstigsten Wert für ϱ^2:

$$\varrho^2 = b + \frac{1-(2\delta)^2}{4}\left(\frac{2-k'^2}{3} - (1-k') - \frac{\pi^2}{4K'^2}\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi}{4}\frac{K}{K'}}\right). \tag{11.8.1}$$

Als Hilfsfunktionen benutzen wir die in 5.2 definierten $v_1^{(2)}, \tilde{v}_1^{(1)}$. Für $\xi \to \infty$ zeigen diese Funktionen ein asymptotisches Verhalten, das durch die Formeln (5.2.1), (5.2.4) und (5.2.9) gekennzeichnet ist. Entsprechendes Verhalten zeigen auch die Ableitungen; hieraus folgt, daß die beiden Funktionen linear unabhängig sind. Durch asymptotische Integration — wobei u_1 wieder von links nach rechts, u_2 in der umgekehrten Richtung zu integrieren ist — läßt sich dann auch der Wert von $u_{1,2}^{(\prime)}$ an den Stellen $\mp\varrho K + i\varrho K'$ abschätzen.

Eingesetzt in (11.1.3) ergibt das

$$\cos\pi\delta_{23} = \mathfrak{Cof}(2\varrho K + \gamma')\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \tag{11.8.2}$$

mit

$$\gamma' = \log 2\pi H_0\left(\frac{2\varrho K'}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right) - \frac{2\varrho K'}{\pi}\log 4.$$

11.9. Eine Fehlerabschätzung zu den Formeln (11.7.7) und (11.8.2) läßt sich im Prinzip genau wie bei der Verwendung der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion durchführen. Insbesondere ist $q(\zeta)$ explizit bekannt; so wird im Fall 11.7 das Integral

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho^2}\int_{-\varrho K + i\varrho K'}^{-\varrho K - i\varrho K'} |q(\zeta)|\,|d\zeta| = \\ &= \frac{2}{\varrho}\left|\frac{1-(2\delta)^2}{4}\right|\left|1 - k - \frac{\pi}{K}\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K} + \frac{\pi}{2K}\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}\right|. \end{aligned}\right. \tag{11.9.1}$$

Diese Größe geht sehr rasch gegen Null für $k \to 0$; schon für $k = 1/\sqrt{2}$ ist sie um etwa eine Zehnerpotenz kleiner als die entsprechende (11.4.4). Zu den gleichen Ergebnissen führt der Fall 11.8.

Neben dieser Größe ist aber noch der von den Hilfsfunktionen herrührende Anteil (2.24)

$$\left|\frac{v_1(\zeta)\,v_2(\xi) - v_2(\zeta)\,v_1(\xi)}{W(v_1, v_2)}\right|$$

abzuschätzen, und hierin liegt die wesentliche Schwierigkeit, da diese Werte nicht explizit bekannt sind[6]). Indessen darf man vermuten, daß — wie bei

[6]) Die Hilfsfunktionen lassen sich allerdings ihrerseits wieder — mit der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion — abschätzen. [Vgl. (11.9.2)]. Doch gibt das viel zu grobe Fehlerschranken, durch die die Vorteile der verfeinerten Abschätzung illusorisch werden.

der Exponentialfunktion — diese Größe den Wert 1 nicht allzusehr überschreitet.

Schließlich ist noch die Abweichung der Hilfsfunktionen von der Exponentialfunktion zu berücksichtigen. Im Fall 11.7 lassen sich hierfür sehr brauchbare Abschätzungen durch asymptotische Integration gewinnen. Man findet so auf der Geraden $\xi = -\varrho K + it$ (t reell)

$$v_1^{(1)(2)} = e^{\pm it}(1 + E_{1,2}), \tag{11.9.2}$$

mit

$$|E_{1,2}| \leq e^I - 1$$

und

$$I = \left|\frac{1-(2\delta)^2}{4}\right| \frac{\pi}{2\varrho K}\left(1 - \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{t}{K}\right).$$

Für $t = K'$ und kleine k hat diese Abweichung etwa die Größenordnung von (11.9.1). Entsprechendes gilt für die Ableitungen.

Im Fall 11.8 lassen sich solche Abschätzungen nicht gewinnen. Hier müssen die wahren Werte der Hilfsfunktionen — etwa aus den Potenzreihen — berechnet werden.

Im übrigen zeigen die Abschätzungen, daß die Formel (11.7.7) nicht nur asymptotische Werte für $\varrho \to \infty$, sondern auch für $k \to 0$ und $\delta \to \frac{1}{2}$ liefert[7]). Durch etwas modifizierte Abschätzungen[8]) läßt sich zeigen, daß dies gleichmäßig gilt für alle reellen $\varrho^2 \geq -1+\varepsilon$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ also insbesondere auch für $\varrho = 0$. Hierfür gilt, wie man durch Grenzübergang aus (11.7.7) berechnet:

$$\left\{\begin{aligned}\cos \pi\delta_{12} = \frac{\cos \pi\delta}{\pi}\Big(&\pi\frac{K'}{K} - \log 4 - 2C - \\ &- \psi\Big(\frac{1+\delta+\frac{1}{2}}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{1+\delta-\frac{1}{2}}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{1-\delta+\frac{1}{2}}{2}\Big) - \\ &- \psi\Big(\frac{1-\delta-\frac{1}{2}}{2}\Big)\Big) + O\Big(k\Big(\delta - \frac{1}{2}\Big)\Big).\end{aligned}\right. \tag{11.9.3}$$

(C Eulersche Konstante, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.)

§ 12. Die Lamésche Differentialgleichung bei großen Werten δ

12.1. In den Abschätzungen des § 11 haben wir die Voraussetzung $\delta^2 \leq \frac{1}{4}$, die wir in 3.1 wegen 2.11 (Fußnote 15) machen mußten, nicht benutzt. Man sieht jedoch, etwa aus (11.4.5) und den analogen Rechnungen für die anderen Fälle, daß die Abschätzungen sehr bald schlecht werden, wenn δ wesentlich von dem Wert $\frac{1}{2}$ abweicht. Wenn δ groß ist benutzen wir daher zweckmäßig

[7]) Übrigens liefert auch Formel (11.5.7) asymptotische Werte für $k \to 0$, (11.4.10) für $k \to 1$ und beide für $\delta \to \frac{1}{2}$.

[8]) Es müssen hierzu die Größen $1 - e^{\pm(\zeta-\xi)}$ stärker berücksichtigt und auch geeignetere Linearkombinationen der $v_1^{(i)}$ als Hilfsfunktionen herangezogen werden.

eine andere Form der Liouville-Transformation; wir setzen

$$\varrho^2 \varphi(x) = \frac{b^* + \delta^2 x}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}. \tag{12.1.1}$$

Für b^* ist dabei jeder beliebige reelle Wert zugelassen; der Einfachheit halber werden wir — sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird — $b^* = b$ wählen.

$\xi(x)$ wird das elliptische Integral dritter Gattung

$$\xi(x) = \frac{\delta}{2} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x-c}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}\, dx, \quad c = -\frac{b^*}{\delta^2}. \tag{12.1.2}$$

Die transformierte Differentialgleichung — wir können sie jetzt nicht mehr in expliziter Form angeben — hat im ξ-Polygon eine singuläre Stelle

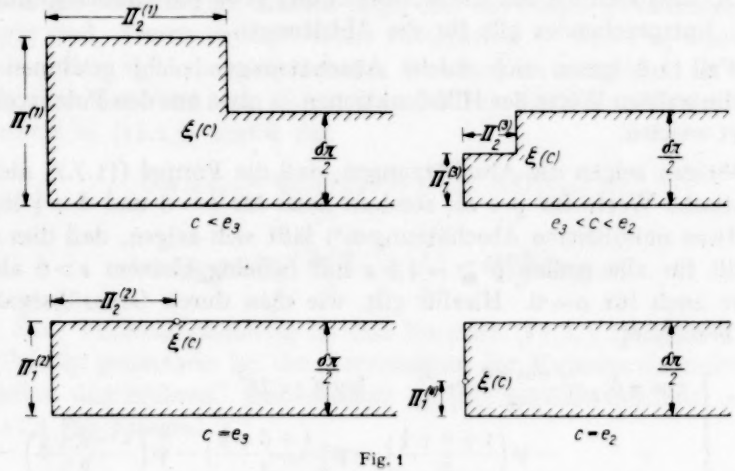

Fig. 1

bei $\xi(c)$. Diese hat im allgemeinen den Index $\frac{1}{3}$; nur wenn c mit einer der Stellen e_ν zusammenfällt, $c = e_1, e_2, e_3$ hat sie den Index $\frac{1}{4}$. Von dieser Ausnahme abgesehen sind die Stellen $\xi(e_\nu)$ reguläre Stellen der transformierten Differentialgleichung.

Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. $c < e_3$. 2. $c = e_3$. 3. $e_3 < c < e_2$. 4. $c = e_2$. 5. $e_2 < c < e_1$. 6. $c = e_1$. 7. $e_1 < c$.

Die zugehörigen ξ-Polygone zeigt Fig. 1. Wir können uns auf die Behandlung der Fälle 1. bis 4. beschränken. Die Transformation $x \to -x$ im Integral (12.1.2) führt die Fälle 4. bis 7. auf die Fälle 1. bis 4. zurück. Bei dieser Transformation bleibt (12.1.2) formal ungeändert, wenn man dort statt c die Größe $-c$ und statt des Tripels e_1, e_2, e_3 das Tripel $-e_3, -e_2, -e_1$ d.h. in (11.1.2) statt k^2 die Größe $k'^2 = 1 - k^2$ setzt. Im übrigen beschränken wir uns auf die Untersuchung bei reellem δ; bei der Behandlung imaginärer δ treten keine neuen Gesichtspunkte auf.

Zur Abschätzung der Lösungen mit Hilfe der asymptotischen Integration könnten wir wie bisher die in Fig. 1 gezeigten ξ-Polygone in Rechtecke .nd Halbstreifen einteilen und in diesen Teilbereichen mit den Zylinderfunktionen (4.4.3) abschätzen. Wir könnten dann aber nicht (vgl. etwa 6.3 und 6.5) stetig von einem Fall zum anderen übergehen. Dies wird möglich, wen- wir als Hilfsfunktionen die Lösungen der in § 6 und § 9 untersuchten Differentialgleichungen zugrunde legen.

Hierzu bemerken wir, daß die in Fig. 1 gezeigten ξ-Polygonen sich einbetten lassen in gewisse der in § 6 und § 9 behandelten ξ-Polygone. Daher lassen sich die Lösungen der transformierten Laméschen Differentialgleichung im ganzen ξ-Polygon abschätzen durch gewisse Lösungen der transformierten Riemannschen oder Whittakerschen Differentialgleichung. Ebenso sind die zugehörigen Kreisbogenvierecke Teilbereiche von gewissen Kreisbogendreiecken; sie können aufgefaßt werden als Kreisbogendreiecke mit „abgeschnittenen Ecken". Wir werden dies weiter unten im einzelnen untersuchen.

12.2. Für die Abschätzung der geometrischen Invarianten des Kreisbogenvierecks mit Hilfe der asymptotischen Integration sind maßgebend die in Fig. 1 als Π_1 und Π_2 bezeichneten Größen. Es sind dies vollständige elliptische Integrale dritter Gattung und sie können daher durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform dargestellt werden. Wir geben die Ausdrücke für die Fälle 1. bis 4. explizit an; die Ausdrücke für die Fälle 5. bis 7. erhält man daraus, wie oben erwähnt, durch die Transformation $x \to -x$, $c \to -c$, $k \to k'$.

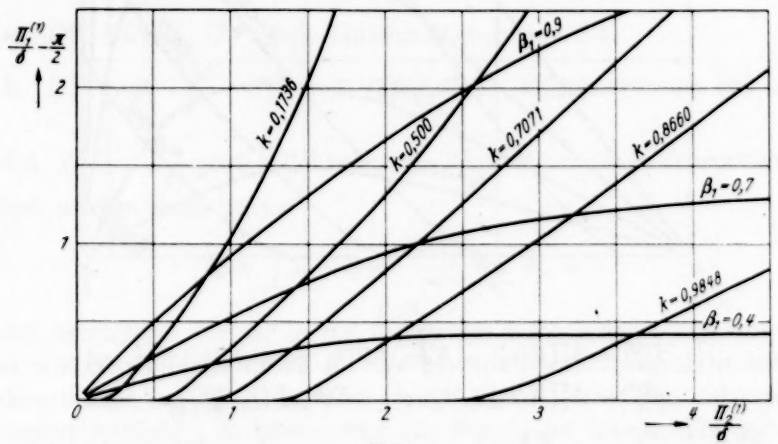

Fig. 2

1. $c < e_3$.

$$(12.2.1)\quad \Pi_1^{(1)} = \delta\left[\frac{K(k_1')}{\sqrt{e_2 - c}}(e_3 - c) + \left(E(k_1') - K(k_1')\right)F(k_1, \varphi) + K(k_1')\,E(k_1, \varphi)\right].$$

$$(12.2.2)\quad \Pi_2^{(1)} = \delta\left[\frac{K(k_1)}{\sqrt{e_2 - c}}(e_3 - c) + K(k_1)\,E(k_1, \varphi) - E(k_1)\,F(k_1, \varphi)\right].$$

Dabei ist

$$k_1^2 = k^2 \frac{e_1 - c}{e_2 - c}, \quad k_1'^2 = 1 - k_1^2 = k'^2 \frac{e_3 - c}{e_2 - c}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{e_1 - c}.$$

(Siehe Fig. 2; $\beta_1 = \frac{e_3 - c}{e_2 - c}$.) Die Größen $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ sind die unvollständigen $K(k)$ und $E(k)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform.

2. $c = e_3$.

Das elliptische Integral artet hier in ein trigonometrisches aus. Es wird

(12.2.3) $$\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta \pi}{2},$$

(12.2.4) $$\Pi_2^{(2)} = \log \frac{1 + k}{1 - k}.$$

3. $e_3 < c < e_2$ (Fig. 3).

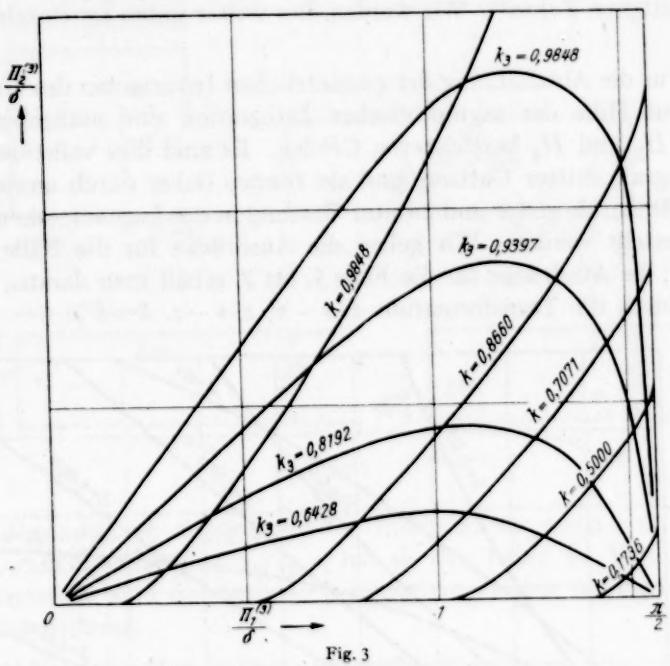

Fig. 3

(12.2.5) $$\Pi_1^{(3)} = \delta\left[\left(E(k_3') - K(k_3')\right) F(k_3, \varphi) + K(k_3') E(k_3, \varphi)\right].$$

(12.2.6) $$\Pi_2^{(3)} = \delta\left[\left(K(k_3) E'(k_3, \varphi) - E(k_3) F(k_3, \varphi)\right)\right].$$

$$k_3^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{e_2 - c}{e_1 - c}, \quad k_3'^2 = 1 - k_3^2 = \frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{c - e_3}{e_1 - c}, \quad \sin^2 \varphi = e_1 - c.$$

4. $c = e_2$.

Wie im Fall 2. artet das Integral aus. Es wird

(12.2.7) $$\Pi_1^{(4)} = \delta\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin k\right],$$

(12.2.8) $$\Pi_2^{(4)} = 0.$$

12.3. Zur Konstruktion der Kreisbogenvierecke aus den ξ-Polygonen gehen wir, wie gesagt, davon aus, daß die in Fig. 1 dargestellten ξ-Polygone als Teilstücke aufgefaßt werden können von gewissen ξ-Polygonen aus § 6 und § 9. Bilden wir diese Teilstücke durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Lösungen der Riemannschen oder Whittakerschen Differentialgleichung ab, so erhalten wir ein — eventuell ausgeartetes — Kreisbogendreieck, von dem die eine Ecke abgeschnitten ist. Liegen die Schnittlinien in der ξ-Ebene hinreichend weit von den Singularitäten der Differentialgleichung entfernt[9]), so können die Lösungen dort durch die Exponentialfunktion $e^{\pm\xi}$ angenähert werden und der Quotient bildet die Schnittlinien näherungsweise auf ein Kreisbogenstück ab. Es werden dann tatsächlich die in Fig. 1 dargestellten ξ-Polygone durch den Quotienten der Hilfsfunktionen näherungsweise auf Bereiche abgebildet, die die Gestalt der gesuchten Kreisbogenvierecke haben.

Wie die Abbildung durch den Quotienten der Hilfsfunktionen im einzelnen aussieht, ist aus den in § 6 und § 9 angegebenen Fortsetzungsrelationen ohne weiteres zu entnehmen. Wir zeigen dies genauer in Fig. 4 bis 9.

Die Bedingung, daß die Singularitäten hinreichend weit von den Schnittlinien entfernt liegen müssen, ist entscheidend für die Wahl der Hilfsfunktionen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1a. $\Pi_1^{(1)} - \frac{\delta\pi}{2}$ *groß*, $\Pi_2^{(1)}$ *beliebig*, Hilfsfunktionen aus 6.8.

1b. $\Pi_1^{(1)}$ *beliebig*, $\Pi_2^{(1)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.4.

2. $\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta\pi}{2}$, $\Pi_2^{(2)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.5.

3a. $\Pi_1^{(3)}$ *beliebig*, $\Pi_2^{(3)}$ *groß*, Hilfsfunktionen aus 6.4.

3b. $\Pi_1^{(3)}$ *groß*, $\frac{\delta\pi}{2} - \Pi_1^{(3)}$ *groß*, $\Pi_2^{(3)}$ *beliebig*, Hilfsfunktionen aus 9.2.

12.4. $\Pi_1^{(1)} - \frac{\delta\pi}{2}$ **groß,** $\Pi_2^{(1)}$ **beliebig.** Wir wählen die Hilfsfunktionen aus 6.8 und müssen dann setzen:

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = \frac{2i\,\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \qquad \delta_\infty = \delta.$$

Speziell betrachten wir die in 6.8 definierten Funktionen $v_2^{(1)}(\xi)$ und $v_2^{(2)}(\xi)$. Wenn wir die Anfangspunkte für die asymptotische Integration bei $v_2^{(1)}(\xi)$ auf dem linken, bei $v_2^{(2)}(\xi)$ auf dem rechten Rand des in Fig. 4 dargestellten ξ-Polygons wählen[10]), so können wir alle Punkte im Inneren des ξ-Polygons auf solchen Wegen erreichen, auf denen die Bedingung (2.26) erfüllt werden

[9]) Diese Schnittlinien sind die in 3.8 erwähnten Nahtstellen.

[10]) Um den direkten Anschluß an die Untersuchungen in 6.8 zu gewinnen, betrachten wir in Fig. 4 ein ξ-Polygon, das spiegelbildlich liegt zu dem in Fig. 1 dargestellten. Bei diesem müßten wir zur Abschätzung die Hilfsfunktionen $\tilde{v}_\nu^{(i)}$ heranziehen. (Vgl. die Festsetzungen von 4.5.) Die Formeln zur Abschätzung der geometrischen Invarianten bleiben ungeändert. Entsprechendes gilt auch für die folgenden Abschnitte 12.5 bis 12.9.

kann. Es gilt also im ganzen ξ-Polygon die Abschätzung

$$(12.4.1) \qquad u_1(\xi) = v_2^{(1)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \qquad u_2(\xi) = v_2^{(2)}(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),$$

für zwei, bei hinreichend großem ϱ linear unabhängige Lösungen $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ der transformierten Laméschen Differentialgleichung.

Wir betrachten jetzt die konforme Abbildung durch den Quotienten $\eta(\xi) = \frac{v_2^{(1)}(\xi)}{v_2^{(2)}(\xi)}$. Das vollständige ξ-Polygon von 6.8 Fig. 9 wird durch $\eta(\xi)$ auf ein Kreisbogendreieck abgebildet. Nennen wir die zu $x = 0, 1, \infty$ gehörenden

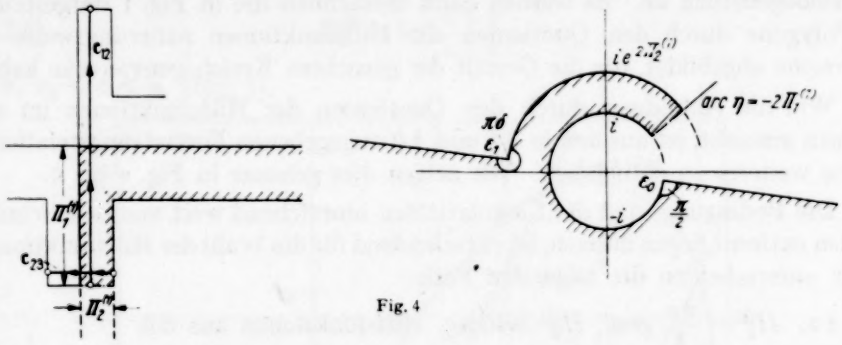

Fig. 4

Ecken ε_0, ε_1, ε_∞ so wird bei dieser speziellen Abbildung

$$(12.4.2) \qquad \varepsilon_0 = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\Pi_2^{(1)}}{\mathfrak{Sin}\, 2\Pi_2^{(1)} - i\cos\pi\delta}\, H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right),$$

$$(12.4.3) \qquad \varepsilon_\infty = \frac{e^{4\Pi_2^{(1)}} - 1}{2i\cos(\pi\delta - 2i\Pi_2^{(1)})}\, H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

Dabei liegt ε_0 auf dem Einheitskreis, ε_∞ auf dem Kreis $|\eta| = e^{2\Pi_2^{(1)}}$; diese beiden Kreise bilden, unendlich oft durchlaufen, die zu $x = 1$ gehörige Ecke. Die dritte Seite des Kreisbogendreiecks ist ein die Punkte ε_0 und ε_∞ verbindender Kreis, der bei ε_0 den Winkel $\pi/2$ und bei ε_∞ den Winkel $\delta\pi$ bildet[11]).

In der Umgebung der Schnittlinie verhält sich $\eta(\xi)$ wie $e^{2\xi}$. Die Schnittlinie wird daher durch $\eta(\xi)$ näherungsweise auf den Strahl $\arg\eta = -2\Pi_1^{(1)}$ abgebildet. Damit haben wir die Gestalt des gesuchten Kreisbogenvierecks näherungsweise bestimmt (s. Fig. 4).

Wir berechnen noch die Winkelgrößen δ_{12} und δ_{23}. Hierzu benutzen wir die in Fig. 4 gezeigten Integrationswege; diese sind in der x-Ebene geschlossene Wege mit den geforderten Eigenschaften.

Wir betrachten zunächst den Weg $\mathfrak{C}_{23}$. Auf diesem Weg verhalten sich die Hilfsfunktionen näherungsweise wie die Exponentialfunktion, und wir können direkt mit der Exponentialfunktion abschätzen. Dies geschieht — ab-

[11]) Die genaue Konstruktion, insbesondere die Überdeckungsverhältnisse bei nichtschlichten Kreisbogendreiecken ist aus Fig. 9 in 6.8 zu ersehen.

gesehen von der Fehlerabschätzung — genau wie in 11.5. Wir erhalten so die Abschätzung:

$$\cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\, 2\Pi_2^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{12.4.4.}$$

Auf dem Weg $\mathfrak{C}_{12}$ benutzen wir wieder $v_2^{(1)}(\xi)$ und $v_2^{(2)}(\xi)$ als Hilfsfunktionen. Am Anfangspunkt ξ_1 verhalten sich diese Funktionen wie $e^{\pm\xi}$, das Verhalten am Endpunkt ξ_2 ergibt sich aus der Fortsetzungsrelation (6.8.5). Auf Grund dieser Beziehungen schätzt man ähnlich wie in 11.7 ab:

$$\cos \pi \delta_{12} = C_1 \cos(2\Pi_1^{(1)} + \gamma_1) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{12.4.5}$$

mit

$$C_1^2 = \left| H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right)\right|^2 = \frac{\mathfrak{Cof}^2\, 2\Pi_2^{(1)} - \sin^2 \pi\delta}{\mathfrak{Sin}^2\, 2\Pi_2^{(1)}},$$

$$\gamma_1 = \arg H_1\left(\frac{2i\Pi_2^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

12.5. $\Pi_1^{(1)}$ beliebig, $\Pi_2^{(1)}$ groß. Dies führt auf den Fall 6.4, und wir müssen setzen:

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = \delta, \qquad \delta_\infty = \frac{2\Pi_1^{(1)}}{\pi}.$$

Als spezielle Hilfsfunktionen wählen wir die dort definierten $v_4^{(1)}$ und $v_3^{(2)}$; es gibt dann wieder ein Paar von Lösungen der transformierten Laméschen

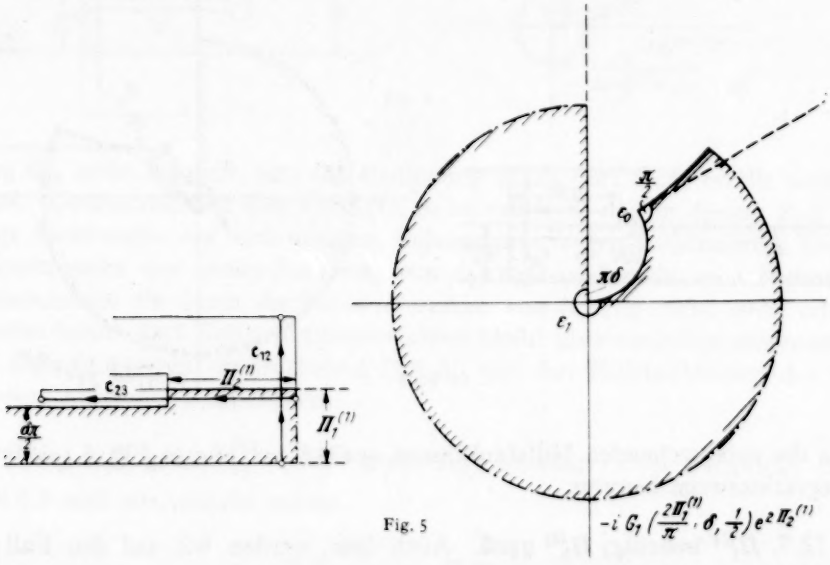

Fig. 5

Differentialgleichung, die im ganzen ξ-Polygon diesen Hilfsfunktionen asymptotisch gleich sind.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta = \frac{v_4^{(1)}}{v_3^{(2)}}$ läßt sich aus den in 6.4 angeführten Übergangssubstitutionen und asymptotischen Abschätzungen wie im vorhergehenden Fall bestimmen (s. Fig. 5). Die auf diese Weise

entstehende Figur stimmt mit dem gesuchten Kreisbogenviereck bis auf die durch die asymptotische Integration entstehenden Fehler überein. Die geometrische Gestalt des Kreisbogenvierecks läßt sich so näherungsweise bestimmen.

Die Größen δ_{12} und δ_{23} schätzen wir durch asymptotische Integration auf den in Fig. 5 gezeigten Wegen $\mathfrak{C}_{12}$ und $\mathfrak{C}_{23}$ ab. Wir erhalten so:

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\Pi_1^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.5.1}$$

$$\begin{cases} \cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\,(2\Pi_2^{(1)} + \gamma_2)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\ \gamma_2 = \log H_1\left(\frac{2\Pi_1^{(1)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{12.5.2}$$

12.6. $\Pi_1^{(2)} = \frac{\delta\pi}{2}$, $\Pi_2^{(2)}$ groß. Dieser Fall läßt sich in dem gleichen Sinne als Grenzfall von 12.5 auffassen, wie 6.5 ein Grenzfall von 6.4 war. Die Überlegungen und Formeln von 12.5 bleiben daher unverändert erhalten, wenn

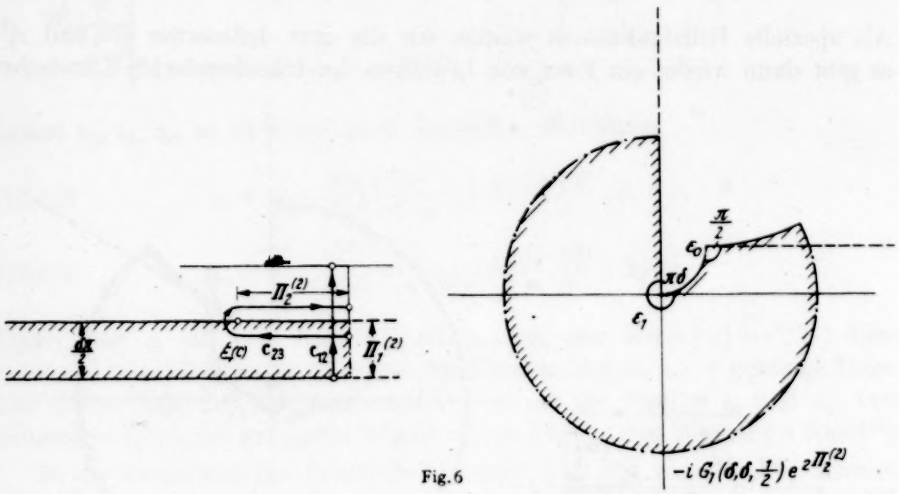

Fig. 6

man die entsprechenden Hilfsfunktionen aus 6.5 und die in Fig. 6 gezeigten Integrationswege benutzt.

12.7. $\Pi_1^{(3)}$ beliebig, $\Pi_2^{(3)}$ groß. Auch hier werden wir auf den Fall 6.4 geführt, haben aber jetzt zu setzen

$$\delta_0 = \frac{1}{2}, \quad \delta_1 = \frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi}, \quad \delta_\infty = \delta.$$

Wir können wieder dieselben Hilfsfunktionen wie in 12.5 wählen. Fig. 7 zeigt die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch den Quotienten dieser

Hilfsfunktionen. Die asymptotische Abschätzung der Größen δ_{12} und δ_{23} ergibt:

$$\cos \pi \delta_{12} = \cos 2\Pi_1^{(3)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.7.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \mathfrak{Cof}\,(2\Pi_2^{(3)} + \gamma_3)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \tag{12.7.2}$$

mit

$$\gamma_3 = \log 2 \cos(\pi\delta - 2\Pi_1^{(3)}) + \log H_1'\left(\frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi}, \delta, \frac{1}{2}\right).$$

Die Formel versagt, wenn $\delta - \frac{2\Pi_1^{(3)}}{\pi} = n + \frac{1}{2}$, n ganz ist. In diesem Fall ist die asymptotische Integration mit den gewählten Hilfsfunktionen auf dem

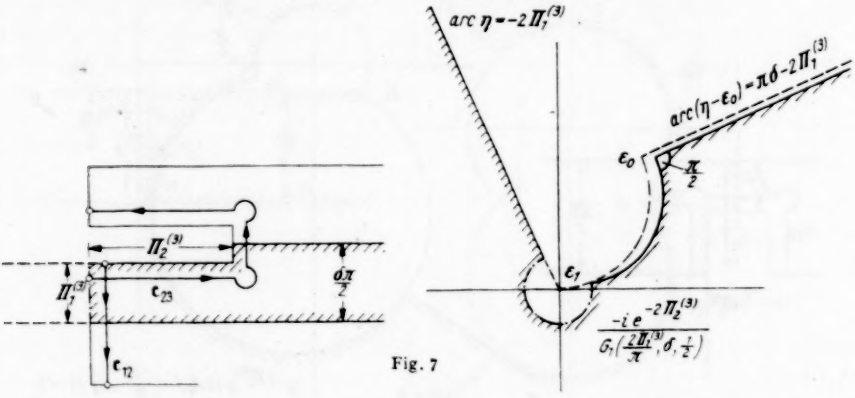

Fig. 7

Weg $\mathfrak{C}_{23}$ nicht möglich, weil die Bedingung (2.26) dort nicht erfüllt werden kann. Geometrisch ist dies Versagen so zu erklären, daß in diesem Fall geringe Änderungen des nach unserem Näherungsverfahren konstruierten Kreisbogenvierecks eine große Änderung von δ_{23} nach sich zieht, eine Änderung insbesondere, die durch die Fehlerschranken von (12.7.2) nicht mehr erfaßt werden kann. Das Konstruktionsverfahren bleibt aber weiterhin anwendbar. Im übrigen können wir in diesem Fall δ_{23} mit den Hilfsfunktionen des folgenden Abschnittes abschätzen.

12.8. $\Pi_1^{(3)}$ groß, $\frac{\delta\pi}{2} - \Pi_1^{(3)}$ groß, $\Pi_2^{(3)}$ beliebig. Dies entspricht dem Fall 9.2 und wir müssen setzen

$$\varkappa = \frac{\Pi_2^{(3)}}{\pi}, \qquad m = \frac{1}{4}.$$

Als Hilfsfunktionen wählen wir $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$. Zum Fall 9.2 gehört ein ausgeartetes Kreisbogendreieck, das aus zwei unendlich oft durchlaufenen Kreisen und einem logarithmischen Windungspunkt $\left(\text{bei } \eta = \frac{v_1^{(1)}}{v_1^{(2)}} = \infty\right)$ gebildet wird. Durch zwei Strahlen, die jeweils einen Kreis mit dem logarithmischen

Windungspunkt verbinden, wird hieraus das gesuchte Kreisbogenviereck ausgeschnitten (vgl. Fig. 8).

Für δ_{12} und δ_{23} ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\cos \pi \delta_{12} = \sqrt{1 + e^{-4\Pi_2^{(3)}}} \left(\cos (2\Pi_1^{(3)} + \gamma_4) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right), \tag{12.8.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \sqrt{1 + e^{4\Pi_2^{(3)}}} \left(\cos (\pi \delta - 2\Pi_1^{(3)} - \gamma_4) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right), \tag{12.8.2}$$

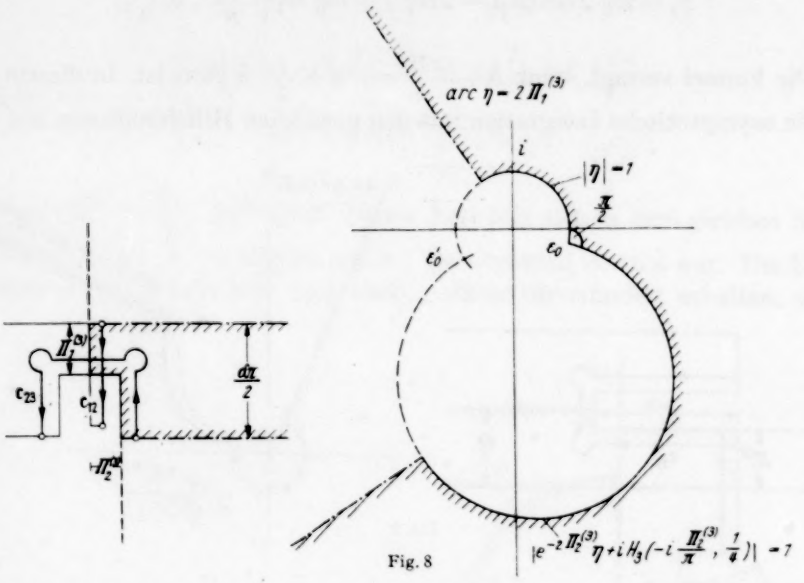

Fig. 8

mit

$$\gamma_4 = \arg H_3\left(i \frac{\Pi_2^{(3)}}{\pi}, \frac{1}{4}\right).$$

12.9. Die Entwicklungen des letzten Abschnitts umfassen auch den Fall $\Pi_2^{(4)} = 0$. In diesem Spezialfall sind die bisher betrachteten konfluenten hypergeometrischen Funktionen die in (4.4.3) definierten Zylinderfunktionen. Die konforme Abbildung zeigt Fig. 9. Aus (12.8.1), (12.8.2) wird:

$$\cos \pi \delta_{12} = \sqrt{2} \cos 2\Pi_1^{(4)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{12.9.1}$$

$$\cos \pi \delta_{23} = \sqrt{2} \cos (\pi \delta - 2\Pi_1^{(4)}) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{12.9.2}$$

12.10. Lamésche Polynome. In der Potentialtheorie interessieren solche Lösungen der Laméschen Differentialgleichung, die, abgesehen von einem Faktor der Form

$$(x - e_1)^{a_1} (x - e_2)^{a_2} (x - e_3)^{a_3}$$

Polynome in x sind. Man überlegt sich leicht, daß in diesem Fall das zugehörige Kreisbogenviereck als Geradenviereck dargestellt werden kann. Es

läßt sich nämlich $\eta(x)$ darstellen in der Form

$$\eta(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y_2^2(x)}. \tag{12.10.1}$$

Ist nun $y_2(x)$ — abgesehen von dem erwähnten Faktor — ein Polynom, so stellt (12.10.1) ein Schwarz-Christoffelsches Integral dar, das die obere Halbebene auf ein Geradenpolygon abbildet.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß dieser Fall nur eintreten kann, wenn $\delta = n + \frac{1}{2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ist. Es gibt bei festem k dann $2n-1$ verschiedene Werte b, für die Polynomlösungen auftreten. Die Größen δ_{12} und

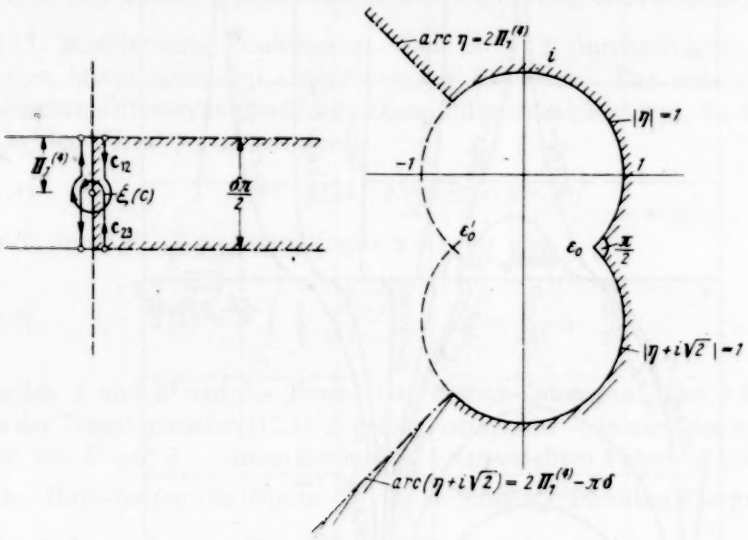

Fig. 9

δ_{23} sind dann beide ganze Zahlen. Die eben entwickelten Abschätzungen zeigen, daß dieser Fall nur eintreten kann, wenn bei der hier betrachteten Liouville-Transformation $e_3 < c < e_1$ ist.

Die Abschätzungen in 12.7 versagen gerade in diesem Fall, dagegen gibt 12.8 die Verhältnisse insofern gut wieder, als in (12.8.1) und (12.8.2) $\cos \pi\delta_{12}$ und $\cos \pi\delta_{23}$ beide gleichzeitig $\pm 1 + O(1/\varrho)$ werden. Geometrisch läßt sich das so deuten, daß in diesem Fall die beiden Strahlen in Fig. 8 sich schneiden im Punkt ε_0 oder dem anderen Schnittpunkt der Kreise, den wir ε_0' nennen wollen. In diesem Punkt schneiden sich dann alle Seiten des Kreisbogenvierecks; bringen wir diesen Punkt durch eine lineare Abbildung nach Unendlich, so entsteht das erwähnte Geradenpolygon.

Die Stellen auf dem Rand des Kreisbogenvierecks, die den Punkt ε_0 bzw. ε_0' überdecken, entsprechen den Nullstellen des Laméschen Polynoms, sofern sie nicht gerade in die Ecke des Vierecks fallen. Die Anzahl der Ecken, die

auf dieser Stelle liegen, bestimmen den Faktor vor dem Laméschen Polynom; wir erhalten Lamésche Funktionen erster, zweiter, dritter oder vierter Art, je nachdem keine, eine, zwei oder drei Ecken des Kreisbogenvierecks auf der Stelle ε_0 bzw. ε_0' liegen. Wir können so durch rein geometrische Betrachtung

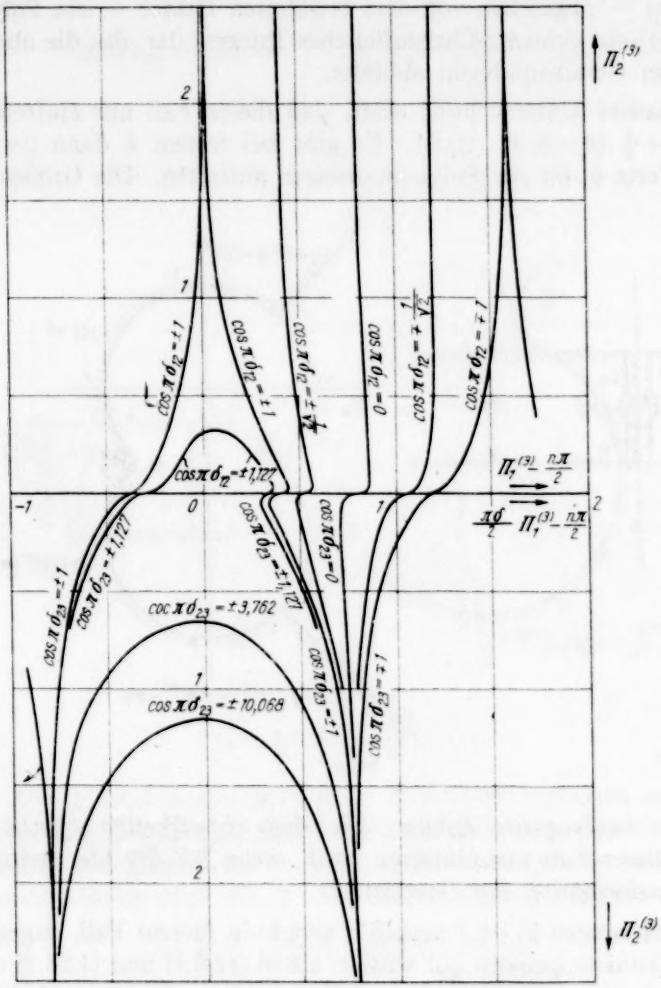

Fig. 10

die Art der Laméschen Funktion und die Anzahl ihrer Nullstellen in jedem Intervall bestimmen[12]).

Sei jetzt $u^*(\xi)$ die zur Laméschen Funktion gehörige Lösung der transformierten Differentialgleichung, d.h.

$$u^*(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\, y_2(x),$$

[12]) Vgl. STALLMANN [4].

wo $y_2(x)$ die Lamésche Funktion ist, so läßt sich $u^*(\xi)$ wie in 12.8 abschätzen durch

$$u^*(\xi) = \left(v_1^{(1)}(\xi) - \varepsilon_0^{(\prime)} v_1^{(2)}(\xi)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{12.10.2}$$

Fig. 10 zeigt, bei welchem Werte $\Pi_1^{(3)}$ und $\Pi_2^{(3)}$ Lamésche Polynome nach (12.8.1), (12.8.2) auftreten. Aus den Formeln in 12.2 lassen sich dann die zugehörigen k und b bestimmen. Diese Größen lassen sich bekanntlich auch direkt auf algebraischem Wege berechnen, wie ja überhaupt die Lösungen der Laméschen Differentialgleichung für $\delta = n + \frac{1}{2}$ explizit angegeben werden können[13]). Bei kleinen n ergibt das eine Kontrollmöglichkeit für unsere Abschätzungen[14]). Für größere n werden die exakten Formeln sehr kompliziert, so daß unsere Abschätzungen dort mit Vorteil anzuwenden sind.

12.11. Mathieusche Funktionen. Die in § 12 durchgeführten Untersuchungen lassen auch den Grenzübergang $\delta \to \infty$ zu. Das entspricht der Mathieuschen Differentialgleichung. Diese Differentialgleichung, die üblicherweise in der Form[15]) gegeben wird:

$$y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2z)\, y = 0, \tag{12.11.1}$$

läßt sich durch die Transformationen $x = \cos^2 z$ und

$$\xi(x) = h \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x - c}{x(1-x)}}, \qquad c = \frac{\lambda}{4h^2} + \frac{1}{2}, \tag{12.11.2}$$

bei reellen λ und h^2 auf die Form (1.4) und (2.4) bringen. Das ξ-Polygon, das zu der Transformation (12.11.2) gehört, entspricht — je nach den speziellen Werten von h^2 und λ — einem der in Fig. 1 dargestellten Polygone mit $\delta = \infty$, d.h. der Halbstreifen der Breite $\frac{\pi\delta}{2}$ ist in einen Quadranten übergegangen.

Die Größen Π_1 bzw. $\Pi_1 - \frac{\delta\pi}{2}$ und Π_2 bleiben endlich; es sind jetzt vollständige elliptische Integrale zweiter Gattung. Dementsprechend bleibt einer der Wege $\mathfrak{C}_{ik}$ — und zwar der, der einem geschlossenen Umlauf um die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ entspricht — endlich, und die zugehörige Größe δ_{ik} strebt für $\delta \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zu. Diese Größe ist der charakteristische Exponent[16]) der zugehörigen Mathieuschen Funktionen, für den wir damit ebenfalls asymptotische Abschätzungen gegeben haben.

---

[13]) v. Koppenfels [1], [2].

[14]) Durchgerechnete Beispiele zeigen schon im Fall $\delta = \frac{3}{2}$ nur wenige Prozent Abweichung vom exakten Wert. Soweit die Größe $\cos \pi\, \delta_{ik}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion abgeschätzt wird, lassen sich noch weitere Verbesserungen der Fehlerschranken dadurch erreichen, daß man die Größe $\frac{Q(\xi)}{\varrho^2}$, die ja als Funktion von x explizit angegeben werden kann, in dem betrachteten Intervall möglichst klein macht, ähnlich wie dies in 11.4 und 11.5 geschehen ist.

[15]) Meixner und Schäfke [3], S. 98.

[16]) Meixner und Schäfke [3], S. 101.

Je nachdem der charakteristische Exponent ν reell oder imaginär ist, d.h. je nachdem $|\cos \pi\nu| \lesseqgtr 0$ ist, erhalten wir stabile oder instabile Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung. Die in Fig. 10 dargestellten Linien $\cos \pi\delta_{iK} = \pm 1$ geben also gerade die Grenze zwischen stabilen und instabilen Parameterwerten an[17]), wobei allerdings noch die Größen Π_1 und Π_2 auf Grund von (12.11.2) in λ und h ausgedrückt werden müssen.

Mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln lassen sich auch die Sphäroidfunktionen und insbesondere ihre charakteristischen Exponenten abschätzen.

Literatur

[1] KOPPENFELS, W. v.: Konforme Abbildung besonderer Kreisbogenvierecke. J. reine u. angew. Math. **181**, 83—124 (1940). — [2] KOPPENFELS, W. v.: Konforme Abbildung ausgezeichneter Kreisbogenvierecke. Sitzgsber. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. **1943**, 327—343. — [3] MEIXNER, J., u. F. W. SCHÄFKE: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — [4] STALLMANN, F.: Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem. Math. Z. **59**, 211—230 (1953).

[17]) Vgl. MEIXNER und SCHÄFKE [3], S. 132.

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Johannesstr. 1

(Eingegangen am 3. August 1956)

SAKSENA, K. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 267–271 (1957)

On a generalized Laplace integral

By

K. M. SAKSENA

MEIJER [9] introduced a generalization of the Laplace integral in the form

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xt}(xt)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

where $W_{k,m}$ denotes WHITTAKER'S function. This reduces to the ordinary Laplace integral when $k = -m$.

VARMA [5] considered a modification of this integral in the form

$$f(x) = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

which becomes LAPLACE'S integral when $k + m = \frac{1}{2}$. Φ this integral converges for $m > -\frac{1}{2}$ and we shall assume that m satisfies this condition.

The object of this note is to give necessary and sufficient conditions in terms of an inversion operator for a given function $f(x)$ to be representable in the form (1).

We define differential operators U_q, V_q by

$$U_0[f(x)] = f(x)$$
$$U_1[f(x)] = (-1)\,x^{m-k-\frac{3}{2}} D\,[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)]$$
$$U_q[f(x)] = (-1)^q\,x^{m-k-q-\frac{1}{2}} D^q\,[x^{k-m+\frac{1}{2}} f(x)] \qquad (q = 2, 3, \ldots)$$

where $D = x^2 \dfrac{d}{dx}$ and

$$V_q[f(u)] = \frac{u^{-1}}{\Gamma(q+k+m-\frac{1}{2})}\,[U_q[f(x)]]_{x=\frac{q+k+m-\frac{1}{2}}{u}}.$$

Theorem 1. *If $\varphi(t)$ is integrable in $0 \leq t \leq R$ for every positive R and $\int_0^t \varphi(u)\,du = O(e^{\gamma t})$ for some γ $(t \to \infty)$ then $\varphi(u) = \lim_{q\to\infty} V_q[f(u)]$ for almost all positive u.*

This theorem has been proved earlier [4]. For the sake of completeness an outline of the proof is given here. Under the hypothesis of the theorem the integral (1) converges for $x > \gamma$ [3] and we may evaluate the derivatives of $f(x)$ by differentiation under the integral sign.

Using the relation [2]

$$x^2 \frac{d}{dx}\left[x^k e^{-\frac{1}{2}x} W_{k,m}(x)\right] = -x^{k+1} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k+1,m}(x)$$

we find that

$$U_q[f(x)] = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k+q,m}(xt)\, \varphi(t)\, dt.$$

It is easy to see that these integrals exist under the hypotheses of the theorem. Making a slight change of variable and substituting the asymptotic estimate of $W_{k,m}(x)$ for large x ([6], p. 343) we find that

$$\lim_{q\to\infty} \frac{u^{-1} U_q\left[f\left(\frac{q+k+m-\frac{1}{2}}{u}\right)\right]}{\Gamma(q+k+m-\frac{1}{2})} \sim \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty (\lambda v)^\lambda e^{-\lambda v} \varphi(uv)\, dv$$

where $\lambda = q+k+m-\frac{1}{2}$

$= \varphi(u)$

as, for almost all positive u [7],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty y^n e^{-ny}\{\varphi(uy) - \varphi(u)\}\, dy = 0.$$

Theorem 2. *The necessary and sufficient conditions that a given function $f(x)$ may have the representation* (1) *with $\varphi(t)$ bounded are that*

(i) *$f(x)$ is infinitely differentiable on* $(0, \infty)$,

(ii) *$f(x) \to 0$ for $x \to \infty$,*

and (iii) $|V_q[f(u)]| \leq M \quad (0 < u < \infty;\ q = 1, 2, \ldots)$

where M is a constant.

The necessity of the conditions (i) and (ii) is obvious and the necessity of (iii) follows from Theorem 1.

For

$$|V_q[f(u)]| \leq \frac{\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty v^\lambda e^{-\lambda v} |\varphi(uv)|\, dv$$

$$\leq \text{l.u.b.}\, |\varphi(t)| = M$$

$$0 \leq t < \infty.$$

To prove the sufficiency let us suppose that the conditions are satisfied. Let us consider the integral

$$I = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\, V_q[f(t)]\, dt.$$

Changing the variable from t to u by the transformation $ut = \lambda$ and noting that

$$V_q\left[f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\right] = \frac{u}{\Gamma(\lambda+1)} U_q[f(u)],$$

we get

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{1}{u} \left(x \frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(\frac{x\lambda}{u}\right) U_q[f(u)]\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty h(u,x)\, U_q[f(u)]\, du\,,$$

where

$$h(u,x) \equiv \frac{1}{u} \left(x \frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(\frac{x\lambda}{u}\right).$$

Now

$$U_q[f(x)] = x^{-a-q}\left(-x^2\frac{d}{dx}\right)^q [x^a f(x)] = y^{a+q}\left(\frac{d}{dy}\right)^q [y^{-a} f(y^{-1})]\,,$$

where $y = \frac{1}{x}$ and $a = k - m + \frac{1}{2}$.

This is easily seen to be of the form $\sum_{r=0}^{q} A_r y^{-r} f^{(r)}(y^{-1})$ or $\sum_{r=0}^{q} A_r x^r f^{(r)}(x)$. So U_q is an Euler operator [*1*] of order q. If its adjoint be $\overline{U}_q = \overline{U}_{q,u}$, we have [*1*]

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty f(u)\, \overline{U}_{q,u}[h(u,x)]\, du$$

provided that

$$u^{r+s+1} \frac{d^r}{du^r}[f(u)] \frac{\partial^s}{\partial u^s}[h(u,x)] \to 0 \tag{2}$$

as $u \to 0$ and as $u \to \infty$ for $r, s = 0, 1, 2, \ldots, q-1$. Now

$$h(u,x) = \frac{1}{u}\left(x\frac{\lambda}{u}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\frac{\lambda}{u}} W_{k,m}\left(x\frac{\lambda}{u}\right).$$

As $u \to 0$, $\quad h(u,x) = O\left(u^{-k-m-\frac{1}{2}} e^{-x\frac{\lambda}{u}}\right) = o(1)$

and as $u \to \infty$, this is

$$= O(u^{-2m-1}) \text{ if } m < 0 \text{ and } O(u^{-1}) \text{ if } m > 0 \tag{3}$$

since ([*6*], p. 346) $W_{k,m}(x) = O(x^{\pm m + \frac{1}{2}})$ as $x \to 0$.

Using the property

$$\frac{d}{dx}[x^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k,m}(x)] = -x^{m-1} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(x)$$

and the asymptotic estimate of $W_{k,m}(x)$ it is easily seen that $h^{(s)}(u,x) = o(1)$ as $u \to 0$.

Also

$$\left.\begin{array}{ll} h''(u,x) = O(u^{-2m-3}) & (m<0) \\ \text{or} \quad O(u^{-3}) & (m>0) \end{array}\right\} \quad \text{as } u \to \infty.$$

Therefore by using a theorem of HARDY and LITTLEWOOD ([8], p. 193), we conclude with the help of (3) that

$$\left.\begin{array}{ll} h^{(s)}(u,x) = O(u^{-2m-s-1}) & (m<0) \\ \text{or} \qquad O(u^{-s-1}) & (m>0) \end{array}\right\} \quad \text{as } u\to\infty.$$

Also the hypotheses of the theorem imply in particular that $f(u)=O(u^{-1})$ and, in general, that $f^{(r)}(u)=O(u^{-r-1})$ for $0<u<\infty$.

Therefore

$$\left.\begin{array}{lll} f(u)=O(u^{-1}) & \text{as} & u\to 0 \\ \quad =o(1) & \text{as} & u\to\infty \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Using the same theorem of HARDY and LITTLEWOOD again we have $f^{(r)}(u)=o(u^{-r})$ as $u\to\infty$. When $m>0$,

$$u^{r+s+1}\frac{d^r}{du^r}[f(u)]\frac{\partial^s}{\partial u^s}[h(u,x)] = u^{r+s+1}\,o(u^{-r})\cdot O(u^{-s-1}) = o(1)$$

and when $m<0$, this is $=o(u^{-2m})=o(1)$ $(u\to\infty)$ as we had supposed that $m>-\frac{1}{2}$.

In a similar way we can show that (2) is satisfied when $u\to 0$. Now $h(u,x)$ is homogeneous in u and x and of order -1. Hence [1]

$$\overline{U}_{q,u}[h(u,x)] = U_{q,x}[h(u,x)]$$

and

$$I=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty f(u)\,U_{q,x}[h(u,x)]\,du = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{1}{t}\,(\lambda t)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\lambda t}W_{k+q,m}(\lambda t)\,f\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

after a change of variable. For large λ this is $\sim \frac{\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty (\lambda t)^{\lambda-1}e^{-\lambda t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ (noting that $\lambda=q+k+m-\frac{1}{2}$)

$$=\frac{\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-\lambda t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt = \frac{x^\lambda\lambda^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty v^\lambda e^{-\lambda v x}\left\{\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)\right\}dv.$$

Now let $\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)=\psi(v)$. Then on account of (4) we have $\frac{1}{v}\,f\left(\frac{1}{v}\right)=O(1)$ as $v\to\infty$ and $f\left(\frac{1}{v}\right)=o(1)$ as $v\to 0$.

Hence it is easily seen that (i) $\psi(v)\,\varepsilon L(R^{-1}\le v\le R)$ for every $R>1$, (ii) $\int_1^\infty \psi(v)\,e^{-cv}\,dv$ converges for any fixed $c>0$ and (iii) $\int_0^1 v\,\psi(v)\,dv$ also converges. Therefore by a theorem of WIDDER ([8], p. 283)

$$\lim_{\lambda\to\infty} I = \frac{1}{x}\,\psi\left(\frac{1}{x}\right)=f(x).$$

Now $\omega(xt)\equiv(xt)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}xt}W_{k,m}(xt)$ clearly εL in $0\le t\le\infty$ under the condition assumed for the convergence of the integral (1). Therefore, by a theorem

on weak compactness of a set of functions ([8], p. 33) the inequalities in the hypothesis (iii) of the theorem imply the existence of a subset $\{q_i\}$ of the positive integers and a bounded function $\varphi(t)$ such that

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^\infty [V_{q_i}[f(t)]]\, \omega(xt)\, dt = \int_0^\infty \omega(xt)\, \varphi(t)\, dt.$$

Hence

$$f(x) = \int_0^\infty \omega(xt)\, \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty (xt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}xt} W_{k,m}(xt)\, \varphi(t)\, dt$$

and the theorem is proved.

References

[1] Boas, R. P., and D. V. Widder: The iterated Stieltjes transform. Trans. Amer. Math. Soc. **45**, 1–72 (1939). — [2] Goldstein, S.: Operational representation of Whittaker's Confluent Hypergeometric Function and Weber's Parabolic Cylinder Function. Proc. Lond. Math. Soc. **34**, 103–125 (1932). — [3] Saksena, K. M.: Study of a generalized Laplace transform. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **21**, 201–208 (1952). — [4] Saksena, K. M.: Inversion formulae for a generalized Laplace Integral. Proc. Nat. Inst. Sci. India **19**, 173–181 (1953). — [5] Varma, R. S.: On a generalization of Laplace Integral. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **20**, 209–216 (1951). — [6] Whittaker, E. T., and G. N. Watson: Modern Analysis. 1946. — [7] Widder, D. V.: The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 107–200 (1934). — [8] Widder, D. V.: The Laplace Transform. 1941. — [9] Meijer, C. S.: Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation. I. Proc. Sect. Sc. Amsterdam Akad. Wet. **44**, 727–737 (1941).

D. S. B. Government College, Nainital, U. P., India

(Eingegangen am 18. Juni 1956)

NARAIN, R.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 272–281 (1957)

Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G-function

By
ROOP NARAIN

1. Generalizations of the classical Laplace transform

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{1.1}$$

have been given from time to time by various mathematicians. Some of them are as follows.

(i) The generalization due to MEIJER [1]

$$\varphi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (st)^{\frac{1}{2}} K_m(st) f(t)\,dt. \tag{1.2}$$

(ii) The Meijer transform ([2], p. 730)

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st) f(t)\,dt. \tag{1.3}$$

(iii) The generalization due to BOAS ([3], p. 286)

$$\varphi(s) = \int_0^\infty g(s,t) f(t)\,dt. \tag{1.4}$$

(iv) The Whittaker transform ([4], p. 17)

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty (2st)^{-\frac{1}{2}} W_{k,m}(2st) f(t)\,dt. \tag{1.5}$$

VARMA ([5], p. 209) introduced another generalization of (1.1) in the form

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) f(t)\,dt. \tag{1.6}$$

We denote the generalized transform (1.6) symbolically by

$$\varphi(s : k, m) = W[f(t); k, m],$$

where $\varphi(s : k, m) = \varphi(s)$.

When $k + m = \frac{1}{2}$, (1.6) reduces to (1.1), due to the identity

$$z^{m-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}-m,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z}.$$

We shall denote (1.1) by the usual notation,

$$\varphi(s) \;:\; f(t).$$

As in the case of Laplace transform, we shall call $\varphi(s:k,m)$ the *image* of $f(t)$, or the *generalized Laplace transform* of $f(t)$, and $f(t)$ shall be called the *original* of $\varphi(s:k,m)$.

In this paper we have obtained certain theorems for this generalized transform and have applied them in evaluating a few infinite integrals. Most of the integrals evaluated involve MEIJER'S G-function and MACROBERT'S E-function. The importance of the results obtained lies due to the fact that a great many of the special functions, appearing in applied mathematics, are particular cases of G-function and E-function and so the results obtained are quite general. From these a number of results can be deduced for Bessel, Legendre, Whittaker functions, their combinations and other related functions as particular cases.

2. We start here by obtaining the generalized transforms based on (1.6) of certain functions by making use of certain known integrals involving $W_{k,m}(x)$. Most of these will be required in our investigation later on.

(a) Let in (1.6), $f(t)=t^{-\nu}e^{-\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)$. Then

$$\varphi(s:k,m)=s^{m+\frac{1}{2}}\int_0^\infty t^{m-\nu-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left((st)+\frac{a}{t}\right)\right]W_{k,m}(st)\,W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)dt.$$

Evaluating this integral by a known integral ([6], p. 412, eqn. (54)), we obtain

$$(2.1)\quad \begin{cases} W\left[t^{-\nu}e^{-\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right);k,m\right]=a^{1-\nu}s\,G^{4,0}_{2,4}\left(as\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}-k+m,\ \nu-\lambda\\ 2m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}\end{matrix}\right), \\ \qquad R(a)>0 \quad \text{and} \quad R(s)>0. \end{cases}$$

Giving suitable values to the parameters in (2.1), we get a number of results obtained by RATHIE ([7], p. 383).

Using known integrals ([6], p. 412, eqn. (55); p. 411, eqn. (46); and p. 411, eqn. (45)), we obtain in a similar manner the following images[1]).

$$(2.2)\quad \begin{cases} W\left[t^{-\nu}e^{\frac{a}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{a}{t}\right);k,m\right]=\dfrac{a^{1-\nu}s}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-\lambda\pm\mu)}\,G^{4,1}_{2,4}\left(as\,\middle|\,\begin{matrix}\lambda+\nu,\frac{1}{2}-k+m\\ 2m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}\end{matrix}\right), \\ \quad |\arg a|<\dfrac{3\pi}{2},\ R(s)>0 \quad \text{and} \quad R(\lambda-\nu+1+m\pm m)>0; \end{cases}$$

$$(2.3)\quad \begin{cases} W\left[t^{-\nu}e^{-\frac{1}{2}at}W_{\lambda,\mu}(at);k,m\right]=a^{\nu}\,G^{2,2}_{3,3}\left(\dfrac{a}{s}\,\middle|\,\begin{matrix}0,-2m,1-\lambda-\nu\\ \frac{1}{2}+\mu-\nu,\frac{1}{2}-\mu-\nu,k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right), \\ R(a)>0 \quad R(s)>0 \quad \text{and} \quad R(\tfrac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0; \end{cases}$$

and

$$(2.4)\quad \begin{cases} W\left[t^{-\nu}e^{\frac{1}{2}at}W_{\lambda,\mu}(at);k,m\right]=\dfrac{a^{\nu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-\lambda\pm\mu)}\,G^{2,3}_{3,3}\left(\dfrac{a}{s}\,\middle|\,\begin{matrix}0,-2m,1+\lambda-\nu\\ \frac{1}{2}+\mu-\nu,\frac{1}{2}-\mu-\nu,k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right), \\ \qquad R(s)>0 \quad \text{and} \quad R(\tfrac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0). \end{cases}$$

[1]) For the sake of brevity the symbol $\Gamma_*(\alpha\pm\beta)$ has been employed to denote $\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta)$.

(b) Let in (1.6), $f(t)=t^{\delta}E\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p:\beta_1,\ldots,\beta_q:\frac{z}{t^n}\right)$, then using a known integral ([6], p. 416, eqn. (10)), we get[2])

$$(2.5)\quad \begin{cases} W\left[t^{\delta}E\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p:\beta_1,\ldots,\beta_q:\frac{z}{t^n}\right);\ k,m\right] \\ \qquad =(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}n^{\delta+k+m}s^{-\delta}E\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+2n}:\beta_1,\ldots,\beta_{q+n}:z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right), \end{cases}$$

where $n=1,2,\ldots,\alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r)$, $\alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2m)$, $\beta_{q+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+m-k+\frac{1}{2})$, $r=1,2,\ldots,n$, provided $R(\delta+1+m\pm m)>0$.

When $k+m=\frac{1}{2}$, (2.5) reduces to[3])

$$(2.6)\quad \begin{cases} t^{\delta}E\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p:\beta_1,\ldots,\beta_q:\frac{z}{t^n}\right) \\ \qquad \div (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}n^{\delta+\frac{1}{2}}s^{-\delta}E\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+n}:\beta_1,\ldots,\beta_q:z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right), \end{cases}$$

where $n=1,2,\ldots,\alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r)$, $r=1,2,\ldots,n$, provided $R(\delta+1)>0$.

(c) Here we establish a correspondence by making use of PARSEVAL-GOLDSTEIN'S Theorem ([9], p. 104) of Laplace transform which states that if $\varphi_1(s)\div f_1(t)$ and $\varphi_2(s)\div f_2(t)$, then

$$\int_0^{\infty} f_1(t)\,\varphi_2(t)\,\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty} f_2(t)\,\varphi_1(t)\,\frac{dt}{t}.$$

It is known that ([8], p. 217)

$$\text{(i)}\qquad t^{-k}e^{-\frac{a}{2t}}W_{k,m}\left(\frac{a}{t}\right)\div 2\sqrt{a}\,s^{k+\frac{1}{2}}K_{2m}\left(2\sqrt{as}\right),\qquad R(a)>0,\ R(s)>0,$$

and that ([8], p. 222)

$$t^{-\sigma}G^{l,n}_{p,q}\left(t\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right.\right)\div s^{\sigma}G^{l,n+1}_{p+1,q}\left(\frac{1}{s}\left|\begin{matrix}\sigma,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right.\right),$$

$$R(\sigma-1)<R(\beta_j),\ j=1,2,\ldots,l,\qquad |\arg s|<(l+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi$$

and

$$p+q<2(l+n).$$

We write the latter as

$$\text{(ii)}\qquad t^{-\sigma}G^{l,n}_{p,q+1}\left(\beta t\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\sigma\end{matrix}\right.\right)\div s^{\sigma}G^{l,n}_{p,q}\left(\frac{\beta}{s}\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right.\right),$$

$$R(\sigma-1)<R(\beta_j),\ j=1,2,\ldots,l,\qquad \arg\frac{s}{\beta}\Big|<(l+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2})\pi$$

and

$$p+q+1<2(l+n).$$

[2]) The particular case when $n=1$ is known ([7], p. 384).
[3]) The particular case when $n=1$ is known ([8], p. 222).

Using the operational relations (i) and (ii) in PARSEVAL-GOLDSTEIN'S Theorem, we get

$$\int_0^\infty t^{\sigma-k-1} e^{-\frac{a}{2t}} W_{k,m}\left(\frac{a}{t}\right) G_{p,q}^{l,n}\left(\frac{\beta}{t}\middle|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right) dt$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^\infty t^{k-\sigma-\frac{1}{2}} K_{2m}\left(2\sqrt{a\,t}\right) G_{p,q+1}^{l,n}\left(\beta t\middle|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\sigma\end{matrix}\right) dt.$$

Replacing a by s and σ by $k-\frac{1}{2}-\varrho+m$ on both the sides, t by $\frac{1}{v}$ on the left hand side and t by $\frac{x}{s}$ on the right hand side, we obtain

$$s\int_0^\infty (s\,v)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}sv} W_{k,m}(s\,v)\, v^{-\varrho} G_{p,q}^{l,n}\left(\beta v\middle|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right) dv$$

$$= 2s^{\varrho}\int_0^\infty x^{-(\varrho-m)} K_{2m}(2x^{\frac{1}{2}})\, G_{p,q+1}^{l,n}\left(\frac{\beta}{s}\,x\middle|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\varrho+k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right) dx.$$

Evaluating the integral on the right hand side by a known integral ([6], p. 421, eqn. (11)), we obtain

$$(2.7)\qquad W\left[t^{-\varrho} G_{p,q}^{l,n}\left(\beta t\middle|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\right); k, m\right] = s^{\varrho} G_{p+2,q+1}^{l,n+2}\left(\frac{\beta}{s}\middle|\begin{matrix}\varrho-2m,\varrho,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\varrho+k-m-\frac{1}{2}\end{matrix}\right),$$

$R(\varrho-1-m\pm m)<R(\beta_j)$, $j=1,2,\ldots,l$, $\arg\frac{s}{\beta}<(l+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2})\pi$ and

$$p+q+1<2(l+n).$$

3. Theorem 1. *If*

$$W[t^{\sigma} h(t); \lambda, \mu] = \varphi(s:\lambda,\mu:\sigma)$$

and

$$(3.1)\qquad W[g(t); k, m] = s^{\varrho} h\left(\frac{1}{s}\right),$$

then

$$(3.2)\qquad \int_0^\infty g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(st\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-k+m,\nu-\lambda\\ \frac{1}{2}m,0,\nu+\mu-\frac{1}{2},\nu-\mu-\frac{1}{2}\end{matrix}\right) dt = s^{\nu-\mu-\frac{3}{2}}\varphi\left(s:\lambda,\mu:\nu-\mu-\varrho-\tfrac{1}{2}\right),$$

provided $R(s)>0$, the integral in (3.2) is absolutely convergent and the generalized Laplace transforms of $|g(t)|$ and $|t^{\nu-\mu-\varrho-\frac{1}{2}}h(t)|$ exist.

Proof. Applying generalized PARSEVAL-GOLDSTEIN'S Theorem, viz., if

$$\varphi_1(s) = W[f_1(t); k, m] \quad \text{and} \quad \varphi_2(s) = W[f_2(t); k, m],$$

then

$$\int_0^\infty f_1(t)\,\varphi_2(t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty f_2(t)\,\varphi_1(t)\,\frac{dt}{t},$$

to the correspondences (2.1) and (3.1), and on simplification, we obtain

$$\int_0^\infty g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(at \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}-k+m, \nu-\lambda \\ \frac{1}{2}m, 0, \nu+\mu-\frac{1}{2}, \nu-\mu-\frac{1}{2} \end{matrix}\right) dt$$

$$= a^{\nu-\mu-\frac{1}{2}} \int_0^\infty (at)^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}at} W_{\lambda,\mu}(at)\, t^{\nu-\mu-\varrho-\frac{1}{2}} h(t)\, dt$$

$$= a^{\nu-\mu-\frac{3}{2}} \varphi\left(a : \lambda, \mu : \nu-\mu-\varrho-\tfrac{1}{2}\right),$$

provided $R(a)>0$ and the integral converges absolutely.

3.1. Corollaries.

(i) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=m-k+\frac{1}{2}$ and $\nu=\mu+1-k+m$, the theorem reduces to a known result ([*10*], p. 67).

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=\lambda-\mu-\frac{1}{2}$ and $\nu=\lambda$, the theorem reduces to another known result ([*10*], p. 73).

(iii) Putting $\sigma=0$, $\varrho=\frac{1}{2}$, $\lambda=k$ and $\mu=\nu-1=m$ in the theorem, we get

$$\varphi(s : k, m) = \sqrt{s} \int_0^\infty g(t)\, G_{2,4}^{4,0}\left(st \,\middle|\, \begin{matrix} m-k+\frac{1}{2}, m-k+1 \\ 2m, 0, 2m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix}\right) dt$$

$$= 2^{-2k+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi s} \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{st}}\, W_{2k-\frac{1}{2},2m}\left(2\sqrt{st}\right) g(t)\, dt.$$

Replacing k by $\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}$, m by $\frac{1}{2}m$, s by s^2 and t by $\frac{1}{4}t^2$ in this equation, we arrive at the following known result obtained by the author in a different manner in an earlier paper [*11*]:

If

$$\varphi(s : k, m) = W[h(t) ; k, m]$$

and

$$\sqrt{s}\, h\left(\frac{1}{s}\right) = W[g(t) ; k, m],$$

then

$$\varphi\left(s^2 : \tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}m\right) = W\left[\frac{\sqrt{\pi}\, t}{2^{\frac{1}{2}+k+m}}\, g\left(\frac{t^2}{4}\right), k, m\right],$$

provided the generalized Laplace transforms of $|g(t)|$ *and* $|tg(t^2/4)|$ *exist*

3.2. Example.

Let in Theorem 1, $g(t) = t^\delta E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \beta_1, \ldots, \beta_q : \frac{z}{t^n}\right)$, then, by (2.5),

$$s^\varrho h\left(\frac{1}{s}\right) = W[g(t) ; k, m]$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\, n^{\delta+k+m}\, s^{-\delta} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2n} : \beta_1, \ldots, \beta_{q+n} : z\left(\frac{s}{n}\right)^n\right),$$

where $n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r)$, $\alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2m)$,

$$\beta_{q+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+m-k+\tfrac{1}{2}), \quad r=1, 2, \ldots, n,$$

provided

$$R(\delta+1+m\pm m)>0;$$

and so

$$t^{\sigma}h(t)=(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}n^{\delta+k+m}t^{\delta+\sigma+\varrho}E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+n}:\frac{z}{(nt)^n}\right),$$

Therefore, again by (2.5),

$$\varphi(s:\lambda, \mu:\sigma)$$
$$=(2\pi)^{1-n}n^{2\delta+\lambda+\mu+k+m+\sigma+\varrho}s^{-\delta-\sigma-\varrho}E\left((\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+4n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+2n}:z\left(\frac{s}{n^2}\right)^n\right),$$

where

$$n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(\delta+r), \quad \alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2m),$$

$$\alpha_{p+2n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+\sigma+\varrho), \quad \alpha_{p+3n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+2\mu+\sigma+\varrho),$$

$$\beta_{q+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+m-k+\tfrac{1}{2}), \quad \beta_{q+n+r}=\frac{1}{n}(\delta+r+\sigma+\varrho+\mu-\lambda+\tfrac{1}{2}),$$

$$r=1, 2, \ldots, n,$$

provided $R(\delta+1+\sigma+\varrho+\mu\pm\mu)>0$.

Hence, from (3.2), after replacing $\frac{1}{2}-k+m+\delta$ by a_1, $\nu-\lambda+\delta$ by a_2, $2m+\delta$ by b_1, δ by b_2, $\nu+\mu-\frac{1}{2}+\delta$ by b_3 and $\nu-\mu-\frac{1}{2}+\delta$ by b_4, we have

$$(3.3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p:\beta_1, \ldots, \beta_q:\frac{z}{t^n}\right) G_{2,4}^{4,0}\left(ty\,\middle|\,{a_1, a_2 \atop b_1, b_2, b_3, b_4}\right) dt \\ =(2\pi)^{1-n}y^{-1}n^{b_1+b_2+b_3+b_4-a_1-a_2+1}E\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+4n}:\beta_1, \ldots, \beta_{q+2n}:z\left(\frac{y}{n^2}\right)^n\right), \end{cases}$$

where

$$n=1, 2, \ldots, \alpha_{p+r}=\frac{1}{n}(b_1+r), \quad \alpha_{p+n+r}=\frac{1}{n}(b_2+r), \quad \alpha_{p+2n+r}=\frac{1}{n}(b_3+r),$$

$$\alpha_{p+3n+r}=\frac{1}{n}(b_4+r), \quad \beta_{q+r}=\frac{1}{n}(a_1+r), \quad \beta_{q+n+r}=\frac{1}{n}(a_2+r), \quad r=1, 2, \ldots, n,$$

provided $R(y)>0$, $R(b_j+1)>0$, $j=1, 2, 3, 4$ and $q\leq p$.

Taking $a_1=b_3$ and $a_2=b_4$ in (3.3), we get, after a little simplification, a known integral due to MacRobert ([12], p. 191, eqn. (10)).

4. Theorem 2. *If*

$$W[t^{\sigma}h(t);\lambda, \mu]=\varphi(s:\lambda, \mu:\sigma)$$

and

$$(4.1)\qquad W[g(t);k, m]=s^{-\varrho}h(s),$$

then

$$(4.2)\quad \int_0^{\infty} g(t)\,G_{3,3}^{2,2}\left(\frac{t}{s}\,\middle|\,{\nu-\mu-\frac{1}{2}, \nu+\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-k+m \atop 0, 2m, \lambda+\nu-1}\right)dt=s^{\frac{1}{2}-\mu-\nu}\varphi(s:\lambda, \mu:-\mu-\nu-\varrho-\tfrac{1}{2}),$$

provided $R(s)>0$, $R(\frac{3}{2}-\nu+m\pm m\pm\mu)>0$, *the integral in* (4.2) *is absolutely convergent and the generalized Laplace transforms of* $|g(t)|$ *and* $|t^{-(\mu+\nu+\varrho+\frac{1}{2})}h(t)|$ *exist.*

The theorem follows on applying the generalized PARSEVAL-GOLDSTEIN's Theorem to the correspondences (2.2) and (4.1) and proceeding as in the proof of Theorem 1.

4.1. Corollaries.

(i) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=l-2$ and $\nu=\frac{3}{2}-\mu-l$, Theorem 2 reduces to a known result ([*13*], p. 234).

(ii) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$, $\varrho=l-2$ and $\nu=\frac{3}{2}-\mu-l$, Theorem 2 reduces to another known result ([*13*], p. 243).

(iii) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and also $k+m=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$ and $\nu=-\mu-\varrho-\frac{1}{2}$, the theorem reduces to a well known result of Laplace transform ([*14*], p. 212).

5. Theorem 3. *If*

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$W\left[t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right);\lambda,\mu\right]=\psi(s:\lambda,\mu:\sigma),$$

then

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(s:k,m)&=s^{m+1}\int_0^{\infty}x^{-(\beta+\mu+1)}\,G^{2,1}_{2,4}\left(sx\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,\,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\times\\&\quad\times\psi(x:\lambda,\mu:-\beta-\mu-m-1)\,dx,\end{aligned}\right.\tag{5.1}$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0$, *the generalized Laplace transform of* $t^{-(\beta+\mu+m+1)}f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (5.1) *converges absolutely.*

Proof. MEIJER has shown ([*15*], p. 188) that

$$W_{k,m}(\zeta)=\zeta^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\zeta}\int_0^{\infty}v^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}v}W_{\lambda,\mu}(v)\,G^{2,1}_{2,4}\left(\zeta v\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,\,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)dv,$$

$$R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0.$$

Replacing ζ by st, v by x/t in this and substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s:k,m)=s\int_0^{\infty}(st)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}st}W_{k,m}(st)\,f(t)\,dt,$$

we get

$$\varphi(s:k,m)=s^{m+1}\int_0^{\infty}t^{m}f(t)\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2t}}W_{\lambda,\mu}\left(\frac{x}{t}\right)G^{2,1}_{2,4}\left(sx\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k\atop m,\,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\frac{dx}{t}\,dt.$$

Changing the order of integration, we get

$$\varphi(s:k,m) = s^{m+1}\int_0^\infty x^{-\beta-\frac{1}{2}}\, G^{2,1}_{2,4}\left(sx\,\middle|\,{\beta+\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-k \atop m,-m,\beta+\mu,\beta-\mu}\right)\int_0^\infty t^{m-\frac{1}{2}+\beta}\, e^{-\frac{x}{2t}}\, W_{\lambda,\mu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt\,dx.$$

Putting $t=\frac{1}{u}$, this gives the result.

The change in the order of integration is permissible by the application of DE LA VALLÉE POUSSIN'S Theorem ([16], p. 504), since the x-integral is absolutely and uniformly convergent if $R(s)>0$, $R(1-\beta\pm m\pm\mu)>0$; the t-integral is uniformly and absolutely convergent if the generalized Laplace transform of $\left|t^{-(\beta+\mu+m+1)}f\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ exists and the repeated integral is absolutely convergent due to the absolute convergence of the integral in (5.1).

5.1. Corollaries.

(i) Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $\beta+\mu=-m-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-k$ we get:

If

$$W[f(t);k,m]=\varphi(s:k,m)$$

and

$$t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right)\ :\ \psi(s:\sigma),$$

then

$$\varphi(s:1+m,m)=s^{m+1}\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}\,Y_{2m}\left(2\sqrt{sx}\right)\psi\left(x:-\tfrac{1}{2}\right)dx, \tag{5.2}$$

where $Y_\nu(x)$ is the Bessel function of the second kind, provided $R(s)>0$, $R(m)<\frac{3}{4}$, the Laplace transform of $\left|t^{-\frac{1}{2}}f\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ exists and the integral in (5.2) is absolutely convergent.

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$ and $\beta=-m$, we get:

If

$$f(t)\ :\ \varphi(s)$$

and

$$W\left[t^{\sigma}f\left(\frac{1}{t}\right);\lambda,\mu\right]=\psi(s:\lambda,\mu:\sigma),$$

then

$$\varphi(s)=\sqrt{\pi s}\int_0^\infty x^{-(\mu+1)}\,J_\mu\left(\sqrt{sx}\right)J_{-\mu}\left(\sqrt{sx}\right)\psi(x:1,\mu:-\mu-1)\,dx, \tag{5.3}$$

provided $R(s)>0$, $R(1\pm\mu)>0$, the generalized Laplace transform of $\left|t^{-(\mu+1)}f\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ exists and the integral in (5.3) is absolutely convergent.

5.2. Example.

If we take, in Theorem 3, $f(t)=t^{-\nu}e^{-\frac{1}{2}at}W_{l,n}(at)$, we get after a little simplification,

$$\int_0^\infty G^{2,1}_{2,4}\left(sx\,\middle|\,{-a_1,-b_5 \atop 0,-a_3,-b_1,-b_2}\right)G^{4,0}_{2,4}\left(ax\,\middle|\,{a_1,a_2 \atop b_1,b_2,b_3,b_4}\right)dx=s^{-1}\,G^{2,2}_{3,3}\left(\frac{a}{s}\,\middle|\,{0,a_3,a_2 \atop b_3,b_4,b_5}\right), \tag{5.4}$$

provided $R(a)>0$, $R(s)>0$, $R(b_3+1)>0$, $R(b_4+1)>0$, $R(b_3-a_3+1)>0$ and $R(b_4-a_3+1)>0$. This integral is a particular case of a known integral ([6], p. 422).

6. Theorem 4. *If*

$$W[f(t); k, m] = \varphi(s : k, m)$$

and

$$W\left[t^{\sigma} e^{-\frac{\alpha}{t}} f\left(\frac{1}{t}\right); \lambda, \mu\right] = \psi(s, \alpha : \lambda, \mu : \sigma),$$

then

$$(6.1) \quad \begin{cases} \varphi(s : k, m) = \dfrac{s^{m+1}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)} \displaystyle\int_0^{\infty} x^{-(\beta+\mu+1)} \times \\ \qquad \times G^{2,2}_{2,4}\left(s x \,\middle|\, {\beta+\lambda-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+k \atop m, -m, \beta+\mu, \beta-\mu}\right) \psi(x, s : \lambda, \mu : -\beta-\mu-1-m)\, dx, \end{cases}$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\beta \pm m \pm \mu)>0$, *the generalized Laplace transform of* $t^{-(\beta+\mu+1+m)} e^{-\frac{\alpha}{t}} f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (6.1) *converges absolutely.*

The theorem follows on using ([15], p. 187)

$$W_{k,m}(\zeta) = \frac{\zeta^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\zeta}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)} \int_0^{\infty} v^{-\beta-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}v} W_{\lambda,\mu}(v)\, G^{2,2}_{2,4}\left(\zeta v \,\middle|\, {\beta+\lambda-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+k \atop m, -m, \beta+\mu, \beta-\mu}\right) dv,$$

$$R(1-\beta \pm m \pm \mu) > 0,$$

and proceeding as in the proof of Theorem 3.

6.1. Corollary. Putting $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $\beta+\mu=\delta$ in the theorem, we get:

If

$$W[f(t); k, m] = \varphi(s : k, m)$$

and

$$t^{\sigma} e^{-\frac{\alpha}{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) \div \psi(s, \alpha : \sigma),$$

then

$$(6.2) \quad \varphi(s : k, m) = \frac{s^{m+1}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m)} \int_0^{\infty} x^{-\delta-1} G^{2,1}_{1,3}\left(s x \,\middle|\, {k+\frac{1}{2} \atop m, -m, \delta}\right) \psi(x, s : -\delta-m-1)\, dx,$$

provided $R(s)>0$, $R(1-\delta \pm m)>0$, *the Laplace transform of* $t^{-(\delta+m+1)} e^{-\frac{\alpha}{t}} f\left(\frac{1}{t}\right)$ *exists and the integral in* (6.2) *is absolutely convergent.*

6.2. Example. Let in the corollary of § 6.1, $f(t) = t^{\varrho+1}$, so that ([8], p. 146)

$$t^{\sigma} e^{-\frac{\alpha}{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) = t^{\sigma-\varrho-1} e^{-\frac{\alpha}{t}} \div 2 s \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(\varrho-\sigma)} K_{\varrho-\sigma}\left(2\sqrt{\alpha s}\right) = \psi(s, \alpha : \sigma),$$

$$R(\alpha) > 0 \quad \text{and} \quad R(s) > 0.$$

And ([7], p. 382)

$$\varphi(s:k,m)=\frac{s^{-\varrho-1}\,\Gamma_*(\varrho+2+m\pm m)}{\Gamma(\varrho+5/2+m-k)},$$

$$R(s)>0 \quad \text{and} \quad R(\varrho+2+m\pm m)>0.$$

Using these in (6.2) and replacing $\delta+1+m+\varrho$ by ν and $-\delta+1+m+\varrho$ by 2μ, we get

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu\left(2\sqrt{sx}\right) G_{1,3}^{2,1}\left(sx\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+k\\ m,-m,\frac{\nu}{2}-\lambda\end{matrix}\right) dx=\frac{\Gamma_*\left(\frac{1}{2}-k\pm m\right)\Gamma_*\left(\mu+\frac{\nu}{2}+1\pm m\right)}{2s^{\mu+1}\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2}-k\right)},$$

$$R(s)>0 \quad \text{and} \quad R\left(\mu+1\pm\frac{\nu}{2}\pm m\right)>0.$$

Further, putting $k=0$ and $\mu=\nu/2$, we get from this integral,

$$\int_0^\infty x^\mu K_{2\mu}\left(2\sqrt{sx}\right)\left[I_{-m}^2\left(\sqrt{sx}\right)-I_m^2\left(\sqrt{sx}\right)\right] dx=\frac{\sin(m\pi)\,\Gamma_*(2\mu+1\pm m)}{\sqrt{\pi}\,s^{\mu+1}\Gamma(2\mu+\frac{3}{2})},$$

$$R(\mu+\tfrac{1}{4})<0 \quad \text{and} \quad R(\mu+1\pm\mu\pm m)>0.$$

I wish to express my sincere thanks to Dr. S. K. Bose for his help and guidance in the preparation of this paper.

References

[1] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **43**, 599–608, 702–711 (1940). — [2] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **44**, 727–737 (1941). — [3] Boas, R. P.: Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 286–294 (1942). — [4] Varma, R. S.: Current Sci. India **16**, 17–18 (1947). — [5] Varma, R. S.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **20**, 209–216 (1951). — [6] Bateman Project: Tables of Integral Transforms **2** (1954). — [7] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Inst. Sci., India A **21**, 382–393 (1955). — [8] Bateman Project: Tables of Integral Transforms **1** (1954). — [9] Goldstein, S.: Proc. London Math. Soc., Ser. II **34**, 103–125 (1932). — [10] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **22**, 65–74 (1953). — [11] Narain, R.: Some properties of generalized Laplace transform I. Rivista di Matematica **8** (1957). — [12] MacRobert, T. M.: Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, Pt. IV, 190–191 (1955). — [13] Rathie, C. B.: Proc. Nat. Acad. Sci., India A **21**, 231–249 (1952). — [14] Shastri, N. A.: Proc. Indian Acad. Sci. A **20**, 211–223 (1944). — [15] Meijer, C. S.: Proc. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam **44**, 186–194 (1941). — [16] Bromwich, T. J. I'A.: The Theory of Infinite Series. (1932).

Department of Mathematics, University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 10. Oktober 1956)

STEIN, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 282/83 (1957)

A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve

By
SHERMAN K. STEIN

Let $B \subset E_2$[1]) be a convex curve with unique support line at each point and without linear segments; let K be the closure of the interior of B, and C the closure of the exterior of B (so $B = K \cap C$). Define $g\colon C \to E_2$ in the following manner. From $Q \in E_2 - K$ there are two tangents T_1, T_2 to C with points of contact P_1, P_2 respectively. The line through P_1, parallel to T_2, and the line through P_2, parallel to T_1, intersect in a point which shall be called $g(Q)$. For $Q \in C$ set $g(Q) = Q$. Observe that g is continuous.

Theorem. (a) *g is onto E_2,*

(b) *for $P \in K$, $g^{-1}(P)$ contains at least two points,*

(c) *there is at least one point $P \in K$ so that $g^{-1}(P)$ contains at least four points.*

Before proving this theorem we should point out that theorems equivalent to (a) and (b), usually stated for centrally-symmetric regions, can be found in the literature, for example in [1] to [4] and in some unpublished work of ANDREW SOBCZYK.

Proof of (a). Let $P \in E_2$. We wish to produce S such that $g(S) = P$. To do so, define $F\colon B \times B \to E_1$ by $F(Q, R) =$ area of triangle PQR. This function F, with compact domain $B \times B$, is continuous and hence there is at least one point (Q, R) where F assumes its maximum value. Let S be the intersection of the tangents at Q and R (it is not difficult to show that these tangents cannot be parallel). Then, as is shown by an elementary argument in [1], $g(S) = P$. Thus g is onto E_2.

Proof of (b). Let $P \in K$. If, in addition, $P \in B$, then $g(P) = P$ and $g(S) = P$, where S is the point produced in the proof of (a); it is obvious that S is distinct from P. Now assume that $P \in K - B$, and is chosen as the pole of a polar coordinate system. We define two functions of period 2π,

$$r\colon\ E_1 \to E_1 \quad \text{and} \quad p\colon\ E_1 \to E_1.$$

The function r describes B in polar coordinates. The function p is the support function of K. To be more precise, $p(t)$ is the distance p to the tangent, $T(t)$, to B, perpendicular to the ray of angle t (and located on the same side of P as the ray is).

If $\psi(t)$ is the angle from the ray of angle t to the tangent at the point $(r(t), t)$ then

$$\tan \psi(t) = r/r'.$$

[1]) E_n denotes n-dimensional Euclidean space.

If $\varphi(t)$ is the angle from the ray of angle t to the ray joining P to $T(t) \cap B$ then

$$\tan \varphi(t) = p'/p.$$

We wish to prove that there exist at least two values of t incongruent mod 2π such that $\psi(t) = \varphi(t+\pi/2) + \pi/2$.

Now the preceding equation is equivalent to the equation

$$\tan(\psi(t)) \cdot \tan \varphi(t + \pi/2) = -1.$$

Thus we are required to produce two values of t such that

$$\frac{r(t)}{r'(t)} \cdot \frac{p'(t+\pi/2)}{p(t+\pi/2)} = -1$$

or, equivalently

$$(*) \qquad r(t)\, p'(t+\pi/2) + r'(t)\, p(t+\pi/2) = 0.$$

To do this simply consider the function $A\colon E_1 \to E_1$ defined by $A(t) = r(t) \cdot p(t+\pi/2)$. The function A has at least one maximum and one minimum, say at t_1 and t_2, $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$. At these values of t condition $(*)$ holds. This proves (b).

Proof of (c). A point $P_0 \in K$ such that the associated function A has maxima at two values of t incongruent and 2π would also have at least two minima and hence $g^{-1}(P_0)$ would contain at least four points.

Assume that for each $P \in K$ the associated A has precisely one point of maximum, mod 2π, say at the argument $t(P)$. Now we define a continuous mapping $J\colon K \to B$ by $J(P) = (r(t(P)), t(P))$. This function J has no fixed points, in contradiction with BROUWER's fixed point theorem for the disk. Thus (c) is proved.

References

[1] TAYLOR, A. E.: A geometric theorem and its applications to biorthogonal systems. Bull. A.M.S. **53**, 614–616 (1947). – [2] FUNK, P.: Über den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Z. **3**, 87–92 (1919). – [3] INZINGER, R.: Sui diametric coniugati delle ovali a centro. Atti. Rend. Acc. Naz. dei Lincei **1947**, 293–295. – [4] LAUGWITZ, DETLEF: Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Math. Z. **61**, 235–244 (1954).

Dept. of Math., Univ. of California, Davis, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 11. April 1957)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 284--289 (1957)

The bilinear Generating Funktion for Hermite Polynomials in Several Variables

By
L. CARLITZ

1. BURCHNALL [2] used the formula

$$(D-2x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r}\binom{n}{r} H_{n-r}(x)\cdot D_r, \tag{1}$$

where $D = d/dx$ and

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n,$$

to give an elegant proof of the identity (due to NIELSEN [6; p. 31])

$$H_{m+n}(x) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-1)^r \binom{m}{r}\binom{n}{r} 2^r r!\, H_{m-r}(x)\, H_{n-r}(x). \tag{2}$$

It may be of interest to point out that (1) can also be used to give an elementary proof of MEHLER'S formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, H_n(y)}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{2xyz-(x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\}; \tag{3}$$

for other proofs of (3) see for example [7].

Indeed if $F = F(x, y, z)$ stands for the right member of (3) and $D_x = \partial/\partial x$, $D_y = \partial/\partial y$, it is easily verified that

$$(D_x - 2x)F = \frac{2yz-2x}{1-z^2}F, \qquad (D_y - 2y)F = \frac{2xz-2y}{1-z^2}F,$$

$$(D_x - 2x)(D_y - 2y)F = \left\{\frac{(2yz-2x)(2xz-2y)}{(1-z^2)^2} + \frac{2z}{1-z^2}\right\}F. \tag{4}$$

On the other hand we find that

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left\{2\,\frac{(x-yz)(y-xz)}{(1-z^2)^2} + \frac{z}{1-z^2}\right\}F. \tag{5}$$

Comparing (4) and (5) we get

$$2\frac{\partial F}{\partial z} = (D_x - 2x)(D_y - 2y)F. \tag{6}$$

If now we put

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, y)\frac{z^n}{n!} \qquad (A_0(x, y) = 1),$$

it is evident that (6) implies

$$2A_n(x,y) = (D_x - 2x)(D_y - 2y)A_{n-1}(x,y);$$

since the operators $D_x - 2x$, $D_y - 2y$ commute, this yields

$$2^n A_n(x,y) = (D_x - 2x)^n (D_y - 2y)^n \cdot 1.$$

Using (1) we have at once

$$2^n A_n(x,y) = H_n(x) H_n(y),$$

which evidently proves (3).

2. If we put

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

a non-singular quadratic form, then, following APPELL and KAMPÉ DE FÉRIET [1]

$$e^{\xi_1 t_1 + \cdots + \xi_n t_n - \frac{1}{2}\varphi(t)} = \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

where

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n} a_{ij} x_j. \tag{8}$$

ERDÉLYI [3] has proved the following extension of MEHLER'S formula (see KOSCHMIEDER [4] for $n=2$):

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{m_i=0} \frac{t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) H_{m_1 \ldots m_n}(y_1, \ldots, y_n) \\ &\qquad = \frac{1}{t_1 \ldots t_n (\Delta_1 \Delta_2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ \frac{1}{4}\psi_1(\xi + \eta) - \frac{1}{4}\psi_2(\xi - \eta) \right\}, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

where

$$\varphi_1(x) = \sum_{1}^{n} \frac{x_i^2}{t_i} + \varphi(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x_i^2}{t} - \varphi(x), \tag{10}$$

Δ_1, Δ_2 are the discriminants of φ_1, φ_2, respectively and $\psi_1(x), \psi_2(x)$ denote the quadratic forms inverse to φ_1 and φ_2; ξ_i is defined by (8) and

$$\eta_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} = \sum a_{ij} y_j. \tag{11}$$

We now prove (9) by the method used above in proving (3). In the first place it follows readily from (7) that

$$E_i H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) = (\xi_i - D_{x_i}) H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

where $D_{x_i} = \partial / \partial x_i$ and the left member denotes the H polynomial with m_i replaced by $m_i + 1$.

Put

$$\psi_1(x) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j, \qquad \psi_2(x) = \sum_{ij} \gamma_{ij} x_i x_j,$$

so that, in view of (10),

$$\sum_j \Big(\frac{\delta_{ij}}{t_i} + a_{ij}\Big)\beta_{jk} = \delta_{ik} = \sum_j \Big(\frac{\delta_{ij}}{t_i} - a_{ij}\Big)\gamma_{jk},$$

which gives

$$(13) \qquad \sum_j a_{ij}\beta_{jk} = \delta_{ik} - \frac{1}{t_i}\beta_{ik}, \qquad \sum_j a_{ij}\gamma_{jk} = -\delta_{ik} + \frac{1}{t_i}\gamma_{ik}.$$

If we put

$$F = \tfrac{1}{4}\psi_1(\xi+\eta) - \tfrac{1}{4}\psi_2(\xi-\eta),$$

it is easily verified that

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \xi_i - \frac{1}{2t_i}(X_i + Y_i + X_i' - Y_i'),$$

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \eta_i - \frac{1}{2t_i}(X_i + Y_i - X_i' + Y_i'),$$

where

$$(16) \quad X_i = \sum_k \beta_{ik}\xi_k, \quad Y_i = \sum_k \beta_{ik}\eta_k, \quad X_i' = \sum_k \gamma_{ik}x_k, \quad Y_i' = \sum_k \gamma_{ik}y_k.$$

We have also from (14) or (15)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_i} = a_{ii} - \frac{1}{2t_i}\sum_k (\beta_{ik}a_{ki} - \gamma_{ik}a_{ki}).$$

Using (13) this reduces to

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_i} = a_{ii} - \frac{1}{t_i} + \frac{\beta_{ii}+\gamma_{ii}}{2t_i^2}.$$

If Φ denotes the right member of (9), it follows from (14), (15), (17) that

$$(18) \qquad (D_{x_i} - \xi_i)(D_{y_i} - \eta_i)\Phi = \Big\{\frac{(X_i+Y_i)^2 - (X_i'-Y_i')^2}{4t_i^2} - \frac{1}{t_i} + \frac{\beta_{ii}+\gamma_{ii}}{2t_i^2}\Big\}\Phi.$$

To compute $\partial\Phi/\partial t_r$ we need $\partial\beta_{ij}/\partial t_r$ and $\partial\gamma_{ij}/t_k$. Using (13) we find that

$$(19) \qquad \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\beta_{ik}\beta_{jk}}{t_k^2}, \qquad \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\gamma_{ik}\gamma_{jk}}{t_k^2}.$$

We have also

$$(20) \qquad \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\Delta_1}{\partial t_k} = -\frac{\beta_{kk}}{t_k^2}, \qquad \frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial\Delta_2}{\partial t_k} = -\frac{\gamma_{kk}}{t_k^2}.$$

Now employing (19) and (16) we get

$$(21) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t_k} = \Big\{\frac{(X_k+Y_k)^2 - (X_k'-Y_k')^2}{4t_k^2} - \frac{1}{t_k} + \frac{\beta_{kk}+\gamma_{kk}}{2t_k^2}\Big\}\Phi.$$

Comparing (21) with (18) we see that

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_k} = (D_{x_k} - \xi_k)(D_{y_k} - \eta_k)\Phi. \tag{22}$$

If we put

$$\Phi = \sum_{m_i=0}^{\infty} A_{m_1 \dots m_n} \frac{t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!},$$

clearly (22) implies

$$E_i A_{m_1 \dots m_n} = (D_{x_i} - \xi_i)(D_{y_i} - \eta_i) A_{m_1 \dots m_n}, \tag{23}$$

where E_i has the same meaning as in (12). The operators $D_{x_i} - \xi_i$ and $D_{y_j} - \eta_j$ obviously commute; the same is also true of $D_{x_i} - \xi_i$ and $D_{x_j} - \eta_j$ as well as of $D_{y_i} - \eta_i$ and $D_{y_j} - \eta_j$. Thus repeated use of (23) yields

$$A_{m_1 \dots m_n} = \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i)^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} (D_{y_j} - \eta_j)^{m_j} \cdot 1.$$

But by (12)

$$H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{m_1 + \dots + m_n} \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i) \cdot 1. \tag{24}$$

Hence we get

$$A_{m_1 \dots m_n} = H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)\, H_{m_1 \dots m_n}(y_1, \dots, y_n),$$

which evidently completes the proof of (9).

Incidentally by means of (12) we can prove that

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} (D_{x_i} - \xi_i)^{m_i} = \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{m_1 + \dots + m_n - r_1 - \dots - r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} \times \right. \tag{25}$$
$$\left. \times H_{m_1 - r_1, \dots, m_n - r_n}(x_1, \dots, x_n)\, D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n}, \right.$$

which in particular contains (24). Using (25) we can obtain a generalization of (2). Indeed (12) and (25) imply

$$\left\{ H_{m_1 + p_1, \dots, m_n + p_n}(x_1, \dots, x_n) \right. \tag{26}$$
$$= \sum_{r_i=0}^{m_i} (-1)^{r_1 + \dots + r_n} \binom{m_1}{r_1} \dots \binom{m_n}{r_n} H_{m_1 - r, \dots, m_n - r_n}(x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\left. \times D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n). \right.$$

Using (7) we get

$$D_{x_i} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_j a_{ij} p_j E_j^{-1} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n)$$

so that

$$D_{x_1}^{r_1} \dots D_{x_n}^{r_n} H_{p_1 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n)$$

can be expressed as a linear combination of H's. However, the resulting form of (26) seems too complicated to be of interest.

3. Closely related to the polynomials H is a second set of polynomials defined by

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1}\dots t_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!} G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) = e^{x_1t_1+\cdots+x_nt_n-\frac{1}{2}\psi(t)} \tag{27}$$

where $\psi(t)$ denotes the quadratic form inverse to $\varphi(t)$. From (27) we get

$$E_i G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) = (x_i - D_{\xi_i})\, G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n), \tag{28}$$

analogous to (12). This formula yields

$$\left\{\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n}(x_i - D_{\xi_i})^{m_i} = \sum_{r_i=0}^{m_i}(-1)^{r_1+\cdots+r_n}\binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n} \times \\ \times\, G_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, D_{\xi_1}^{r_1}\dots D_{\xi_n}^{r_n} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

and in particular

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - D_{\xi_i})^{m_i}\cdot 1 = G_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n); \tag{30}$$

(29) and (30) may be compared with (25) and (26). Here again by means of (29) we get a complicated generalization of (2) which we shall not state. However, we may note the following results:

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n}(\xi_i - D_{x_i})^{m_i}\cdot G_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) \\ &\quad = \sum_{r_i=0}^{m_i}(-1)^{r_1+\cdots+r_n}\binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n}\binom{p_1}{r_1}\dots\binom{p_n}{r_n} r_1!\dots r_n! \times \\ &\qquad \times H_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, G_{p_1-r_1,\dots,p_n-r_n}(x_1,\dots,x_n), \end{aligned}\right. \tag{31}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n}(x_i - D_{\xi_i})^{m_i}\cdot H_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) \\ &\quad = \sum_{r_i=0}^{m_i}(-1)^{r_1+\cdots+r_n}\binom{m_1}{r_1}\dots\binom{m_n}{r_n}\binom{p_1}{r_1}\dots\binom{p_n}{r_n} r_1!\dots r_n! \times \\ &\qquad \times G_{m_1-r_1,\dots,m_n-r_n}(x_1,\dots,x_n)\, H_{p_1-r_1,\dots,p_n-r_n}(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}\right. \tag{32}$$

The inverses of (31) and (32) are readily obtained. Note also that (31) and (32) imply

$$\prod_{1}^{n}(\xi_i - D_{x_i})^{m_i}\cdot G_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1}^{n}(x_i - D_{\xi_i})^{p_i}\cdot H_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n). \tag{33}$$

By means of (28) we can also obtain the analog of (9) involving the G's. However, we shall not take the space to state the result. More interesting is the following mixed formula proved by ERDÉLYI [3] for general n and by KOSCHMIEDER [5] for $n=2$.

Let

$$\Phi(w) = \sum_{r=1}^{n} \frac{u_r^2 + v_r^2}{t_r} + \frac{1}{2}\varphi(u + iv) + \frac{1}{2}\psi(u - iv),$$

a quadratic form in the $2n$ indeterminates

$$w_1 = u_1, \ldots, w_n = u_n, \qquad w_{n+1} = v_1, \ldots, w_{2n} = v_n;$$

let Δ' denote the discriminant of Φ and $\Psi(w)$ the inverse form. Also put

$$z_1 = \xi_1 + y_1, \ldots, z_n = \xi_n + y_n, \qquad z_{n+1} = i(\xi_1 - y_1), \ldots, z_{2n} = i(\xi_n - y_n).$$

Then we have

$$(34) \qquad \left\{ \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)\, G_{m_1, \ldots, m_n}(y_1, \ldots, y_n) \right.$$
$$\left. = \frac{1}{t_1 \ldots t_n \Delta'^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{4}\Psi(z)\right\}. \right.$$

Let W denote the right member of (34). Then as in the proof of (9), we can show that

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} = (D_{x_k} - \xi_k)(D_{\eta_k} - y_k)\Phi.$$

Using (24) and (30) we at once get (34).

References

[1] Appell, P., and J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergeometriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris 1926. — [2] Burchnall, J. L.: A note on the polynomials of Hermite. Quarterly J. Math. (Oxford) **12**, 9–11 (1941). — [3] Erdélyi, A.: Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome. Math. Z. **44**, 201–211 (1939). — [4] Koschmieder, L.: Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist. Math. Z. **43**, 248–254 (1937). — [5] Koschmieder, L.: Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt. Math. Z. **43**, 783–792 (1938). — [6] Nielsen, N.: Recherches sur les polynomes d'Hermite. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Meddelelser (I) **6**, 1–78 (1918). — [7] Watson, G. N.: Notes on generating functions of polynomials: (2) Hermite polynomials. J. London Math. Soc. **8**, 194–199 (1933).

Dept. of Math., Duke University, Durham, N.C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 19. April 1957)

McCarthy, P. J.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 290–295 (1957)

On Indefinite Ternary Genera of One Class

By
PAUL J. McCARTHY

1. Introduction. Let f be a ternary quadratic form whose matrix A has integral elements. The determinant of A is called the determinant of f, is denoted by $|f|$, and is assumed to be non-zero. Let J be the g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of A, and let the integer K be determined by $|f| = J^2K$. J and K are invariants of f under integral unimodular transformations. f is called primitive if the g.c.d. of all the elements of A is 1. If f is primitive, it is called properly primitive if not all the diagonal elements of A are even. Otherwise it is called improperly primitive. All the forms considered in this paper will be primitive forms.

The form F, whose (integral) matrix is $J^{-1}|f|A^{I}$, is called the reciprocal form of f. F is a primitive form. The g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of F is K, and $|F| = K^2J$.

f and a second form g are said to be equivalent, or in the same class, when they can be transformed into one another by integral unimodular transformations. f and g are said to be in the same genus when they can be transformed into one another by rational transformations, of determinant 1, and with elements whose denominators are prime to $2|f|$. The genus of f can also be described in terms of certain quadratic characters, and for this description the reader is referred to Chapter IV of [1]. The genus of f consists of a finite number of classes of forms, and the number of these classes is called the class number of the genus.

In the case when f is an indefinite form, A. MEYER obtained in [7] certain sufficient conditions for the genus of f to contain only one class. Out of these conditions he obtained the following fundamental result.

Theorem 1 (MEYER). *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if $(J, K) = 1$ or 2 and $J \not\equiv 0 \not\equiv K \pmod 4$.*

Serious doubts have been raised concerning MEYER's proof of this theorem (see, for example, Sec. 1 of [4]). A proof was recently given by JONES and MARSH [4].

In this paper we shall obtain certain other sets of sufficient conditions for the genus of f to contain only one class. These results are obtained by a type of reduction process which is described in the next section. They include extensions of some results of JONES [3] (see Theorems 3 and 4). Some of these results are certainly contained in the theorems of MEYER's paper, but again we have the difficulties with proofs. Therefore, it seems not out of place to present these theorems with the proofs we have devised.

The solution of the more general problem of determining the class number of the genera of indefinite ternary forms was the object of several papers by MEYER in the last decade of the last century. He treated only forms with odd determinant. This problem was again attacked recently by JONES and WATSON [6], and they obtained some very general results. They have given the class number of the genus in terms of the index of a subgroup of a certain group associated with the genus. However, in case J and K are known, we are left with the difficult task of determining this index.

2. The N-related form of f. Let $M = JK$ if both f and its reciprocal form are properly primitive. Otherwise, let M be the product of the odd parts of J and K. Let k be a large natural number which we hold fixed throughout the following discussion. Then there is a form f_0, equivalent to f, such that

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} f_0 \equiv a x^2 + b J K y^2 + c J z^2 \\ F_0 \equiv b c J K x^2 + a c y^2 + a b K z^2 \\ a b c \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{M^k},$$

where F_0 is the reciprocal form of f_0 ([8], p. 460).

Let N be a factor of J which divides M. Write $N = r^2 s$, where s is squarefree. Define a new form g, with matrix B, by setting

$$B = N^{-1} P A_0 P,$$

where A_0 is the matrix of f_0, and

$$P = \begin{pmatrix} rs & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We call this form g the N-related form of f.

If p is a prime, and t is any integer, we denote by $(t)_p$ the exponent of p in the prime decomposition of t.

Let J' be the g.c.d. of all the 2-rowed minor determinants of B, and let K' be determined by $|g| = J'^2 K'$. If p is a prime not dividing N, it is clear that $(J')_p = (J)_p$ and $(K')_p = (K)_p$. Let p be a prime dividing N. If B_{ij} is the minor of the element b_{ij} of B, then $(J')_p$ is the minimum of the exponents of p in the prime decompositions of

$$\left.\begin{array}{l} B_{11} \equiv N^{-2} b c J^2 K \\ B_{22} \equiv r^{-2} a c J \\ B_{33} \equiv r^{-2} a b J K \end{array}\right\} \pmod{M^{k-1}}.$$

Hence

$$(J')_p = \min\left((J)_p - 2(r)_p,\ 2(J)_p + (K)_p - 4(r)_p - 2(s)_p\right).$$

Then, since $|f| = r^4 s |g|$,

$$(K')_p = 2(J)_p + (K)_p - 4(r)_p - (s)_p - 2(J')_p.$$

Let us assume that f and its reciprocal form F are both properly primitive when either J or K is divisible by 4, and that s and $N^{-1}J$ are relatively prime. With these assumptions, it is a simple task to show that the genus of g is completely determined by the genus of f. We shall express the generic characters $(g|p)$ of g in terms of the generic characters of f.

If p is an odd prime dividing J but not s, then $(g|p)=(s|p)(f|p)$. If p is an odd prime dividing K, then $(G|p)=(F|p)$, where G is the reciprocal form of g. Now let p be an odd prime dividing s such that $(J')_p \neq 0$. Then p must divide K, and we have $(g|p)=(cN^{-1}J|p)=(f|p)(F|p)(N^{-1}J|p)$. In a similar way it can be shown that the generic characters of g with respect to 4 and 8, when they exist, can be expressed in terms of the generic characters of f with respect to 4 and 8.

Note that under the assumptions we have made, g is primitive, and is properly or improperly primitive according as f is properly or improperly primitive.

Theorem 2. *Let f and its reciprocal form F be properly primitive when either J or K is divisible by 4, and let s and $N^{-1}J$ be relatively prime. If the N-related form g of f is in a genus of one class, then f is in a genus of one class if*

$$g(x,y,z) \equiv s\,a \pmod{M^{k-1}}$$

implies $y \equiv z \equiv 0 \pmod{rs}$.

Proof. Let f_1 be in the same genus as f. We may assume that $f_1 \equiv f_0 \pmod{(2M)^k}$ ([2], p. 107). Let A_1 be the matrix of f_1, and g_1 the form with matrix $B_1 = N^{-1}P^T A_1 P$. g_1 is the N-related form of f_1. Since f_1 and f are in the same genus, g_1 and g are in the same genus. Then by the hypothesis of the theorem, g_1 and g are equivalent, so there is a unimodular transformation with matrix $U=[u_{ij}]$ taking g into g_1. The transformation with matrix

$$PUP^I = \begin{pmatrix} u_{11} & rsu_{12} & rsu_{13} \\ (rs)^{-1}u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ (rs)^{-1}u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

takes f_0 into f. But $g(u_{11}, u_{21}, u_{31}) \equiv s\,a \pmod{M^{k-1}}$, and therefore $u_{21} \equiv u_{31} \equiv 0 \pmod{rs}$. Thus PUP^I is an integral matrix, and f and f_1 are equivalent.

N-related forms, with N a prime, were used by JONES in [3]. Theorem 2 was suggested by, and contains, a theorem in [5]. Note that in Theorem 2, f may be definite or indefinite.

3. Forms for which 3 divides J and K.

Theorem 3. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) (J,K) *divides* 6, (ii) $J \not\equiv 0 \not\equiv K \pmod 4$, (iii) $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$, *and* (iv) $c_3(f)=1$.

$c_3(f)$ is the Hasse invariant of f with respect to 3. An exposition of the properties of this invariant may be found in [2].

Remark. Two forms f and g are said to be in the same order if they have the same index, have the same invariants J and K, if both f and g are properly primitive or both are improperly primitive, and finally if their reciprocal forms are both properly primitive or both improperly primitive. Theorem 1, and also Theorems 5 and 6, state that every genus in certain orders contain only one class. Theorem 3 singles out certain genera in certain orders which contain only one class. This is the function of the condition (iv). It may happen, however, that $c_3(f) = 1$ for every form in an order of forms.

Proof of Theorem 3. If $(J, K) = 1$ or 2, the theorem is an immediate consequence of Theorem 1. So we assume that $(J, K) = 3$ or 6. Let $r = 1$ and $s = 3$, and let g be the 3-related form of f. From (iii) we have $(J)_3 = (K)_3 = 1$, hence $(J')_3 = 1$ and $(K')_3 = 0$. Also $(3, J/3) = 1$. Thus g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class.

Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv 3ax^2 + (bJK/3)y^2 + (cJ/3)z^2 \equiv 3a \pmod{27}.$$

Then $z \equiv 0 \pmod 3$, and so

$$(bJK/9)y^2 \equiv a(1 - x^2) \pmod 3.$$

If $x \equiv 1$ or $2 \pmod 3$, then $y \equiv 0 \pmod 3$. We shall show that we cannot have $x \equiv 0 \pmod 3$. If we were to have $x \equiv 0 \pmod 3$, we would have

$$(bJK/9)y^2 \equiv a \pmod 3,$$

which implies that $(abJK/9 \mid 3) = 1$. Then, using this fact, we obtain from ([2], p. 27 and p. 35),

$$c_3(f) = (-abJK, -bcJ^2K)_3 = (-abJK/9 \mid 3) = -1,$$

which contradicts (iv). The theorem now follows from Theorem 2.

The proof of the following theorem is similar to that of Theorem 3.

Theorem 4. *A positive ternary quadratic form f is in a genus of one class if 3 divides J and K, $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$, $c_3(f) = 1$ and the 3-related form of f is in a genus of one class.*

4. Forms for which 4 divides J and K.

Theorem 5. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 8 \pmod{16}$ *and* $K \equiv 2 \pmod 4$, *and* (ii) $(J, K) = 2$.

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = 1$ and $(K')_2 = 1$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1 and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv ax^2 + (bJK/4)y^2 + (cJ/4)z^2 \equiv a \pmod 8.$$

9272-68

20 A

(Note that in this case, and in the proofs of Theorems 6, 7 and 8, abc is odd.) Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(bJK/8)\, y^2 + (cJ/8)\, z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

But this clearly implies $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$, and so all is proved.

Theorem 6. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 2 \pmod 4$ *and* $K \equiv 4 \pmod 8$, *and* (ii) $(J, K) = 2$.

Proof. From the hypothesis of this theorem it follows easily that the coefficient a of the form on the right-hand side of the congruence (1) may be taken to represent either odd residue class modulo 4.

Let $r = 1$ and $s = 2$, and let g be the 2-related form of f. Then $(J')_2 = (K')_2 = 1$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv 2a\, x^2 + (bJK/2)\, y^2 + (cJ/2)\, z^2 \equiv 2a \pmod{16}.$$

Then z is even. Writing $z = 2z'$ we then have

$$a\, x^2 + (bJK/4)\, y^2 + cJ\, z'^2 \equiv a \pmod 8.$$

Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(bJK/8)\, y^2 + (cJ/2)\, z'^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

Now let $K/4 \equiv t \pmod 4$, where $t = 1$ or 3. Then we may assume that $a \equiv t \pmod 4$. Since $abc \equiv 1 \pmod 4$, we have $bc \equiv t \pmod 4$. Hence

$$bcJ^2K/16 \equiv bcK/4 \equiv 1 \pmod 4.$$

But this implies $y \equiv z' \equiv 0 \pmod 2$, and the proof is complete.

Theorem 7. *An indefinite ternary quadratic form f, with properly primitive reciprocal form, is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 8 \pmod{16}$ *and K is odd,* (ii) $(J, K) = 1$, *and* (iii) $(-1)^{(J-1)/2} = (-1)^{(K-1)/2}$.

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = 1$ and $(K')_2 = 0$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv a\, x^2 + (bJK/4)\, y^2 + (cJ/4)\, z^2 \equiv a \pmod 8.$$

Then $x^2 \equiv 1 \pmod 2$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hence

$$(bJK/8)\, y^2 + (cJ/8)\, z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

By (iii), a and K, and so bc and K, represent the same odd residue class modulo 4. Hence

$$bcJ^2K/64 \equiv bcK \equiv 1 \pmod 4.$$

But this implies that $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$, and the theorem is proved.

9272-68

Theorem 8. *An indefinite ternary quadratic form f is in a genus of one class if* (i) $J \equiv 4 \pmod 8$ *and* K *is odd*, (ii) $(J, K) = 1$, (iii) $(-1)^{(J-1)/2} = (-1)^{(K-1)/2}$, *and* (iv) *the congruence* $F \equiv -J/4 \pmod 4$ *is solvable.*

Proof. Let $r = 2$ and $s = 1$, and let g be the 4-related form of f. Then $(J')_2 = (K')_2 = 0$. Hence g satisfies the hypothesis of Theorem 1, and so is in a genus of one class. Now suppose that

$$g(x, y, z) \equiv a x^2 + (b J K/4) y^2 + (c J/4) z^2 \equiv a \pmod 8.$$

If x is odd, then

$$(b J K/4) y^2 + (c J/4) z^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

But

$$b c J^2 K/16 \equiv b c K \equiv a K \equiv 1 \pmod 4,$$

by (iii), so $y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$.

Now assume that x is even. If y is even and z is odd, then

$$a c \equiv J/4 \pmod 4.$$

If z is even and y is odd, then

$$a b \equiv J K/4 \pmod 4.$$

But $a c J/4 \equiv a b J K/4 \pmod 4$ by (iii), so one of these congruences holds if and only if the other one does. However, by (iv) we may assume that $a c \equiv -J/4 \pmod 4$. Hence it is impossible that x be even. This proves the theorem.

The proof of the following theorem is similar to the proof of Theorem 3.

Theorem 9. *Theorems* 5, 6, 7 *and* 8 *remain true if* (J, K) *has the additional factor* 3, *if* $|f| \not\equiv 0 \pmod{81}$ *and* $c_3(f) = 1$.

References

[1] Dickson, L. E.: Studies in the Theory of Numbers. Chicago University Press 1930. — [2] Jones, B. W.: The Arithmetic Theory of Quadratic Forms. (Carus Monograph No. 10, 1950.) — [3] Jones, B. W.: An extension of Meyer's theorem on indefinite ternary quadratic forms. Can. J. Math. **4**, 120–128 (1952). — Correction. Can. J. Math. **5**, 271–272 (1953). — [4] Jones, B. W., and D. C. B. Marsh: A proof of a theorem of Meyer on indefinite ternary quadratic forms. Amer. J. Math. **77**, 513–525 (1955). — [5] Jones, B. W., and G. Pall: Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms. Acta Math. **70**, 165–191 (1938). — [6] Jones, B. W., and G. L. Watson: On indefinite ternary quadratic forms. Can. J. Math. **8**, 592–608 (1956). — [7] Meyer, A.: Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. J. für Math. **108**, 125–139 (1891). — [8] Smith, H. J. S.: Collected Mathematical Papers, vol. I. Oxford 1894.

Dept. of Math., Florida State Univ., Tallahassee, Fla. (U.S.A.)

(Eingegangen am 10. Mai 1957)

9272–68

Boas jr., R. P.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 296–298 (1957)

Growth of Derivatives of Entire Functions *)

By
R. P. Boas, jr.

If $f(z)$ is analytic and of exponential type for $x>0$ it is known that if $f(x)$ approaches a limit as $x\to\infty$ along the positive real axis then $f'(x)\to 0$ along the positive real axis [2], [4], [6]. Gaier has asked whether this is a best possible result in the sense that exponential type cannot be replaced by the condition $\log M(r)=O\{r\mu(r)\}$ with any $\mu(r)$ which tends to ∞ [$M(r)$ is the maximum modulus of f]. A positive answer has the consequence that change of index in a Borel-summable series $\sum a_n$ is not in general permissible unless $a_n=O(K^n)$ for some positive K. Gaier has shown [5] that exponential type cannot be replaced by growth of any order exceeding 1. Here I shall answer Gaier's question affirmatively in general. The idea of the construction was suggested in conversation by the late A. C. Schaeffer.

It is natural to ask what can be said about the growth of $f'(x)$ in general when $f(x)$ is an entire function and $f(x)$ is bounded (or approaches a limit). This question (in a more general form) was answered by Delange and Gaier [2]. (A less general theorem of the same nature is given by Dzhrbashyan [3].) As a special case, we note that if f is of finite order, at least $\frac{1}{2}$, with Lindelöf proximate order $\varrho(r)$ [1, pp. 54ff.], then $f(x)=O(1)$ or $o(1)$ as $x\to+\infty$ implies $f'(x)=O(x^{\varrho(x)-1})$ or $o(x^{\varrho(x)-1})$, respectively. [If f is of order less than $\frac{1}{2}$, $f(x)=O(1)$ implies that f is a constant.]

Theorem. *Let $\mu(x)$ be defined for positive x, $\mu(x)\geq 2\pi$, unbounded, increasing, and continuously differentiable, with $\mu'(x)\downarrow 0$ and $\mu'(x)=o(1/x)$. Then there is an entire function $f(z)$ such that $\log|f(z)|=O\{|z|\mu(|z|)\}$, $f(x)\to 0$ as $x\to\infty$ through positive real values, and $f'(x)$ is unbounded.*

It is convenient to introduce an unbounded non-decreasing function $\lambda(x)$ such that $1\leq\lambda(x)\leq\frac{1}{2}\mu(x)$, and $\lambda(n)/\pi$ is an integer when n is a positive integer.

Let

$$\omega(z)=\int_z^\infty w^{-2}\sin^2 w\,dw,$$

where the path of integration is ultimately along the positive real axis, so that $\omega(x)$ is bounded for real x and $\omega(x)\to 0$ as $x\to+\infty$.

Let a_n be positive numbers such that $\sum a_n$ converges but $a_n\lambda(n)$ is unbounded.

Let $1+e^x\geq\psi(x)\geq e^x$ with $\psi(n)$ an integer when n is a positive integer.

*) Research supported by the National Science Foundation (U.S.A.).

Then the desired function is furnished by

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}.$$

In the first place this series converges uniformly for real x because $\omega(x)$ is bounded. Since each term approaches 0 as $x \to \infty$, it follows that $f(x) \to 0$ as $x \to +\infty$.

The formal series for $-f'(z)$ is

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda(k) \frac{\sin^2\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}}{\{\lambda(k)[z - \psi(k)]\}^2}.$$

This is uniformly convergent on compact sets if

$$\sum a_k \lambda(k) \frac{\exp\{2\lambda(k)|y|\}}{\{\lambda(k)\psi(k)\}^2}$$

converges uniformly when $|y|$ is bounded. This series in turn converges uniformly if

$$\sum \exp\{2\lambda(k)|y| - 2k\}$$

does, and the last series converges uniformly because $\lambda(k) \leq \mu(k) = o(\log k)$.

Thus $f'(z)$ is entire and hence so is $f(z)$. Moreover, if n is a positive integer,

$$-f'(\psi(n)) = a_n \lambda(n) + \sum_{k \neq n} a_k \lambda(k) \frac{\sin^2\{\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]\}}{\{\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]\}^2}.$$

Since $\lambda(k)[\psi(n) - \psi(k)]$ is a non-zero integral multiple of π, all the terms in the series vanish, so that $-f'(\psi(n)) = a_n \lambda(n)$, which is unbounded.

All that remains is to show that $f(z)$ has at most the prescribed rate of growth; it is enough to show that

$$\log|f'(z)| \leq |z| O\{\mu(|z|)\}.$$

If $|y| \leq 1$, x is large and positive, and m is the integer such that $\psi(m)$ is the $\psi(k)$ closest to z, then

$$|f'(z)| \leq \lambda(m) a_m e^{2\lambda(m)|x - \psi(m)|} + \left(\sum_{\psi(k) \leq x-1} + \sum_{\psi(k) \geq x+1}\right) \frac{a_k}{\lambda(k)} \frac{e^{2\lambda(k)}}{[x - \psi(k)]^2}.$$

The first term is $O(\log x)$. In the two sums we have *)

$$(1) \qquad \frac{1}{[x - \psi(k)]^2} = \frac{1}{\psi(k)^2}\left(1 + \frac{x}{\psi(k) - x}\right)^2 \leq \frac{(1+x)^2}{\psi(k)^2},$$

and so the sums do not exceed

$$O(x^2) \sum a_k \exp\{2[\lambda(k) - \psi(k)]\} = O(x^2),$$

*) *Added in proof.* In the next few lines the formulas can be simplified by replacing $\psi(k)$ by k. I am indebted to Dr. GAIER for this and for several other improvements.

since $\lambda(k)-\psi(k)<0$ for large k. If $x<-1$ we have a similar but simpler estimate since $\psi(k)\geq x+1$ for all k.

If $|y|\geq 1$, we have

$$|f'(z)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda(k)}\,\frac{\exp\{2\lambda(k)|y|\}}{[x-\psi(k)]^2+1}=\sum_{\psi(k)<x+1}+\sum_{\psi(k)\geq x+1}=S_1+S_2.$$

If $x<0$, S_1 is empty. Otherwise, in S_1 we have not more than $\log(x+1)$ terms, each not exceeding a fixed multiple of $\exp\{2\lambda(k)|y|\}$, so that

$$S_1\leq O(1)\log(x+1)\cdot\exp\{2|y|\,\lambda[\log(x+1)]\}\leq O(|x|)\,e^{|y|\,\mu(|x|)}.$$

In S_2 we have

$$\frac{1}{[\psi(k)-x]^2+1}\leq\frac{(1+x)^2}{\psi(k)^2}\leq(1+x)^2e^{-2k}$$

as in (1), and so

$$\begin{aligned}S_2&\leq O(|x|^2)\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\{2[\lambda(k)|y|-k]\}\\&\leq O(|x|^2)\max_{k\geq 1}\exp\{\mu(k)|y|-2k\},\end{aligned}$$

since $\sum a_k$ converges and $2\lambda(t)\leq\mu(t)$. The maximum of $\mu(t)|y|-2t$ will occur when $|y|=2/\mu'(t)$. Since $\mu'(t)$ decreases, $2/\mu'$ has an increasing inverse σ, and

$$\begin{aligned}S_2&\leq O(|x|^2)\exp\{\mu[\sigma(|y|)]\,|y|-2\sigma(|y|)\}\\&\leq O(|x|^2)\exp\{|y|\,\mu[\sigma(|y|)]\}.\end{aligned}$$

Now $\sigma(t)=o(t)$ since $\mu'(t)=o(1/t)$ and so

$$S_2\leq O(|x|^2)\exp\{|y|\,\mu(|y|)\}.$$

References

[1] Cartwright, M. L.: Integral functions. Cambridge 1956. — [2] Delange, H and D. Gaier: Über asymptotische Wege analytischer Funktionen und ihrer Ableitungen. Arch. Math. **7**, 135–142 (1956). — [3] Dzhrbashyan, M. M.: Estimates for the derivatives of entire functions of finite order and normal type. Izv. Akad. Nauk Armyansk. SSR. Fiz.-Mat. Estestv. Tehn. Nauki 8, no. 2, 1–16 (1955) (in Russian); Math. Rev. **17**, 141. — [4] Gaier, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453–455 (1953). — [5] Gaier, D.: On the change of index for summable series. Pacific J. Math. **5**, 529–539 (1955). — [6] Plancherel, M., and G. Pólya: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. Math. Helv. **9**, 224–248 (1937); **10**, 110–163 (1938).

Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)

(Eingegangen am 12. Mai 1957)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 299—315 (1957)

Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche

Von

ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Ist H_0 ein Halbmodul, d.h. eine additive, kommutative Halbgruppe mit den Elementen $x, y, \ldots$, und bedeutet 2^{H_0} den Raum aller nicht leeren Teilmengen von H_0, so bildet letzterer ebenfalls einen Halbmodul, sofern die Summe $A+B$ zweier Elemente A, B von 2^{H_0} durch die Vorschrift

$$A+B=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\} \tag{1.1}$$

definiert wird. Die Halbgruppe 2^{H_0} nennen wir den zu H_0 gehörigen Minkowskischen Halbmodul.

Es sei X nun ein Teilmodul von 2^{H_0} und Φ ein auf X definiertes, nichtnegatives Mengenfunktional. Setzt man

$$F=\sup\{\Phi(M) \mid M\in X\}, \tag{1.2}$$

so soll Φ in X superadditiv heißen, falls für je zwei Elemente A, B von X die Ungleichung

$$\Phi(A+B)\geq \operatorname{Min}\{F, \Phi(A)+\Phi(B)\} \tag{1.3}$$

gilt. Ist $0<F<+\infty$, so kann diese Größe ohne weiteres gleich Eins angenommen werden.

Mengenfunktionale vom Typus

$$\Phi(A+B)\geq \operatorname{Min}\{1, \Phi(A)+\Phi(B)\} \tag{1.4}$$

gehören bekanntlich zu den interessantesten der elementaren additiven Zahlentheorie.

Ist H_0 ein linearer (oder ein halblinearer) Raum und definiert man λA (λ reell bzw. ≥ 0) durch die Gleichung

$$\lambda A=\{\lambda x \mid x\in A\}, \tag{1.5}$$

so kann Φ, unter Annahme der Linearitätseigenschaft $\Phi(\lambda A)=|\lambda|\,\Phi(A)$ und sofern mit A auch λA zur X gehört, lediglich vom Typus

$$\Phi(A+B)\geq \Phi(A)+\Phi(B) \tag{1.6}$$

sein. Schreibt man diese Ungleichung in der allgemeinen Form

$$\Phi(A+\lambda B)\geq\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\qquad(\lambda>0), \tag{1.7}$$

so folgt daraus durch Grenzübergang

$$\Omega(A\,|\,B)\geq\Phi(B), \tag{1.8}$$

mit

$$\Omega(A\,|\,B)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Phi(A+\lambda B)-\Phi(A)}{\lambda}. \tag{1.9}$$

Die Ungleichung (1.8) soll allgemein die zu (1.6) gehörige isoperimetrische Ungleichung heißen und die Größe $\Omega(A\,|\,B)$ die Relativgröße von A und B.

Liegt eine isoperimetrische Ungleichung von der Form (1.8) vor, so bezeichnet man allgemein als deren Einzigkeitsfrage die Frage nach den Punktmengen A, B, für die das Gleichheitszeichen eintritt.

In Zusammenhang mit der Frage, wichtige superadditive Mengenfunktionale eines vorgelegten Minkowskischen Halbmoduls zu bestimmen, wurde nun im Laufe einer Forschung, die mehr als 50 Jahre gedauert hat, folgendes fundamentale Ergebnis erzielt:

Ist H_0 der n-dimensionale (euklidische) Zahlenraum E^n und ist $X=2^{H_0}$, so liefert die n-te Wurzel des (inneren) Lebesgueschen Maßes L_* ein superadditives Funktional vom Typus (1.6).

Das ist der Inhalt des berühmten Satzes von BRUNN-MINKOWSKI und LUSTERNIK[1]).

Leitet man nun aus der Ungleichung

$$L_*(A+B)^{1/n}\geq L_*(A)^{1/n}+L_*(B)^{1/n} \tag{1.10}$$

die isoperimetrische Ungleichung (1.8) ab, so findet man leicht

$$M(A\,|\,B)\geq L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}\,L_*(B)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.11}$$

[1]) Für die Literatur bis 1934, insbesondere für die Leistungen BRUNNs und MINKOWSKIs, sei hier auf das ausführliche Referat von BONNESEN und FENCHEL, Theorie der konvexen Körper (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, Verlag Springer, 1934) hingewiesen. LUSTERNIKs Note (Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für meßbare Punktmengen [C. R. Acad. Sci. USSR. **3**, 55—58 (1935)]) ist skizzenhaft gehalten, enthält jedoch alle wesentlichen Beweisgedanken, sofern es sich nicht um Einzigkeitsfragen handelt. Von späteren Arbeiten, in denen die Minkowskischen Methoden auf nicht konvexes A übertragen werden, sollen hier folgende erwähnt werden: 1. DINGHAS, A.: Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. **149**, 399—432 (1940). 2. DINGHAS und ERHARD SCHMIDT: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. preuß. Akad. Wiss. Jahrg. 1943, math.-naturwiss. Kl. Nr. 7 (1944), 18 S. 3. BUSEMAN, H.: The isoperimetric Problem for the Minkowski Area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). 4. Die wichtige Arbeit von HENSTOCK und A. M. MACBEATH [On the Measure of Sum-Sets. I. The Theorems of BRUNN-MINKOWSKI and LUSTERNIK. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. III **3**, 182—195 (1953)], behandelt als erste mit Minkowskischen Methoden den Fall zweier beliebiger Punktmengen A und B.

mit

$$M(A\,|\,B) = \frac{1}{n}\lim_{h\to 0}\frac{L_*(A+hB)-L_*(A)}{h}. \tag{1.12}$$

Vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu der bisher allgemein wenig behandelten Einzigkeitsfrage von (1.11), indem für eine Klasse (Klasse $\mathfrak{E}$) von beschränkten jedoch nicht notwendig kompakten Punktmengen die Extremalmengen durch eine notwendige und hinreichende Bedingung charakterisiert werden. Diese Klasse $\mathfrak{E}$ enthält eine kürzlich von HADWIGER und OHMAN[2]) angegebene Klasse abgeschlossener Punktmengen, innerhalb derer (1.11) direkt zu charakterisierende Extremalmengen besitzt, als Spezialklasse.

2. Voraussetzungen. Methode. Ist M eine nichtleere Punktmenge von E^n und S_P^ε eine Kugel um den Punkt $P\in M$ vom Radius $\varepsilon>0$, so setze man

$$\sigma_\varepsilon(P\,|\,M) = L_*(M\cap S_P^\varepsilon)/|\,S_P^\varepsilon\,|\,. \tag{2.1}$$

Der Punkt P heißt dann ein innerer Dichtepunkt von M, wenn $\lim_{\varepsilon\to 1}\sigma_\varepsilon(P\,|\,M)$ existiert und gleich Eins ist[3]). Die Gesamtheit der inneren Dichtepunkte von M heißt der Dichtekern von M und wird mit M_* bezeichnet.

Der (äußere) Dichtekern M^* von M wird analog dadurch definiert, indem man in (2.1) $L_*(M\cap S_P^\varepsilon)$ durch das äußere Lebesguesche Maß $L^*(M\cap S_P^\varepsilon)$ ersetzt.

Mit Hilfe von M_* läßt sich unsere Einzigkeitsklasse $\mathfrak{E}$ durch folgende zwei Forderungen abgrenzen:

1. Für jedes $A, B\in\mathfrak{E}$ ist $L_*(A)>0$, $L_*(B)>0$.

2. Für jedes $A\in\mathfrak{E}$ ist $\bar{A}-\overline{(A_*)}$ entweder leer, oder es gibt eine Hyperebene H_{n-1} von E^n derart, daß die Projektion dieser Menge auf H_{n-1} mindestens einen inneren Dichtepunkt (relativ zu H_{n-1}) aufweist und somit ein positives (wieder relativ zu H_{n-1}) Maß hat. Dabei bedeutet $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A und $\overline{(A_*)}$ diejenige von A_*.

---

[2]) Abgesehen von der Arbeit von BUSEMAN, wo unter anderem das isoperimetrische Problem für eine Klasse von Punktmengen mit bestimmter Randbeschaffenheit mit Hilfe Minkowskischer und nichtminkowskischer Methoden erledigt wird, gab es bis zur kürzlich erschienenen Arbeit von HADWIGER und OHMAN [Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie, Math. Z. **66**, 1—8 (1956)] keine allgemeine Punktmengenklasse, innerhalb derer Einzigkeitsaussagen gemacht werden konnten. Die von den beiden Autoren verwendete Klasse fällt im wesentlichen mit einer Klasse abgeschlossener Punktmengen zusammen, deren Punktmengen A die Bedingung $\bar{A}_*=A$ erfüllen. Innerhalb dieser Klasse konnte ich (mit Hilfe der Meth den der in Fußnote 1 aufgeführten Arbeiten 1. und 2.) das Extremalproblem erledigen und den Beweis zusammen mit anderen Verallgemeinerungen des Brunn-Minkowski-Lusternikschen Satzes in einem vorläufigen Manuskript aufnehmen und Mitte 1955 an Herrn SÜSS schicken. Die weitere Bearbeitung der dort enthaltenen Ansätze überzeugten mich, daß diese Klasse durch eine bei weitem umfassendere ersetzt werden kann. Das ist auch der Grund, warum ich mich entschloß, vorliegende Arbeit trotz des Erscheinens der Arbeit von HADWIGER und OHMAN zu veröffentlichen.

[3]) Man vgl. z. B. SAKS, S.: Theory of the Integral (Warsaw, 1937, 2. Aufl.) S. 129.

Die Punktmengen B sollen außer der Bedingung $L_*(B)>0$ (und der Beschränktheit) keiner weiteren Bedingung unterworfen werden.

Das Hauptergebnis der Arbeit lautet nun:

Innerhalb der Klasse $\mathfrak{E}$ kann das Gleichheitszeichen in (1.11) *dann und nur dann eintreten, wenn $\bar{A}$ und $\bar{B}$ homothetische konvexe Körper sind, aus denen man höchstens eine Nullmenge entfernt hat.*

Schon das Fehlen jeglicher weiteren Bedingung für B außer der Bedingung $L_*(B)>0$ zeigt, daß $\mathfrak{E}$ bei weitem umfangreicher als die von HADWIGER und OHMAN betrachtete Klasse abgeschlossener Punktmengen ist. Letztere Klasse wird nämlich dadurch charakterisiert, daß sowohl A als auch B die Eigenschaft haben, daß die Größen $\sigma_\varepsilon(P|A)$ $(P\in A)$ bzw. $\sigma_\varepsilon(Q|B)$ $(Q\in B)$ für jedes $\varepsilon>0$ positiv ausfallen. Da man durch Weglassung von 2. keine eindeutig bestimmten Punktmengen erhält, so scheint in dieser Richtung das hier gewonnene Resultat in einer Hinsicht abschließend zu sein.

Die Methode, mit deren Hilfe ich den Beweis dieses Einzigkeitssatzes erbringe, verwendet einen ähnlichen Kunstgriff wie den, mit dessen Hilfe ERHARD SCHMIDT und ich in der vorhin zitierten Arbeit die Minimaleigenschaft der Kugel bewiesen haben[4]). Dabei verwende ich noch einige wichtige Resultate von HENSTOCK und MACBEATH über die Eigenschaften des Dichtekerns M_* von M.

3. Allgemeine Eigenschaften der Extremalpunktmengen. Sind A, B $(A, B\in\mathfrak{E})$ Extremalpunktmengen von (1.11), so gilt zunächst der Satz:

Hilfssatz 1. *Sind A, B Extremalpunktmengen, so trifft dies auch für λA, μB mit $\lambda, \mu>0$ zu.*

Beweis. Ersetzt man in (1.12) A, B durch σA, σB $(\sigma>0)$, so folgt daraus, indem man σh durch λ ersetzt und die allgemeine Gleichung $L_*(\sigma M)=\sigma^n L_*(M)$ berücksichtigt,

$$M(\sigma A|B)=\sigma^{n-1}M(A|B).$$

Andererseits ist

$$M(A|\varrho B)=\varrho M(A|B)\qquad(\varrho>0),$$

also

$$M(\lambda A|\mu B)=\lambda^{n-1}\mu M(A|B)=\lambda^{n-1}\mu L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Daraus folgt

$$M(\lambda A|\mu B)=L_*(\lambda A)^{1-\frac{1}{n}}L_*(\mu B)^{\frac{1}{n}}.$$

Nachfolgende Hilfssätze sind allgemeiner Natur und werden hier ohne Beweis angeführt:

Hilfssatz 2 (HENSTOCK und MACBEATH). *Ist M eine beliebige, beschränkte Punktmenge von E^n, so ist M_* meßbar und es gilt*

$$L(M_*)=L_*(M). \tag{3.1}$$

[4]) Das dortige Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeit auf konvexe Punktmengen B übertragen. Man vgl. z.B. Fußnote 13 der in der Fußnote 1 zitierten Arbeit 1.

Hilfssatz 3 (HENSTOCK und MACBEATH). *Es gilt für nichtleere,* A_*, $B_* \subseteq E^n$

$$(A+B)_* \supseteq A_* + \overline{B}. \tag{3.2}$$

Für die Beweise dieser beiden Hilfssätze sei auf die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH[5]) verwiesen.

Durch Heranziehung dieser Hilfssätze von HENSTOCK und MACBEATH können wesentliche Aussagen über die Extremalmengen gemacht werden. Zunächst folgt leicht aus (3.2) für $h>0$

$$(A+hB)_* \supseteq (A_* + h\overline{B})_* \supseteq \overline{(A_*)} + h\overline{B}_*, \tag{3.3}$$

und durch Vertauschung von A und B und der Rolle von h

$$(A+hB)_* \supseteq (\overline{A} + hB_*)_* \supseteq \overline{A}_* + h\overline{(B_*)}. \tag{3.4}$$

Da nun allgemein

$$L(\overline{A}) \geq L(\overline{(A_*)}) \geq L(A_*) = L_*(A)$$

und

$$L(\overline{B}) \geq L(\overline{(B_*)}) \geq L(B_*) = L_*(B)$$

ist, so gilt zunächst für jedes Extremalpaar (A, B)

$$M(A\,|\,B) = M(A_*\,|\,\overline{B}) = M(\overline{(A_*)}\,|\,\overline{B}_*),$$

und

$$M(A\,|\,B) = M(\overline{A}\,|\,B_*) = M(\overline{A}_*\,|\,\overline{(B_*)}).$$

Der gemeinsame Wert dieser Ausdrücke ist gleich $L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}\, L_*(B)^{\frac{1}{n}}$. Nun ist offenbar noch

$$M(A\,|\,B) = M(A\,|\,B_*) = M(A_*\,|\,B) = L_*(A)^{1-\frac{1}{n}}\, L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Verbindet man jetzt die Aussagen dieser drei Gleichungen, so hat man:

1. Ist (A, B) ein Extremalpaar von (1.11), so sind die Punktmengenpaare $(A_*, \overline{B})$, $(\overline{(A_*)}, \overline{B}_*)$, $(\overline{A}, B_*)$ $(\overline{A}_*, \overline{(B_*)})$, (A, B_*) und (A_*, B) ebenfalls Extremalpaare.

2. Ist (A, B) ein Extremalpaar von (1.11), so gilt

$$L_*(A) = L(\overline{A}) = L(\overline{A}_*) = L(\overline{(A_*)}), \tag{3.5}$$

und

$$L_*(B) = L(\overline{B}) = L(\overline{B}_*) = L(\overline{(B_*)}). \tag{3.6}$$

Dieses Ergebnis gestattet, die Einzigkeitsfrage des Problems der Relativoberfläche dadurch zu vereinfachen, daß man dort jedes Extremalpaar (A, B) zunächst durch das Paar der Mengen $\overline{(A_*)}$ und $\overline{B}_*$ ersetzt. Um nicht

[5]) loc. cit. Fußnote 1, S. 185f. Daß $M - M_*$ das Maß Null hat, ist bekannt gewesen und bildet den Inhalt eines berühmten Satzes von LEBESGUE und SAKS (SAKS, loc. cit. S. 129f.) Wie HENSTOCK und MACBEATH gezeigt haben, gilt Hilfssatz 3 (wie auch 4) unter bestimmten Voraussetzungen, auch in topologischen Gruppen. Wie noch dort gezeigt wird, ist M_* eine $F_{\sigma\delta}$-Menge.

dabei die Schreibweise wesentlich zu erschweren, soll im folgenden von vornherein $A=\overline{(A_*)}$ und $B=\overline{B}_*$ angenommen werden. Sind einmal die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Extremalpaar $(\overline{(A_*)}, \overline{B}_*)$ gefunden, so bietet der Übergang zu dem ursprünglichen Paar (A, B) keine Schwierigkeit, sofern es sich dabei um Punktmengen der Klasse $\mathfrak{E}$ handelt.

Man betrachte jetzt eine beliebige F_σ-Menge A mit $L_*(A)>0$ und bilde das Intervall $J_{A_*}=(\alpha_{A_*}, \beta_{A_*})$ durch die Vorschrift

$$\alpha_{A_*}=\inf\{x_n \mid P\in A_*\}, \quad \beta_{A_*}=\sup\{x_n \mid P\in A_*\},$$

wobei $P=P(x_1, \ldots, x_n)$ einen Punkt von E^n bedeuten soll. Ferner bilde man die Schnitte $A^x=A\cap E_x^{n-1}$ und bezeichne mit $L_{n-1}(A^x)$ das $(n-1)$-dimensionale Lebesguesche Maß in bezug auf die Hyperebene E_x^{n-1} $(x_n=x)$[6]. Dann gilt der

Hilfssatz 4. *Es sei (A, B) ein Extremalpaar von (1.11) mit $L_*(A)>0$, $L_*(B)>0$. Man schreibe der Kürze wegen wieder A, B für das Extremalpaar $\overline{(A_*)}\,\overline{B}_*$ und bilde das Intervall J_{A_*}. Dann ist für jedes $x\in J_{A_*}$, $L_{n-1}(A^x)>0$.*

Beweis. Es sei zunächst $n>1$. Mit Rücksicht auf den Hilfssatz 1 kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $L(A)\neq L(B)$ voraussetzen. Es bezeichne S eine offene Kugel von E^n, die $2B$ enthält. Da es auf eine Parallelverschiebung von B nicht ankommt, so kann noch angenommen werden, daß der Mittelpunkt von S in 0 liegt. Es sei $h>0$ und $x\in J_{A_*}$. Man bezeichne durch A_1 bzw. A_2 die Teilmengen von A mit $x_n\leq x$ bzw. $x_n\geq x$. Dann gilt

$$L(A)=L(A_1\cup A_2)=L(A_1)+L(A_2), \tag{3.7}$$

und

$$\begin{cases} L(A+hB)=L(A_1+hB\cup A_2+hB) \\ \qquad\quad =L(A_1+hB)+L(A_2+hB)-L(A_1+hB\cap A_2+hB). \end{cases} \tag{3.8}$$

Es bezeichne jetzt G eine offene Punktmenge auf E_x^{n-1} (z.B. die Vereinigung von endlich vielen offenen Kugeln), die $A_1\cap A_2=A^x$ überdeckt. Dann gibt es ein $h_0>0$ derart, daß für $0<h<h_0$

$$A_1+hB\cap A_2+hB\subseteqq G+hS \tag{3.9}$$

gilt. Man betrachte in der Tat eine monoton gegen Null abnehmende Folge (h_k) $(k=1, 2, \ldots)$ von h-Werten und nehme an, es gäbe zu jedem k einen Punkt P_k, $P_k\in A_1+h_kB$ und $P_k\in A_2+h_kB$, welcher der Punktmenge $G+h_kS$ nicht angehört. Da A_1, A_2 nicht leer und abgeschlossen sind, so enthält (P_k) eine konvergente Teilfolge, deren Punkte gegen einen Punkt P_0 von $A_1\cap A_2$ konvergieren müssen. Nun kann nach Voraussetzung P_0 nur in der zu G komplementären Menge G' (in bezug auf E_x^{n-1}) liegen, was offenbar falsch ist, da ja jeder Punkt von $A_1\cap A_2$ in G liegen muß.

[6]) Allgemein soll L_k das Lebesguesche Maß in bezug auf den linearen Unterraum $E^k_{x_{k+1}, \ldots, x_n}$ (kurz E^k) bedeuten, dessen Punkte $P(v_1, \ldots, v_k)$ vorgegebene Koordinaten $v_{k+1}=x_{k+1}, \ldots, v_k=x_n$ haben. Für $k=0$ soll allgemein L_0 die charakteristische Funktion der betreffenden (linearen) Menge darstellen.

Nun gilt zunächst

$$L(G + h\,S) \leq 2L_{n-1}(G^{hr})\,hr, \tag{3.10}$$

wobei r der Radius von S ist, und G^{hr} die Außenmenge von G (auf E_x^{n-1}) in der Entfernung hr bedeutet.

Setzt man diese Abschätzung in (3.8) ein und läßt $h \to 0$ konvergieren, so erhält man dann leicht

$$M(A\,|\,B) \geq M(A_1|\,B) + M(A_2|\,B) - \frac{2}{n} L_{n-1}(G)\,r, \tag{3.11}$$

also schließlich

$$M(A\,|\,B) \geq M(A_1|\,B) + M(A_2|\,B) - \frac{2}{n} L_{n-1}(A^x)\,r.$$

Ist nun

$$M(A\,|\,B) = L(A)^{1-\frac{1}{n}}\,L(B)^{\frac{1}{n}} \quad \big(L(B) > 0\big),$$

so würde daraus die Ungleichung

$$\big(L(A_1) + L(A_2)\big)^{1-\frac{1}{n}} \geq L(A_1)^{1-\frac{1}{n}} + L(A_2)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{2r}{n}\,\frac{L_{n-1}(A^x)}{L(B)}$$

folgen, die, sobald $L_{n-1}(A^x) = 0$ ist, falsch ist.

Es sei jetzt $n = 1$ und (A, B) ein Extremalpaar von (1.11) auf E^1. Dann ist zunächst $(\bar{A}, B_*)$ ebenfalls ein Extremalpaar. Ist dann $[\bar{A}] \cap \overline{(A')}$ nicht leer[7]), so gilt für kleine h

$$L_*(\bar{A} + h\,B_*) \geq L(\bar{A}) + 2h\,L_*(B), \tag{3.12}$$

und somit wegen $L(B) > 0$

$$M(\bar{A}\,|\,B_*) \geq 2L_*(B) > L_*(B). \tag{3.13}$$

Daraus folgt zunächst, daß $\bar{A}$ eine Strecke sein muß und somit A_* ein offenes Intervall. Nun ist mit (A, B) auch $(A_*, \bar{B})$ ein Extremalpaar. Enthält jetzt $[\bar{B}] \cap \overline{(B')}$ ein offenes Intervall J, so gilt für kleine h

$$L(A_* + h\bar{B}) \geq h\,|J| + L_*(A) + h\,L(\bar{B}). \tag{3.14}$$

Soll nun $M(A_*|\,\bar{B}) = L(\bar{B})$ gelten, so muß J leer und $\bar{B}$ eine Strecke sein. Das beweist nicht nur den Hilfssatz 4[8]) für $n = 1$, sondern liefert zugleich die Extremalbedingungen von (1.11) für den linearen Fall. Danach kann

[7]) Mit $[M]$ wird allgemein die konvexe Hülle von M bezeichnet werden. M' bedeutet wie üblich die zu M komplementäre Menge.

[8]) Für den einfachen Fall A kompakt, B = Kugel, vgl. man DINGHAS und ERHARD SCHMIDT, loc. cit. Fußnote 1, S. 11. Bei dieser Gelegenheit soll noch hier bemerkt werden, daß ich die Frage A kompakt und B konvex durch die Fußnote 13 meiner in der Fußnote 1 unter 1. zitierte Arbeit als miterledigt betrachtete.

dort (für $n=1$) das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintreten, wenn $\overline{A}, \overline{B}$ zwei Strecken von E^1 sind.

4. Einfacher Beweis der Superadditivität von $L_*(M)^{1/n}$. Verzichtet man auf eine Umgestaltung der Brunn-Minkowskischen Methode, die (wie es HENSTOCK und MACBEATH getan haben) zugleich die Einzigkeitsfrage der Brunn-Minkowskischen Ungleichung zu behandeln gestattet, so scheint nachfolgendes Verfahren, soweit es sich um den bloßen Nachweis der Superadditivität des Mengenfunktionals $L_*(M)^{1/n}$ handelt, das einfachste zu sein.

Es sei N ein achsenparalleles Netz von E^n und M eine Würfelmenge, d.h. eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln von N. Ferner sei bei einem gegebenen Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ von M, E_P^{n-k} $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ die lineare Mannigfaltigkeit $v_1=x_1, \ldots, v_k=x_k$. Man definiere g_k^M für $k=0, 1, \ldots, n-1$ als den $(n-k)$-dimensionalen Inhalt von $M \cap E_P^{n-k}$ und setze $g_n^M=1$. Außerhalb M setze man $g_k^M=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Nun ordne man jedem Punkt $P(x_1, \ldots, x_n) \in M_* = \mathrm{int}(M)$ den Punkt $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ des Würfels

$$W_0: \quad 0<\tau_k<1 \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

vermöge der Gleichungen

$$g_{k-1}^M(x_1, \ldots, x_{k-1})\,\tau_k = \int_{-\infty}^{x_k} g_k^M(x_1, \ldots, x_{k-1}, x)\,dx. \tag{4.2}$$

zu.

Man sieht ohne weiteres ein, daß die Bildmenge $T(M)$ den Würfel W_0 bis auf eine Teilmenge T', die auf höchstens endlich vielen achsenparallelen Mannigfaltigkeiten (bis zur Dimension $n-1$) liegt, ausfüllt. Ebenfalls sieht man mit Hilfe der Monotonie der Abbildungsfunktionen (in bezug auf die jeweils letzte Veränderliche), daß die Abbildung $M_* \to T(M)$ eineindeutig ist.

Es seien jetzt A, B zwei kompakte Punktmengen von E^n, und es seien N^A, N^B die kleinsten Würfelmengen von N, die A, B überdecken. Bildet man dann N^A+N^B $(h>0)$[9]), und beachtet man, daß diese Menge die Punktmenge, deren Punkte die Koordinaten

$$v_{k-1}^{N^A}(\tau_1, \ldots, \tau_k) + v_k^{N^B}(\tau_1, \ldots, \tau_k) \qquad (T \in T_0 = T(A) \cap T(B))$$

haben, enthält, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß die Jacobische Determinante $D(x|\tau)$ der Transformation $M \to T(M)$ durch die Gleichung

$$D(x|\tau) = \prod_1^{n-1} \left\{ \frac{g_{k-1}^{N^A}}{g_k^{N^A}} + \frac{g_{k-1}^{N^B}}{g_k^{N^B}} \right\} \tag{4.3}$$

gegeben wird, die Abschätzung

$$|N^A+N^B| \geq \int_{T_0} D(x|\tau)\,d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{4.4}$$

[9]) In ihrer einfacheren Form B-konvex geht diese Transformation auf eine mündliche Mitteilung von ERHARD SCHMIDT aus dem Jahre 1942 zurück. [Man vgl. auch meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von WULFF für die Gleichgewichtsformen von Kristallen. Z. Kristallogr. A **105**, 304—314 (1943).

Nun gilt nach einer klassischen Ungleichung[10]) wegen $g_0^A = |N^A|$, $g_0^B = |N^B|$

$$D(x|\tau) \geq (|N^A|^{1/n} + |N^B|^{1/n})^n, \tag{4.5}$$

und somit wird

$$|N^A + N^B|^{1/n} \geq |N^A|^{1/n} + |N^B|^{1/n}. \tag{4.6}$$

Läßt man jetzt den Durchmesser der Würfel von N gegen Null konvergieren, und bezeichnet allgemein den Äußeren (Jordanschen) Inhalt von M durch $J^*(M)$, so erhält man

$$J^*(A+B)^{1/n} \geq J^*(A)^{1/n} + J^*(B)^{1/n}. \tag{4.7}$$

Liegen nun zwei beliebige Punktmengen A, B von E^n vor, so erhält man daraus durch Ausschöpfung mittels ansteigender Folgen kompakter Punktmengen, die gegen A, bzw. gegen B konvergieren,

$$L_*(A+B)^{1/n} \geq L_*(A)^{1/n} + L_*(B)^{1/n}. \tag{4.8}$$

Diese Ungleichung liefert durch Grenzübergang $h \to 0$ nach vorheriger Substitution $B \to hB$, die Lusternikschе isoperimetrische Ungleichung (1.11). Jedoch erfordert die Einzigkeitsfrage stärkere analytische Hilfsmittel, die wir gleich entwickeln werden.

5. Die Einzigkeitsfrage von (1.11). Anfang. Der Beweis von (4.8) kann leicht mit Hilfe eines Induktionsverfahrens erbracht werden. Das soll hier unter der Voraussetzung, daß A, B ein Extremalpaar von (1.11) ist, getan werden. Da der Fall $n=1$ durch die Schlußausführungen von 3. als abgeschlossen angesehen werden kann, so soll im folgenden $n>1$ angenommen werden.

Wir formen die erste der Gln. (4.2) um und definieren mit HENSTOCK und MACBEATH zunächst für eine beliebige F_σ-Menge M von E^n die Funktion $x_M(\tau)$ durch die Gleichung

$$x_M(\tau) = \inf\{x | \int_{-\infty}^{x} L_{n-1}(M^v)\, dv \geq \tau L(M)\}. \tag{5.1}$$

Hier interessiert uns lediglich der Fall $L(M)>0$.

Die Funktion $x(\tau)$ ist im Intervall T: $0<\tau<1$ eigentlich monoton. Ist $X_M = x_M(T)$ und $x_0 \in X_M$, so gibt es einen einzigen Punkt $\tau_0 \in T$ mit

[10]) Allgemein gilt für $x_k, y_k \geq 0$ $(k=1,\ldots,l)$ und $r_k>0$, $r_1+\cdots+r_l=1$,

$$\prod_1^l (x_k+y_k)^{r_k} \geq \prod_1^l x_k^{r_k} + \prod_1^l y_k^{r_k},$$

sobald nicht alle y_k/x_k gleich einer festen Konstanten sind. Man vgl. z.B.: HARDY-LITTLEWOOD, POLYA, Inequalities, Cambridge, 1952, 2. Aufl. S. 39.

$x_M(\tau_0)=x_0$. Die Umkehrung $\tau=\tau(x)$ von (5.1) ist in $[X_M]$ totalstetig und kann direkt durch die Gleichung

$$\tau=\tau_M(x)=\int_{-\infty}^{x} L_{n-1}(M^v)\,dv/L(M) \tag{5.2}$$

definiert werden. Ihre Ableitung $\frac{d\tau_M}{dx}$ ist fast überall gleich $L_{n-1}(M^x)/L(M)$.

Es sei jetzt (A, B) ein Extremalpaar von (1.11). Dann ist $(\overline{A_*}), \overline{B}_*$ ebenalls ein Extremalpaar. Im folgenden soll also zunächst angenommen werden, daß $A=\overline{(A_*)}$ und $B=\overline{B}_*$ gilt, und daß beide Punktmengen nicht leer sind.

Wir bilden jetzt für die beiden Mengen A, B die Funktionen $x_A(\tau)$ bzw. $x_B(\tau)$ und definieren diese für $\tau=0$ bzw. $\tau=1$ durch Stetigkeit. Es bedeute $E_x^r(r>0)$ die Punktmenge $\{x\,|\,L_{n-1}(A^x)<r\}$ und $\varphi_r(x)$ die charakteristische Funktion von E_x^r. Dann ist E_x^r mit Rücksicht auf den klassischen Fubinischen Satz meßbar, und es gilt

$$L_1(E_x^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_r(x)\,dx.$$

Man betrachte jetzt die Punktmenge

$$E_\tau^r=\{\tau\,|\,L_{n-1}(A^{x(\tau)})<r\},$$

wobei $x(\tau)$ die (stetige, monotone) Funktion $x_A(\tau)$ bedeutet. Es sei $\varphi_r^*(\tau)$ die charakteristische Funktion von E_τ^r. Beachtet man, daß $\varphi_r^*(\tau(x))=\varphi_r(x)$ gilt, so folgt daraus, daß $\varphi_r^*(\tau(x))$ meßbar ist und mithin [wegen der Meßbarkeit von $L_{n-1}(A^x)$], auch $\varphi_r(x)L_{n-1}(A^x)$ meßbar. Da nun nach klassischen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie[11])

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_r^*(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_r(x)\,\frac{d\tau}{dx}\,dx$$

ist, sobald eines der beiden Integrale existiert, so existiert das Integral links und somit muß E_τ^r meßbar sein. Ist dies nun der Fall, so existiert

$$I(\tau)=\int_0^\tau \frac{d\tau}{L_{n-1}(A^{x(\tau)})}$$

für jedes τ, $0<\tau<1$. Transformiert man jetzt dieses Integral mit Hilfe der (totalstetigen) Funktion $\tau=\tau(x)$, so erhält man leicht, indem man die Gleichung $\frac{d\tau}{dx}=L_{n-1}(A^x)/L(A)$ fast überall auf der x-Achse berücksichtigt

[11]) Man vgl. z.B. RADO, T., u. P. V. REICHELDERFER: Continuous Transformations in Analysis, S. 318. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

bei geeigneten Translation von A

$$x_A(\tau) = L(A) \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{L_{n-1}(A^{x(\tau)})},$$

und infolgedessen muß $x_A(\tau)$ totalstetig sein. Beachtet man noch, daß $\tau = \tau(x_B)$ totalstetig ist, so ist $x_A(\tau(x_B))$, also x_A als Funktion von x_B in $x_B \in [X_B]$ totalstetig.

Schreibt man für diese Funktion kurz $\xi = \xi(x)$, so gilt fast überall dort

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{L(A)}{L(B)} \frac{L_{n-1}(B^x)}{L_{n-1}(A^\xi)} \tag{5.3}$$

Die Ableitung ist in jedem inneren Punkt von $[X_B]$ endlich.

Es bezeichne jetzt X_1 die Teilmenge von $[X_B]$ auf der $L_{n-1}(B^x) > 0$ gilt. Diese Menge ist meßbar. Bildet man also die Menge

$$X_0 = \{\eta | \eta = x + \xi(x),\ x \in X_1\},$$

so ist diese ebenfalls meßbar und die Zuordnung der Punkte von X_0 und X_1 durch die Funktion $\eta = \eta(x)$ eineindeutig. Man schreibe nun C für $A + B$ und definiere die Intervalle $J_{B_\bullet} = (\alpha_{B_\bullet}, \beta_{B_\bullet})$ und $J_{C_\bullet} = (\alpha_{C_\bullet}, \beta_{C_\bullet})$, ähnlich wie $J_{A_\bullet}$. Dann bildet $\eta(x)$ das Intervall $[X_B]$ (infolge der eigentlichen Monotonie von x) eineindeutig auf das Intervall $[\alpha_{A_\bullet} + \alpha_{B_\bullet},\ \beta_{A_\bullet} + \beta_{B_\bullet}] = [\alpha_{C_\bullet}, \beta_{C_\bullet}]$ ab. Nun ist X_0 die Abbildungsmenge der meßbaren Punktmenge X_1 durch die totalstetige Funktion $\eta(x)$ und somit eine meßbare Punktmenge. Es gilt also

$$L(C) \geq \int_{X_0} L_{n-1}(C^\eta)\, d\eta. \tag{5.4}$$

Es bezeichne nun $\varphi_0(\eta)$ die charakteristische Funktion von X_0 und $\varphi_1(x)$ diejenige von X_1. Da $\xi(x)$ totalstetig in bezug auf x ist, so gilt nach dem Transformationssatz der Lebesgueschen Integraltheorie[12])

$$\int_{[X_0]} \varphi_0(\eta)\, L_{n-1}(C^\eta)\, d\eta = \int_{[X_1]} \varphi_1(x)\, L_{n-1}(C^\eta) \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) dx.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf die Bildung $A + hB$ $(h > 0)$ an, so erhält man die Ungleichung

$$L(A + hB) \geq \int_{X_1} L_{n-1}(C^{\eta_h}) \left(h + \frac{d\xi}{dx}\right) dx, \tag{5.5}$$

mit $\eta_h = hx + \xi(x)$, $(x = x_B)$.

[12]) loc. cit. Fußnote 11.

Nun verwende man die Identität

$$L(A) = \int_{X_1} L_{n-1}(A^\xi) \frac{d\xi}{dx}\, dx, \tag{5.6}$$

und bilde die Differenz mit (5.5). Dann wird, wenn man zunächst

$$M^h(A \mid B) = \frac{1}{n} \frac{L(A + hB) - L(A)}{h} \tag{5.7}$$

und (für $n > 1$)

$$\overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x) = \frac{1}{n-1} \frac{L_{n-1}(C^{\eta h}(x)) - L_{n-1}(A^\xi)}{h} \tag{5.8}$$

setzt und die Ungleichung $L_{n-1}(C^{\eta h}) \geq L_{n-1}(A^\xi)$ berücksichtigt,

$$M^h(A \mid B) \geq \int_{X_1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x) \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{n} L_{n-1}(A^\xi) \right\} dx. \tag{5.9}$$

Jetzt formen wir den Integranden rechts um, indem wir den Zwischenausdruck

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}} \frac{d\xi}{dx}$$

verwenden. Man setze

$$D^h(A \mid B) = M^h(A \mid B) - L(A)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}},$$

und

$$\overline{D}^h_{n-1}(x) = \overline{M}^h_{n-1}(x) - L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}},$$

mit $\overline{M}^h_{n-1}(x) = \overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x)$. Die Funktion

$$J(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{L(A)}{L(B)} L_{n-1}(A^\xi)^{-\frac{1}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n} L_{n-1}(A^\xi),$$

ist nun in jedem offenen Intervall, das ganz in $[X_1]$ liegt, endlich und meßbar und genügt der Ungleichung[13])

$$J(x) \geq \left\{ \frac{L(A)}{L(B)} \right\}^{\frac{n-1}{n}} L_{n-1}(B^x). \tag{5.10}$$

Somit wird zunächst mit Hilfe von (5.9)

$$D^h(A \mid B) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{X_1} \overline{D}^h_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx}\, dx. \tag{5.11}$$

---

[13]) Nimmt man in Fußnote 10 $l = 2$, so gilt $r_1 x_1 + r_2 x_2 - (r_1 \sqrt{x_1} + r_2 \sqrt{x_2})^2 = r_1 r_2 (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$ und somit wegen $(r_1 \sqrt{x_1} + r_2 \sqrt{x_2})^2 \geq x_1^{r_1} x_2^{r_2}$ die Ungleichung $r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_1^{r_1} x_2^{r_2} \geq r_1 r_2 (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$.

Der Integrand $\overline{D}^h_{n-1}(x)$ ist mit Rücksicht auf die Ungleichung

$$\overline{D}^h_{n-1}(x) \geq \frac{1}{n-1} \frac{L_{n-1}(A^{\xi+hx}) - L_{n-1}(A^{\xi})}{h}$$

nicht negativ. Man wähle eine monoton gegen Null konvergierende Folge (h_k) $(k=1, 2, \ldots)$, für die $\lim_{k\to\infty} M^{h_k}(A \mid B) = M(A \mid B)$ ist. Dann folgt aus (5.11)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X_1} \overline{D}^{h_k}_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx}\, dx = 0. \tag{5.12}$$

Wendet man hier das klassische Fatousche Lemma[14]) an, so erhält man daraus die Bedingungen

1. Die Funktion $\overline{D}_{n-1}(x) = \lim_{k\to\infty} \overline{D}^{h_k}_{n-1}(x)$ ist in X_1 meßbar.

2. Es gilt

$$\int_{X_1} \overline{D}_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx}\, dx = 0. \tag{5.13}$$

Man setze jetzt

$$M_{n-1}(A^{\xi} \mid B^{x}) = \frac{1}{n-1} \lim_{h\to 0} \frac{L_{n-1}(A^{\xi+hx}) - L_{n-1}(A^{\xi})}{h},$$

und

$$D_{n-1}(x) = M_{n-1}(A^{\xi} \mid B^{x}) - L_{n-1}(A^{\xi})^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^{x})^{\frac{1}{n-1}}. \tag{5.14}$$

Dann folgt aus (5.14) wegen $\overline{D}_{n-1}(x) \geq D_{n-1}(x) \geq 0$, die Bedingung:

Eine notwendige Bedingung dafür, daß in (1.11) *das Gleichheitszeichen eintritt, ist die, daß das* $(n-1)$*-dimensionale Defizit* $D_{n-1}(x)$ *fast überall in* X_1 *verschwindet.*

Somit ist die Brücke für die Anwendung eines Induktionsverfahrens geschlagen. Betrachtet man die Umkehrung von $\xi(x)$ und definiert man diese durch die Gleichung

$$x(\xi) = \inf\{t \mid \xi(t) \geq \xi\}, \tag{5.15}$$

so kann man die Bedingung (5.13) auch in der Form

$$\int_{J_{A_*}} D_{n-1}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{5.16}$$

schreiben. Hierbei bedeutet $D_{n-1}(\xi)$ wieder die Größe (5.14) mit $x = x(\xi)$.

6. Durchführung des Induktionsverfahrens. Ende des Beweises. Ist $n=1$ und sind A, B beliebige kompakte Mengen von E^1, so gilt, wie schon erwähnt, $D_1 = M(A \mid B) - L(B) = 0$ dann und nur dann, wenn A, B zwei Strecken sind. Wir zeigen jetzt: Bilden A, B $(A = \overline{(A_*)}, B = \overline{B}_*)$ ein Extremalpaar von (1.11), so müssen $A, \overline{B}$ konvex und homothetisch sein. Diese Behauptung ist für $n=1$ richtig. Man nehme für die Dimension $n-1$ $(n \geq 2)$ folgende Aussage als richtig an:

[14]) Man vgl. z. B. Saks: loc. cit. Fußnote 3, S. 29.

Ist $x\,(x \in X_1)$ ein Punkt, für den $D_{n-1}(x) = 0$ gilt, so sind $\overline{(A^x)}_*$ und $\overline{(B^x)}_*$ zwei kompakte (homothetische), konvexe Punktmengen. Dabei soll allgemein $(M^x)_*$ den inneren Dichtekern von M^x in bezug auf die Hyperebene E_x^{n-1} bedeuten.

Die aufgestellte Behauptung ist offenbar für $n = 2$ richtig. Man nehme jetzt an, die Punktmenge A $\left(A = \overline{(A_*)}!\right)$ sei nicht konvex. Ist dies der Fall, so gibt es zwei Punkte Q_1, Q_2 von A derart, daß ein Punkt $Q\,(Q \neq Q_1,\ Q \neq Q_2)$ der Strecke $\overline{Q_1 Q_2}$ der Menge A nicht angehört. Wegen der Abgeschlossenheit von A können nun in der Nähe von Q_1 bzw. Q_2 zwei Punkte P_1 bzw. P_2 von A_* so gefunden werden, daß die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ einen Punkt P enthält, derart, daß eine (offene) Kugel S_P^δ vom Radius $\delta > 0$ um P keinen Punkt von A enthält. Man kann im folgenden ohne weiteres annehmen, daß P_1, P_2 auf der x_1-Achse liegen. Jetzt wähle man $0 < r < \delta$ und so, daß

$$L(A \cap S_{P_1}^r) \geq (1-\varepsilon)\,|S_{P_1}^r|, \qquad L(A \cap S_{P_2}^r) \geq (1-\varepsilon)\,|S_{P_2}^r|$$

mit einem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ wird. Wir behaupten: Die Gesamtheit aller $x\,(-r < x < r)$ für die $\overline{(A^x)}_*$ nicht konvex ist, hat ein inneres (lineares Lebesguesches) Maß $m > 0$. In der Tat wird wegen

$$L_{n-1}\left(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\right) = L_{n-1}(A^x \cap S_{P_k}^r) \qquad (k = 1, 2)$$

unter Heranziehung des klassischen Fubinischen Satzes

$$\int_{-r}^{r} L_{n-1}\left(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\right) dx \geq (1-\varepsilon)\,|S_{P_k}^r|. \tag{6.1}$$

Hätte nun die Teilmenge E_r von $-r < x < r$, auf der *beide* Größen $L_{n-1}\left(\overline{(A^x)}_* \cap S_{P_k}^r\right)$ positiv sind, das Maß $m = 0$, so würde daraus durch Addition der beiden Ungleichungen die Ungleichung

$$|S_P^r| \geq 2(1-\varepsilon)\,|S_P^r| \tag{6.2}$$

folgen, die offenbar falsch ist. E_r hat also ein positives Maß und zugleich die Eigenschaft, daß $\overline{(A^x)}_*\,(x \in E_r)$ nicht konvex ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß fast überall in $(\alpha_{A_*}, \beta_{A_*})$ die Größe $D_{n-1}(x)$ verschwindet und somit dort $\overline{(A^x)}_*$ konvex ausfällt. Die Menge $\overline{(A_*)}$ ist also konvex.

Man setze jetzt voraus, A erfüllt die Bedingung, daß $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ entweder leer ist, oder die in der Bedingung 2. von 2. festgelegte Eigenschaft hat, daß ihre Projektion auf eine gewisse Ebene H_{n-1} [die man außerhalb $\overline{(A_*)}$ annehmen kann] mindestens einen inneren Dichtepunkt hat. Man verschiebe die Punktmenge B so, daß die Gerade α durch den Nullpunkt O des Koordinatensystems, die senkrecht auf H_{n-1} steht, einen Durchschnitt $\mathfrak{D}$ mit $\bar{B}_*$ von positivem linearem Maß $L_1(\mathfrak{D})$ aufweist. Das ist stets möglich, da $L(\bar{B}_*) > 0$ gilt. Nun beachte man, daß bei genügend kleinem $\varepsilon_0 > 0$ die Projektion der Menge $\bar{A} - \overline{(A_*)}^{\varepsilon_0}$ auf H_{n-1} ebenfalls mindestens einen inneren Dichtepunkt (in bezug auf H_{n-1}) aufweist und insofern hat diese für $h < \varepsilon_0/2$ ein positives $(n-1)$-dimensionales Maß K. Bildet man also $\bar{A} + h\,\bar{B}_*$, so hat diese Punkt-

menge ein (inneres) Lebesguesches Maß $L_*(\bar{A}+hB_*)$, das gewiß nicht kleiner als $KL_1(\mathfrak{T})+L_*(\overline{(A_*)}+hB_*)$ sein kann. Daraus ergibt sich aber

$$M(\bar{A}\,|\,B_*)\geq M\left(\overline{(A_*)}\,|\,B_*\right)+KL_1(\mathfrak{T}),$$

also $M(\bar{A}\,|\,B_*)>M\left(\overline{(A_*)}\,|\,B_*\right)$ gegen die Voraussetzung.

Ist nun $A\in\mathfrak{E}$, so kann $\bar{A}-\overline{(A_*)}$ nur leer sein und somit muß [wegen $L(\bar{A})=L\overline{(A_*)}$] $\bar{A}$ konvex und $\bar{A}-A$ höchstens eine Nullmenge sein. Das beweist die Behauptung für A.

Somit ist gezeigt worden, daß A ein konvexer Körper sein muß, und folgendes Teilresultat wurde gewonnen:

Sind A, B zwei Extremalpunktmengen der Klasse $\mathfrak{E}$, so muß $\bar{A}$ ein konvexer Körper sein, aus dem man höchstens eine Nullmenge herausgenommen hat.

Nun ist, wie man leicht sieht, falls $\bar{A}$ konvex ist und $L(\bar{A})=L(A)$, mit (A, B) auch $\left(A_*, \overline{(B_*)}\right)$ ein Extremalpaar. Man schreibe also wieder B für $\overline{(B^*)}$, und nehme an, daß $\overline{(B^x)}_*$ fast überall auf der Punktmenge X_1 wo $L_{n-1}((B^x)_*)=L_{n-1}(\overline{(B^x)}_*)>0$ ist, konvex ist. Es wird behauptet: B ist konvex. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es zwei Punkte P_1, P_2 von B, auf die man die vorherigen für A durchgeführten Überlegungen anwendet. Man projiziere die Kugeln $S^r_{P_1}$ und $S^r_{P_2}$ auf die Ebene $x_1=0$ und bezeichne mit T_k $(k=1, 2)$ die Teilmengen des Intervalls $-r<x<r$, für die

$$L_{n-1}\left(\overline{(B^x)}_*\cap S^r_{P_k}\right)>0 \qquad (k=1, 2) \tag{6.3}$$

gilt. Hat nun der Durchschnitt $T=T_1\cap T_2$ das Maß $m=0$, so erhält man aus (6.1), geschrieben für die Menge $\overline{B}_*$, den aus (6.2) fließenden Widerspruch. Hieraus folgt leicht, mit Rücksicht darauf, daß die x-Richtung willkürlich ist, daß $(\overline{B^*})$ konvex ist.

Sind nun A und B konvexe Körper, so müssen sie auch homothetisch sein. Das folgt aus den klassischen Arbeiten von MINKOWSKI. Am einfachsten beweist man diese Behauptung indem man in der Überlegung von 4. B durch $hB\,(h>0)$ ersetzt. Ferner beachte man, daß dann $D(x\,|\,\tau)$ gleich

$$\prod_1^n\left\{\frac{g^A_{k-1}}{g^A_k}+h\,\frac{g^B_{k-1}}{g^B_k}\right\}\geq\left\{(g^A_0)^{1/n}+h\,(g^B_0)^{1/n}\right\}^n \tag{6.4}$$

wird.

Man setze jetzt hier $A_k=g^A_{k-1}/g^A_k$, $B_k=g^B_{k-1}/g^B_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ und bilde $M(A\,|\,B)$. Es wird nach leichten Rechnungen

$$M(A\,|\,B)\geq\int_{T_0}\left\{\sum_{(\nu_1\ldots\nu_n)}A_{\nu_1}B_{\nu_2}\ldots B_{\nu_n}\right\}d\tau_1\ldots d\tau_n,$$

sobald $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ eine zyklische Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ bedeutet. Wie man feststellt, gilt

$$\sum_{(\nu_1\ldots\nu_n)}A_{\nu_1}B_{\nu_2}\ldots B_{\nu_n}\geq(g^A_0)^{1-\frac{1}{n}}\,(g^B_0)^{\frac{1}{n}} \tag{6.5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $A_k = q B_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit einer von k unabhängigen Funktion $q = q(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Somit fallen (für konvexe A, B) die Extremalpunktmengen von (6.5) mit den Extremalpunktmengen der Brunn-Minkowskischen Ungleichung zusammen. Nun kann durch Multiplikation der Gleichungen $A_k = q B_k$ miteinander nachgewiesen werden, daß $q^n = |A| : |B|$, d.h. eine Konstante ist. Wählt man also von vornherein $|A| = |B|$, so artet die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung (sofern man noch den Schwerpunkt von A und B in den Nullpunkt legt) in die identische Abbildung aus.

Man nehme jetzt an $\overline{B} - \overline{(B_*)}$ ($\overline{(B_*)}$ konvex!) sei nicht leer und bezeichne mit P einen Punkt von $\overline{B} - \overline{(B_*)}$. Wir beziehen die beiden Punktmengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt G und konstruieren die größte Kugel S_G um G, die Platz in $\bar{A}$ findet. Man bilde jetzt $\bar{A} + h\bar{B}$ und beachte, daß diese Punktmenge die Menge $(\bar{A} + h\overline{B}_*) + hP$ enthält. Da $\bar{A}$, $\overline{(B_*)}$ konvexe, homothetische Punktmengen sind, so enthält letztere Punktmenge die Vereinigung von $(\bar{A} + h\overline{B}_*)$ und einer Punktmenge V_h, die man dadurch erhält, indem man die Vereinigung aller zur $h\,\overline{GP}$ äquipollenten Strecken $h\,\overline{G'P'}$ mit $G' \in \bar{A}$ bildet. Bezeichnet dann d den Radius von S_G, so gilt, wie man leicht sieht, die Abschätzung

$$L(A_* + h\bar{B}) \geq (|A|^{1/n} + h|\overline{(B_*)}|^{1/n})^n + K h d^{n-1},$$

mit einem positiven von h unabhängigen K. Diese Ungleichung zeigt aber, daß $\bar{B}$ keine Extremalpunktmenge sein kann. Diese Überlegung zeigt zugleich, daß man die Bedingungen für die Punktmengen B bei weitem schärfer fassen kann, als diejenigen für die Punktmengen A.

Will man das Erreichte zusammenfassen, so kann man das Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Man definiere innerhalb der Gesamtheit $\mathfrak{E}^*$ aller nichtleeren beschränkten Teilmengen von E^n zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $L_*(A) = V_{\mathfrak{A}} > 0$ $(A \in \mathfrak{A})$ und $L_*(B) = V_{\mathfrak{B}} > 0$ $(B \in \mathfrak{B})$ mit vorgegebenen $V_{\mathfrak{A}}$, $V_{\mathfrak{B}}$.

2. Ist $A \in \mathfrak{A}$, so gibt es eine Hyperebene H_{n-1} von E^n derart, daß die Projektion von $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ auf H_{n-1} ein positives $(n-1)$-dimensionales Maß hat, oder, was dasselbe ist, mindestens einen inneren Dichtepunkt aufweist.

Dann gilt folgendes:

1. *Die Größe*

$$J_0 = \inf\{M(A \mid B) \mid A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$$

ist gleich $V_{\mathfrak{A}}^{1-\frac{1}{n}} V_{\mathfrak{B}}^{\frac{1}{n}}$.

2. *Es gilt stets*

$$M(A \mid B) > V_{\mathfrak{A}}^{1-\frac{1}{n}} V_{\mathfrak{B}}^{\frac{1}{n}}$$

sofern $\bar{A}$ $(A \in \mathfrak{A})$ *und* $\bar{B}$ *nicht beide konvexe, homothetische Körper sind.*

Daß nun innerhalb der Klasse $\mathfrak{E}^*$ $M(A\,|\,B) = V_A^{1-\frac{1}{n}} \cdot V_B^{\frac{1}{n}}$ dann und nur dann gilt, falls A und B konvexe Punktmengen sind, von denen man höchstens eine Nullmenge entfernt hat, folgt in Verbindung mit der bewiesenen Notwendigkeit dieser Bedingung ohne weiteres, wenn man dazu die Tatsache berücksichtigt, daß letztere Bedingung (trivialerweise) auch hinreichend ist.

Zum Schluß möchte ich Herrn Dr. WALTER FELSCHER für kritische Durchsicht des druckfertigen Manuskripts und Herrn Dr. W. JEHNE und Herrn Dr. H. PACHALE für kritische Hilfe beim Lesen der Korrekturen meinen Dank aussprechen.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 17. Februar 1957)

NITSCHE, J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 316–324 (1957)

Über die isolierten Singularitäten der Lösungen von $\Delta u = e^u$ *)

Von
JOHANNES NITSCHE

Wenn die Lösung $u(x,y)$ einer elliptischen Differentialgleichung in der Umgebung eines Punktes, aber mit Ausnahme desselben, definiert und eindeutig ist, so kann man ohne weitere Information recht wenig über das singuläre Verhalten von $u(x,y)$ bei Annäherung an diesen Punkt sagen. Es gibt aber bemerkenswerte Beispiele nicht-linearer Differentialgleichungen, bei denen das doch möglich ist, wo also, auf Grund der Elliptizität und auf Grund des hinreichend nicht-linearen Charakters, schon die Voraussetzung der Eindeutigkeit allein die Möglichkeiten für die Lösungen stark beschneidet, und zwar ohne daß eine Beschränktheitsforderung ins Spiel käme. Wie BERS in [*1*] gezeigt hat, gibt es keine isolierten Singularitäten eindeutiger Lösungen der Minimalflächengleichung, die nicht hebbar wären, und dasselbe trifft für eine größere Klasse quasilinearer Differentialgleichungen zu, s. FINN [*3*]. Eine in der Umgebung des Unendlichen eindeutige Lösung der Differentialgleichung $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1$ hat die asymptotische Darstellung

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2} Q(x,y) + A x + B y + C \log |Q(x,y)| + O(1)$$

wo

$$Q(x,y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2, \qquad a c - b^2 = 1,$$

s. JOERGENS [*6*]. Ähnliche Resultate sind von FINN und GILBARG für die Differentialgleichung einer Gasströmung hergeleitet worden, s. [*4*].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ von dem beschriebenen Gesichtspunkte aus. $\Delta u = e^u$ bedeutet, daß die Fläche mit dem Linienelement $ds^2 = e^{u(x,y)} \cdot (dx^2 + dy^2)$ die konstante Gaußsche Krümmung $K = -\frac{1}{2}$ besitzt. Auch ist es in der Theorie der konformen Abbildung wohlbekannt[1]), daß der Logarithmus des achtfachen hyperbolischen Abbildungsmoduls diese Differentialgleichung befriedigt, und so ist im Anschluß an eine Preisaufgabe von H. A. SCHWARZ [*11*] die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ im Zusammenhang mit dem Uniformisierungsproblem algebraischer Riemannscher Flächen von PICARD [*9*], POINCARÉ [*10*], BIEBERBACH [*2*] u. a. eingehend studiert worden. Die dabei auftretenden Singularitäten, welche den Verzweigungspunkten entsprechen, sind spezielle Fälle der durch die Forderung der Eindeutigkeit ausgesonderten. Es besteht auch eine Beziehung zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der hyperbolische Abbildungsmodul

*) Diese Arbeit ist vorbereitet worden unter Contract N onr – 710 (16) zwischen der Universität von Minnesota und dem Office of Naval Research.

[1]) Siehe z. B. POINCARÉ [*10*]; FRICKE [*5*], insbes. S. 452–453. BIEBERBACH [*2*].

erscheint dann als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen. Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ sind subharmonische Funktionen. Während man aber aus dieser Tatsache lediglich eine Ähnlichkeit mit den harmonischen Funktionen — Lösungen einer linearen Differentialgleichung — schließen kann, lassen sich im vorliegenden Falle viel präzisere „Voraussagen" über die mögliche Form der Singularitäten machen.

Unter Benutzung der oben angegebenen Zusammenhänge und einiger Eigenschaften gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Singularitäten wird hier, im wesentlichen in unserem Hilfssatz 3, der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Die reellwertige Funktion $u(x,y)$ sei in der punktierten Kreisscheibe $0<x^2+y^2\leq r^2$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist $u(x,y)$ entweder auch noch im Nullpunkte regulär, oder es hat eine der beiden Darstellungen*

I) $u(x,y) = (K-1)\log(x^2+y^2) + \Phi(x,y), \qquad K>0;$

II) $u(x,y) = -\log(x^2+y^2) - 2\log|\log(x^2+y^2)| + \Psi(x,y).$

Die Funktionen $\Phi(x,y)$ und $\Psi(x,y)$ sind in $x^2+y^2\leq r^2$ stetig und in $0<x^2+y^2\leq r^2$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt (mit $\varrho^2 = x^2+y^2$)

$$\Phi_x, \Phi_y = O(\varrho^{2K-1}); \qquad \Phi_{xx}, \Phi_{xy}, \Phi_{yy} = O(\varrho^{2K-2});$$
$$\Psi_x, \Psi_y = O\left(\varrho^{-1}|\log^{-2}\varrho|\right); \qquad \Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy} = O\left(\varrho^{-2}|\log^{-2}\varrho|\right).$$

Für ganzzahliges K ist $\Phi(x,y)$ in $x^2+y^2\leq r^2$ reell analytisch. $\Psi(x,y)$ hat eine Reihendarstellung

$$\Psi(x,y) = \sum_{l,m,n\geq 0} a_{lmn} \frac{x^l y^m}{\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^n}.$$

Dabei gilt $a_{000} = \log 8$. Durch Einsetzen der Reihenentwicklung für $\Psi(x,y)$ in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ergibt sich weiterhin $a_{00n} = \frac{2}{n}\cdot\gamma^n$, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{00n} \frac{1}{\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^n} = \log 8 - 2\log\left(1 - \frac{\gamma}{\log\frac{1}{\varrho}}\right).$$

Dabei ist γ eine Konstante.

Daß tatsächlich solche singulären Lösungen existieren, zeigen die Beispiele

$$u(x,y) = (K-1)\log(x^2+y^2) + 2\log\left(\frac{2\sqrt{2K}}{1-(x^2+y^2)^K}\right), \quad K>0;$$

$$u(x,y) = -\log(x^2+y^2) - 2\log|\log(x^2+y^2)| + \log 8.$$

Von der Darstellung (2) für die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ kann man auch andere Dinge ablesen. Beispielsweise ergibt sich sehr einfach der zuerst von H. Wittich in [*12*] bewiesene Satz, daß keine „ganzen", d.h. für alle x und y zweimal stetig differenzierbare Lösungen von $\Delta u = e^u$ existieren können. Mehr, es ergibt sich der

Satz 2. *Die reellwertige Funktion $u(x,y)$ sei in $x^2+y^2<r^2$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Es sei $u(0,0)=\log\alpha$. Dann gilt die Ungleichung*

$$r \leq \sqrt{\frac{8}{\alpha}}\,.$$

Diese Schranke ist mit allgemeineren Methoden kürzlich von OSSERMAN [8] angegeben worden. Sie kann nicht verbessert werden, wie das Beispiel der Lösung

$$u(x,y) = \log\alpha - 2\log\left\{1 - \frac{\alpha}{8}(x^2+y^2)\right\}$$

zeigt.

Wir beginnen nunmehr mit dem Beweis des Satzes 1. Der Einfachheit halber werden wir uns jetzt statt der Variablen x und y der Variablen $z=x+iy$ und $\bar{z}=x-iy$ bedienen.

Hilfssatz 1. *Die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ sei in $|z-z_0|\leq r$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist der Ausdruck $q(z)=\frac{1}{2}u_{zz}-\frac{1}{4}u_z^2$ eine in $|z-z_0|\leq r$ regulär-analytische Funktion der Variablen z[2]. $u(z,\bar{z})$ ist durch die Werte $u(z_0,\bar{z}_0)$ und $u_z(z_0,\bar{z}_0)$ und durch die Funktion $q(z)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen $\Delta u = 4u_{z\bar{z}}$ hat man

$$q_{\bar{z}} = \frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u) - \frac{1}{8}u_z \Delta u = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial z}e^u - u_z e^u\right) = 0.$$

Daher ist $q(z)$ eine regulär-analytische Funktion von z. Der zweite Teil der Behauptungen kann durch vollständige Induktion bewiesen werden und wird hier übergangen.

Hilfssatz 2. *Die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ sei in $|z-z_0|\leq r$ zweimal stetig differenzierbar und dort Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Es sei*

$$u(z_0,\bar{z}_0)=\log\alpha \quad (\alpha>0), \qquad u_z(z_0,\bar{z}_0)=\beta+i\gamma, \qquad \tfrac{1}{2}u_{zz}-\tfrac{1}{4}u_z^2 = q(z).$$

$\omega_1(z)$ und $\omega_2(z)$ seien die zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + q(z)\,\omega = 0 \tag{1}$$

welche den Anfangsbedingungen

$$\omega_1(z_0)=1, \quad \omega_1'(z_0) = -\frac{1}{2}(\beta+i\gamma); \qquad \omega_2(z_0)=0, \quad \omega_2'(z_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{8}}$$

genügen. Dann gilt in $|z-z_0|\leq r$ die Darstellung

$$u(z,\bar{z}) = \log\alpha - 2\log\{|\omega_1(z)|^2 - |\omega_2(z)|^2\}. \tag{2}$$

[2]) Siehe POINCARÉ [10], S. 229; BIEBERBACH [2], S. 183.

Beweis. Es werde die Abkürzung $Q(z,\bar{z}) = |\omega_1|^2 - |\omega_2|^2$ eingeführt und fürs erste $v(z,\bar{z}) = \log\alpha - 2\log Q(z,\bar{z})$ gesetzt. Auf Grund der Anfangsbedingungen ist $Q(z,\bar{z})$ sicherlich in einer Kreisscheibe $|z-z_0| \leq r_1 \leq r$ positiv. Dort gilt dann $\Delta v = e^v$ und $v(z_0,\bar{z}_0) = \log\alpha$, $v_z(z_0,\bar{z}_0) = \beta + i\gamma$, $\frac{1}{2}v_{zz} - \frac{1}{4}v_z^2 = q(z)$, wie man durch Verifizieren bestätigt, und daher ist $u \equiv v$ in $|z-z_0| \leq r_1$. Wegen der Eindeutigkeit der durch die Anfangsbedingungen und die Funktion $q(z)$ bestimmten Lösung ist es aber auch nicht möglich, daß $Q(z,\bar{z})$ irgendwo in $|z-z_0| \leq r$ verschwindet. Daher kann man $r_1 = r$ annehmen, w. z. b. w.

Es seien $u_1(z,\bar{z})$ und $u_2(z,\bar{z})$ zwei in $0 < |z| \leq r$ zweimal stetig differenzierbare reellwertige Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. $u_1(z,\bar{z})$ sei in $0 < |z| \leq r$ eindeutig, und in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet dieser punktierten Kreisscheibe mögen u_1 und u_2 übereinstimmen. Dann muß in $0 < |z| \leq r$ auch u_2 eindeutig sein und $u_1 \equiv u_2$ gelten. — Nunmehr sei die reellwertige Funktion $u(z,\bar{z})$ in $0 < |z| \leq r$ zweimal stetig differenzierbar, eindeutig und Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Dann ist der Ausdruck $q(z) = \frac{1}{2}u_{zz} - \frac{1}{4}u_z^2$ eine in $0 < |z| \leq r$ eindeutige regulär-analytische Funktion der Variablen z.

Hilfssatz 3. Voraussetzungen: *Die Funktion $q(z)$ sei in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z| \leq r$ eindeutig und regulär-analytisch. $w_1(z)$ und $w_2(z)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2w}{dz^2} + q(z)\,w = 0, \tag{3}$$

und die reellwertige Funktion $Q(z,\bar{z}) = |w_1(z)|^2 - |w_2(z)|^2$ sei positiv und eindeutig in $0 < |z| \leq r$.

Behauptungen: *Dann muß $z = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (3) sein*[3]*, und die Funktion $\log Q(z,\bar{z})$ ist entweder in $|z| \leq r$ reell-analytisch oder hat dort eine der beiden Formen*

I) $\log Q(z,\bar{z}) = (1-K)\log|z| + \Phi(z,\bar{z}), \quad K > 0;$

II) $\log Q(z,\bar{z}) = \log|z| + \log|\log|z|| + \Psi(z,\bar{z}).$

Die Funktionen $\Phi(z,\bar{z})$ und $\Psi(z,\bar{z})$ sind in $|z| \leq r$ stetig und in $0 < |z| \leq r$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt

$$\Phi_z, \Phi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-1}\right); \qquad \Phi_{zz}, \Phi_{z\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-2}\right);$$

$$\Psi_z, \Psi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{-1}|\log^{-2}|z||\right); \qquad \Psi_{zz}, \Psi_{z\bar{z}}, \Psi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{-2}\cdot|\log^{-2}|z||\right).$$

Beweis. Falls $q(z)$ auch im Punkte $z = 0$ regulär-analytisch ist, kann man w_1 und w_2 in der Form

$$w_1(z) = a + bz + \cdots, \qquad w_2(z) = c + dz + \cdots; \qquad b \geq 0,\ d \geq 0,\ ad - bc \neq 0$$

[3]) Das bedeutet beiläufig, daß die Funktion $q(z) = \frac{1}{2}u_{zz} - \frac{1}{4}u_z$ bei $z = 0$ höchstens einen Pol zweiter Ordnung besitzen kann.

annehmen. Dabei muß $|a|>|c|$ sein; denn im Falle $|a|=|c|$ würde Q auf einer Kurve durch den Ursprung verschwinden. Daher gilt

$$Q(z,\bar{z}) = \{|a|^2 - |c|^2\} + 2\,\mathfrak{Re}\{(a\,b - c\,d)\,\bar{z}\} + \cdots,$$

und $\log Q(z,\bar{z})$ ist eine in $|z|\leq r$ reell-analytische Funktion.

Falls $q(z)$ im Punkte $z=0$ eine Singularität besitzt, so existiert ein Fundamentalsystem $\omega_1(z), \omega_2(z)$ von Lösungen von (3), welches bei einmaligem Umlauf der Singularität eine der beiden Umlaufssubstitutionen erfährt:

$$\omega_1^{(1)} = \varrho_1\omega_1, \quad \omega_2^{(1)} = \varrho_2(\varepsilon\omega_1 + \omega_2). \tag{4}$$

ε ist entweder Null (logarithmenfreier Fall) oder Eins (logarithmischer Fall). Im Falle $\varepsilon=1$ stimmen ϱ_1 und ϱ_2 überein. Aus (4) folgt dann bekanntlich

$$\omega_1(z) = z^{\varkappa_1}\psi_1(z), \quad \omega_2(z) = z^{\varkappa_2}\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi i}\,\psi_1(z)\,\log z + \psi_2(z)\right\}, \quad 0\leq \mathfrak{Re}\,\varkappa_j < 1. \tag{5}$$

Dabei ist $\varrho_j = e^{2\pi i\varkappa_j}$ gesetzt, und die $\psi_j(z)$ bedeuten in $0<|z|\leq r$ eindeutige regulär-analytische Funktionen (Laurentreihen). Die beiden im Hilfssatz 3 erscheinenden Lösungen stellen sich als Linearkombinationen $w_1 = a\omega_1 + b\omega_2$, $w_2 = c\omega_1 + d\omega_2$, $ad-bc\neq 0$ dar. Mit Rücksicht auf die zu beweisenden Behauptungen kann von vornherein $b\geq 0$, $d\geq 0$ angenommen werden. Man wähle nun einen beliebigen Punkt z in $0<|z|\leq r$, am besten einen, für den $\omega_1\neq 0$ und $\omega_2\neq 0$ ausfällt, und man vergleiche den Wert der Funktion $Q(z,\bar{z})$ mit dem Wert $Q^{(n)}(z,\bar{z})$, welchen sie nach n-maligem Umlaufen des Nullpunktes annimmt. Es sei noch bemerkt, daß der Quotient $\omega(z) = \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ wegen $\omega'(z) = (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')\cdot\omega_1^{-2} = \frac{\Omega}{\omega_1^2(z)}$ eine Umgebung des Punktes z schlicht abbildet. Ω steht dabei für die konstante Wronskische Determinante.

I. Zunächst werde der Fall $\varepsilon=0$ ins Auge gefaßt. Mit den Abkürzungen

$$\varrho_j = R_j e^{i\Theta_j}, \quad (a\,b - c\,d)\,\omega_1\bar{\omega}_2 = R\,e^{i\Theta} \tag{6}$$

ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} Q^{(n)} = R_1^{2n}\left(|a|^2 - |c|^2\right)|\omega_1|^2 + 2R\,R_1^n R_2^n\cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] + \\ + R_2^{2n}\left(b^2 - d^2\right)|\omega_2|^2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Hier sind nun einige weitere Unterscheidungen vorzunehmen.

I. 1. $a\,b - c\,d = 0$ d.h. $R=0$. Wegen $a\,d - b\,c\neq 0$ muß dann $a\neq c$ und $b\neq d$ sein. Aus der Forderung $Q^{(n)} = Q$ folgt daher $R_1 = R_2 = 1$ d.h. $\mathfrak{Im}\,\varkappa_j = 0$. Ist nun $b>d$ (also insbesondere $b\neq 0$), so gilt $a = \frac{c\,d}{b}$ und

$$Q = \frac{b^2 - d^2}{b^2}\left\{b^2|\omega_2|^2 - |c|^2|\omega_1|^2\right\}. \tag{8}$$

$\omega_2(z)$ kann in $0<|z|\leq r$ keine Nullstelle haben, und der Quotient $\left|\frac{\omega_1(z)}{\omega_2(z)}\right| = |z|^{\varkappa_1-\varkappa_2}\left|\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}\right|$ muß in $0<|z|\leq r$ kleiner als $\frac{b}{|c|}$ bleiben. Somit erhält man eine

Beziehung $\psi_1(z) = \psi_2(z)\,\mathfrak{P}(z)$ wobei $\mathfrak{P}(z) = \sum_{m=M}^{\infty} \alpha_m z^m$ ist und $\alpha_M \neq 0$. Es werde $z^{\varkappa_1-\varkappa_2}\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{R}(z)$ gesetzt. Dann muß $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M \geq 0$ sein. Für die konstante Wronskische Determinante findet man den Ausdruck

$$\Omega = -\omega_2^2(z)\,\mathfrak{R}'(z),$$

so daß natürlich die Summe $\varkappa_1 + \varkappa_2$ eine ganze Zahl sein muß. $Q(z,\bar{z})$ erhält dann die Gestalt

$$Q(z,\bar{z}) = |\Omega|\,\frac{|c|^2(b^2-d^2)}{b^2}\cdot\frac{1}{|\mathfrak{R}'(z)|}\left\{\frac{b^2}{|c|^2} - |\mathfrak{R}(z)|^2\right\}. \tag{9}$$

Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten:

I. 11. $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M$ ist eine ganze Zahl. Da $|\mathfrak{R}(0)| < \frac{b}{|c|}$ sein muß, ist dann der Ausdruck $\log\left\{\frac{b^2}{|c|^2} - |\mathfrak{R}(z)|^2\right\}$ eine in $|z| \leq r$ reell-analytische Funktion, und für $\log Q(z,\bar{z})$ ergibt sich

$$\log Q(z,\bar{z}) = -k\log|z| + \Phi(z,\bar{z}). \tag{10}$$

$\Phi(z,\bar{z})$ steht für eine in $|z| \leq r$ reell-analytische Funktion. k ist eine nichtnegative ganze Zahl.

I. 12. Es ist $K = \varkappa_1 - \varkappa_2 + M > 0$ und keine ganze Zahl. Dann ergibt sich $\mathfrak{R}(z) = \alpha_M z^K(1+\cdots)$ und $\mathfrak{R}'(z) = K\alpha_M z^{K-1}(1+\cdots)$. Die Funktion $\log Q(z,\bar{z})$ wird zu

$$\log Q(z,\bar{z}) = (1-K)\log|z| + \Phi(z,\bar{z}). \tag{11}$$

$\Phi(z,\bar{z})$ ist jetzt in $|z| \leq r$ stetig und in $0 < |z| \leq r$ reell-analytisch. Bei Annäherung an den Nullpunkt gilt

$$\Phi_z, \Phi_{\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-1}\right); \qquad \Phi_{zz}, \Phi_{z\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = O\left(|z|^{2K-2}\right).$$

I. 2. $R \neq 0$. Zunächst werde weiterhin noch zusätzlich angenommen:

I. 21. $R_1 = R_2$. Folglich ist $R_1 = R_2 = 1$. Dann muß $\cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$ gelten für alle ganzen Zahlen n und mehr noch, nämlich im Hinblick auf die Schlichtheit von $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$, für alle Werte von Θ in der Nachbarschaft seines Ausgangswertes. Daraus ergibt sich $\Theta_1 - \Theta_2 = m \cdot 2\pi$, d.h. $\varrho_1 = \varrho_2$. In diesem Falle ist das Fundamentalsystem $\omega_1(z), \omega_2(z)$ nicht eindeutig bestimmt, und man kann von vornherein $b = c = 0$, $a = d = 1$ annehmen. Wegen $Q > 0$ muß dann aber $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = \left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right| < 1$ und daher $\psi_2(z) = \psi_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$ bzw. $\omega_2(z) = \omega_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$ gelten, $\mathfrak{P}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$. Es ist $\Omega = \omega_1^2(z)\,\mathfrak{P}'(z)$ und folglich

$$Q(z,\bar{z}) = |\Omega|\cdot|\mathfrak{P}'(z)|^{-1}\left\{1 - |\mathfrak{P}(z)|^2\right\}. \tag{12}$$

Somit ergibt sich am Ende wie im Falle I. 11

$$\log Q(z,\bar{z}) = -k\log|z| + \Phi(z,\bar{z}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

I. 22. $R_1 \neq R_2$. Es sei etwa $R_1 > R_2$. Dann muß $|a| \geq |c|$ sein. Falls $|a| > |c|$ ist, müssen $R_1 = 1$ und $b = d$ sein. Dann ergibt sich die Bedingung $R_2^n \cdot \cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$, welche wegen $R_2 < 1$ zur Folge hätte, daß Θ von der Form $\Theta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ ist. Das steht aber nicht im Einklang mit der Schlichtheit der Funktion $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$. Falls andererseits $|a| = |c|$ gilt, so muß entweder $R_2 = 1$ oder $b = d$ sein. $R_2 = 1$ führt wie eben auf einen Widerspruch. Bleibt also noch die Möglichkeit $b = d$ zu erledigen. Hier folgt aus der Bedingung $R_1^n R_2^n \cos[\Theta + n(\Theta_1 - \Theta_2)] = \cos\Theta$, daß $R_1 \cdot R_2 = 1$ und $\Theta_1 - \Theta_2 = m \cdot 2\pi$ sein müssen, d.h. $\varrho_1 \bar{\varrho}_2 = 1$ bzw. $\varkappa_2 = \bar{\varkappa}_1$. $Q(z, \bar{z})$ hat die Gestalt

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} Q(z,\bar{z}) &= b \cdot \{(a-c)\,\omega_1 \bar{\omega}_2 + (\bar{a}-\bar{c})\,\bar{\omega}_1 \omega_2\} \\ &= b\,|\psi_2|^2 \left\{(a-c) e^{2\varkappa_1 \cdot \log|z|}\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right) + (\bar{a}-\bar{c})\, e^{2\bar{\varkappa}_1 \log|z|}\left(\overline{\frac{\psi_1}{\psi_2}}\right)\right\} \\ &= 2b\,|\psi_2(z)|^2 \cdot |z|^{2\varkappa_1'} \cdot \Re e\left\{(a-c)\, e^{2i\varkappa_1'' \log|z|} \cdot \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dabei ist $\varkappa_1 = \varkappa_1' + i\varkappa_1''$ geschrieben. Man setze $(a-c)\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} = \psi(z)$. Es wird nun behauptet, daß die Bedingung $Q > 0$ in $0 < |z| \leq r$ auf einen Widerspruch führt. Zum Beweise dafür bedenke man, daß $\psi(z)$ in $0 < |z| \leq r$ nirgends verschwindet und daß sich das Argument von $\psi(z)$ beim Umlauf um $z = 0$ auf einem Kreise $|z| = \text{const.}$ um weniger als π und daher also gar nicht ändern kann. Daher ist auch die Funktion $\varphi(z) = \log\psi(z)$ eindeutig in $0 < |z| \leq r$ und $\psi(z) = e^{\varphi(z)}$. Aus $Q > 0$ folgt die Bedingung $\cos[2\varkappa_1'' \log|z| + \Im m\,\varphi(z)] > 0$, welche auf Grund der Stetigkeit des Ausdruckes in der eckigen Klammer unerfüllbar ist, ob nun $\varphi(z)$ bei $z = 0$ eine wesentliche oder eine außerwesentliche Singularität besitzt. (Wegen $R_1 \neq R_2$ ist $\varkappa_1'' \neq 0$.)

II. Nunmehr kommen wir zum Falle $\varepsilon = 1$. Man erhält hier

$$(15)\quad Q^{(n)} = |\varrho|^{2n}\{|(a\omega_1 + b\omega_2) + n\,b\,\omega_1|^2 - |(c\omega_1 + d\omega_2) + n\,d\omega_1|^2\}.$$

Daher müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein: $|\varrho| = 1$ d.h. $\Im m\,\varkappa = 0$, $b = d$ und $\Re e\,a = \Re e\,c$. $Q(z, \bar{z})$ besitzt demgemäß die Gestalt

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} Q(z,z) = |z|^{2\varkappa} \Big\{ &\left|\left(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\right)\psi_1 + b\psi_2\right|^2 - \\ &- \left|(c-a)\,\psi_1 + \left(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\right)\psi_1 + b\psi_2\right|^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Weder $\psi_1(z)$ noch die Funktion $\left(a + \frac{b}{2\pi i}\log z\right)\psi_1(z) + b\psi_2(z)$ können in $0 < |z| \leq r$ Nullstellen haben, und es ergibt sich die Ungleichung

$$(17)\quad \left|\frac{(c-a)}{a + b\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} + \frac{b}{2\pi i}\log z} + 1\right| < 1,$$

welche für sämtliche Zweige des Logarithmus ihre Gültigkeit behält. Der Quotient $\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)}$ muß aber unter diesen Umständen bei $z = 0$ regulär sein. Um

das einzusehen, nehme man das Gegenteil an und betrachte die Funktion[4])

$$f(z) = z\, e^{2\pi i\left[\frac{a}{b} + \frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)}\right]}, \tag{18}$$

welche dann bei $z=0$ eine wesentliche Singularität hätte. Nach dem Satze von WEIERSTRASS existierte dann eine gegen $z=0$ konvergierende Punktfolge z_ν, für die $f(z_\nu)$ gegen 1 strebte. Auf dieser Punktfolge würde die Funktion $a + b\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} + \frac{b}{2\pi i}\log z = \frac{b}{2\pi i}\log f(z)$ gegen Null konvergieren, sofern nur jeweils der richtige Zweig des Logarithmus ausgewählt, d.h. sofern nur die richtige Zahl von Umläufen um $z=0$ vorgenommen wird. Das ist aber ein Widerspruch zu (17).

Es gilt also $\psi_2(z) = \psi_1(z)\,\mathfrak{P}(z)$, wo $\mathfrak{P}(z)$ eine bei $z=0$ regulär-analytische Funktion bedeutet. Damit wird $\omega_2(z)$ zu $\omega_2(z) = \left\{\mathfrak{P}(z) + \frac{1}{2\pi i}\log z\right\}\omega_1(z)$. Nun ist, wie immer, die Wronskische Determinante $\Omega = \omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'$ konstant. Das gibt

$$\Omega = \omega_1^2(z)\cdot\left\{\mathfrak{P}'(z) + \frac{1}{2\pi i z}\right\}. \tag{19}$$

Die Funktion $Q(z,\bar z)$ schreibt sich daher jetzt als

$$\left\{\begin{aligned} Q(z,z) &= |\Omega|\cdot\left|\mathfrak{P}'(z) + \frac{1}{2\pi i z}\right|^{-1}\times \\ &\quad\times\left\{a_2^2 - c_2^2 + 2b(a_2 - c_2)\left[\mathfrak{Im}\,\mathfrak{P}(z) - \frac{1}{\pi}\log|z|\right]\right\}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Dabei ist $a = a_1 + i a_2$, $c = a_1 + i c_2$ gesetzt. Es muß $a_2 > c_2$ sein. Weiter folgt

$$\log Q(z,\bar z) = \log|z| + \log|\log|z|| + \Psi(z,\bar z). \tag{21}$$

Die Funktion $\Psi(z,\bar z)$ ist in $0<|z|\leq r$ reell-analytisch und verhält sich bei Annäherung von z an den Nullpunkt folgendermaßen:

$$\Psi_z, \Psi_{\bar z} = O\left(|z|^{-1}\cdot|\log^{-2}|z||\right); \quad \Psi_{zz}, \Psi_{z\bar z}, \Psi_{\bar z\bar z} = O\left(|z|^{-2}\cdot|\log^{-2}|z||\right). \tag{22}$$

Damit ist der Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Indem man die vorangehenden Hilfssätze und Bemerkungen kombiniert, gelangt man zu unserem am Anfang der Arbeit formulierten Satz 1. Der Satz 2 wird folgendermaßen bewiesen: Gemäß Hilfssatz 2 ist die Funktion $\omega(z) = \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ in $|z|\leq r$ regulär-analytisch, und es gilt dort $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$. Nach dem Schwarzschen Lemma muß somit

$$|\omega'(0)| = |\Omega\cdot\omega_1^{-2}(0)| = |\Omega| = |\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'| = \sqrt{\frac{\alpha}{8}} \leq \frac{1}{r}$$

sein, w. z. b. w.

[4]) Diese Überlegung verdanke ich Herrn E. REICH.

Literatur

[1] BERS, L.: Isolated singularities of minimal surfaces. Ann. of Math. **53**, 364–386 (1951). — [2] BIEBERBACH, L.: $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen. Math. Ann. **77**, 173–212 (1916). — [3] FINN, R.: Isolated singularities of solutions of non-linear partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 385–404 (1953). — [4] FINN, R., and D. GILBARG: Asymptotic behaviour and uniqueness of plane subsonic flows. Comm. p. appl. math. **10**, 23–63 (1957). — [5] FRICKE, R.: Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. Enc. math. Wiss. 2 B **4**, 349–470 (1913). — [6] JOERGENS, K.: Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Math. Ann. **129**, 330–344 (1955). — [7] NITSCHE, J.: On the solutions of the differential equation $\Delta \Phi = \exp \Phi$. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 575–576 (1956). — [8] OSSERMAN, R.: On a differential inequality and conformal mapping of surfaces. Techn. Rep. 3, 1956, Stanford University. — [9] PICARD, É.: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. J. de math. (4) **6**, 145–210 (1890). — De l'équation $\Delta u = k e^u$ sur une surface de Riemann fermée. J. de math. (4) **9**, 273–291 (1893). — De l'integration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. J. reine u. angew. Math. **130**, 243–258 (1905). — [10] POINCARÉ, H.: Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. J. de math. (5) **4**, 137–230 (1898). — [11] SCHWARZ, H. A.: Preisaufgabe der Math.-Phys. Klasse der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen für das Jahr 1891. Göttinger Nachr. **1890**, 216. — [12] WITTICH, H.: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Math. Z. **49**, 579–582 (1944).

Dept. Math., Inst. Techn., University of Minnesota, Minneapolis 14, Minn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 9. Mai 1957)

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 325–337 (1958)

Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. III

Von

GÜNTER HELLWIG

Einleitung

Diese Arbeit bringt einige Bemerkungen zur Theorie der Systeme linearer und quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Variablen, die in Form oder Inhalt eine ähnliche Darstellung meines Wissens bisher in der Literatur nicht gefunden haben. Dagegen werden Existenzfragen für das Cauchy-Problem und die verschiedenen charakteristischen Probleme nicht behandelt, da darüber für unsere Zwecke völlig ausreichende Ergebnisse vorliegen bzw. nach bewährtem Muster leicht erbracht werden könnten. Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. man etwa P. LAX [9].

Im § 1 wird die Überführbarkeit solcher Systeme auf eine Normalform im Courant-Friedrichsschen Sinne [3] für den quasilinearen Fall behandelt. Bei diesem ist die Herstellung einer Normalform nicht immer möglich, vielmehr werden dafür zusätzliche Bedingungen angegeben. Der § 2 bringt den Begriff des adjungierten Systems, wobei die Verwendung von Differentialformen besonders angemessen erscheint. Das Cauchysche Anfangswertproblem (A-Problem) und die charakteristischen Anfangswertprobleme (C-Probleme) werden in § 3 behandelt. Insbesondere interessiert dabei die Gesamtheit der C-Probleme. Es zeigt sich, daß für Systeme in der Normalform diese Gesamtheit eine wesentlich größere ist, als dies für die „vernünftigen" C-Probleme nicht in der Normalform vorliegender Systeme der Fall ist. Bei den A-Problemen werden Bedingungen für die Integration durch Quadraturen angegeben, die zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der Laplaceschen Invarianten führen, sowie die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzipes untersucht. Diese Dinge liegen natürlich bei zwei unabhängigen Variablen sehr einfach. Im § 4 werden Auflösungsformeln für die A-Probleme gebracht. Hier liegt eine Wiederaufnahme und Fortführung der Problemstellungen von HOLMGREEN und RELLICH (für Systeme in [8], für Differentialgleichungen n-ter Ordnung in [7], [11]) vor. Die Ergebnisse werden aber für Systeme erweitert und wesentlich kürzer gewonnen. Auch wird eine echte Verallgemeinerung der Riemannschen Methode für allgemeine hyperbolische Systeme gegeben. Bei HOLMGREEN [7] gelingt die Auflösung eigentlich nur nach geeigneten Integralausdrücken.

Herrn W. HAACK habe ich für kritische Bemerkungen zu danken. Der Titel dieser Arbeit*) bringt zum Ausdruck, daß es sich um eine Fortsetzung der in [4] begonnenen Untersuchungen handelt.

§ 1. Normalform

Jedes quasilineare System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Variablen x^k, $k=1, 2$ und n gesuchten Funktionen $u^j = u^j(x^1, x^2)$, $j = 1, \ldots, n$ hat die Gestalt

$$L^i \equiv a_j^{ik} u^j_{|k} + f^i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Dabei soll — wie auch im folgenden — stets über oben und unten stehende gleiche *lateinische* Indizes summiert werden, eine Vereinbarung, die für *griechische* Indizes nicht gilt. Ferner sind alle auftretenden Größen reell. In (1.1) sind die Abkürzungen $u^j_{|k} \equiv \frac{\partial u^j}{\partial x^k}$ verwendet worden, wie auch ferner hinter dem Längsstrich stehende Indizes Ableitungen bedeuten sollen. Wir betrachten (1.1) in einem festen, abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}$ der x^1, x^2-Ebene. Man nennt (1.1): (a) ein *quasilineares* System, wenn a_j^{ik}, f^i Funktionen von x^k, u^j sind, (b) ein *fastlineares* System, wenn a_j^{ik} nur Funktionen von x^k und f^i Funktionen wie unter (a) sind, (c) ein *lineares* System, wenn $f^i = b_j^i u^j + c^i$ ist und a_j^{ik}, b_j^i, c^i Funktionen nur von x^k sind.

Es sei $u(x^1, x^2) \in \mathfrak{C}^1$ in $\mathfrak{G}$[1]) und α dort ein Vektorfeld mit den Komponenten $\alpha^k(x^1, x^2) \in \mathfrak{C}^0$, $k = 1, 2$. Man nennt dann

$$u_{|\alpha} = \alpha^k u_{|k} \tag{1.2}$$

die Differentiation in Richtung des Feldvektors α. Man erkennt, daß (1.1) im allgemeinen n^2 solcher Richtungsdifferentiationen enthält. $u_{|\alpha}, u_{|\beta}$ heißen linear unabhängig, falls α, β linear unabhängig sind.

Sind $\lambda_i = \lambda_i(x^k, u^j)$ noch zu bestimmende geeignete Funktionen, so versucht man durch geeignete lineare Kombination von (1.1)

$$\lambda_i L^i \equiv \lambda_i a_j^{ik} u^j_{|k} + \lambda_i f^i = 0 \tag{1.3}$$

ein zu (1.1) äquivalentes Gleichungssystem zu finden, welches in jeder Gleichung nur *genau eine* Richtungsdifferentiation $u_{|\overset{\tau}{\alpha}}$, $\tau = 1, \ldots, n$ enthält mit Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$, die reell und in jedem Punkt paarweise linear unabhängig sind (R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS [3], [6], I. G. PETROWSKI [10]). Zum Aufbau des äquivalenten Systems benötigt man offenbar n linear unabhängige

*) Sie bringt einige Teile aus [6] in verbesserter Form zum Abdruck. Wenn auch die Untersuchungen [6] zeitlich sehr zurückliegen, so wurde die hier getroffene Auswahl durch Vergleich mit der Literatur über diesen Gegenstand dadurch erleichtert. Die Auswahl geht zurück auf Gespräche mit den Herren W. HAACK und P. LAX.

[1]) Wir schreiben: $u \in \mathfrak{C}^n$ falls in dem zugrunde gelegten Gebiet u stetige n-te Ableitungen besitzt. Die Stetigkeit von u wird durch $\mathfrak{C}^0$ beschrieben.

n-Vektoren λ^τ mit den Komponenten λ_i^τ. Denken wir uns diese in (1.3) eingesetzt, so soll das so entstehende System die Gestalt

$$\tilde{L}^\tau \equiv g_j^\tau u^j_{|\overset{\tau}{\alpha}} + \lambda_j^\tau f^j = 0, \quad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

haben. Gleichsetzung von (1.3), (1.4) liefert

$$\lambda_i^\tau a_j^{i1} = g_j^\tau \overset{\tau}{\alpha}{}^1, \quad \lambda_i^\tau a_j^{i2} = g_j^\tau \overset{\tau}{\alpha}{}^2. \tag{1.4a}$$

Nehmen wir $\overset{\tau}{\alpha}{}^1 \neq 0$ an, was gegebenenfalls durch Drehung des Koordinatensystems und Gebietseinschränkung von $\mathfrak{G}$ erreicht werden kann, so folgt mit $\varphi^\tau = \dfrac{\overset{\tau}{\alpha}{}^2}{\overset{\tau}{\alpha}{}^1}$ aus (1.4a)

$$\lambda_i^\tau (a_j^{i1} \varphi^\tau - a_j^{i2}) = 0. \tag{1.4b}$$

Fordern wir, daß die algebraische Gleichung

$$|a_j^{i1} \varphi - a_j^{i2}| = 0 \tag{1.4c}$$

in $\mathfrak{G}$ n verschiedene reelle Wurzeln φ^τ besitzt, so sind uns dadurch n Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ gegeben. Systeme (1.1), die die Forderung (1.4c) erfüllen, nennen wir Systeme von *total hyperbolischem Typus* [3]. Nur mit solchen werden wir uns hier beschäftigen. Sie können in der Gestalt (1.4) angenommen werden, die wir die *invariante Form* von (1.1) nennen. Dabei sind g_j^τ, λ_j^τ Funktionen von x^k, u^j. Die Koeffizienten in (1.4) haben dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften in $\mathfrak{G}$ wie die in (1.1). Überdies ist $|g_j^\tau| \neq 0$, was aus den Forderungen an die Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ folgt. Für die quasilinearen Systeme hat man sich für die obigen Überlegungen stets ein festes Lösungssystem u^j eingesetzt zu denken.

Unter den charakteristischen Kurvenscharen für (1.1) verstehen wir die Lösungen von

$$\dot{x}^1 = \overset{\tau}{\alpha}{}^1, \quad \dot{x}^2 = \overset{\tau}{\alpha}{}^2, \quad \tau = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Dabei sei $\overset{\tau}{\alpha}{}^k \in \mathfrak{C}^1$, wozu $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$ in $\mathfrak{G}$ hinreichend ist. Dann bilden sie in $\mathfrak{G}$ im Sinne von Blaschke-Bol [1] ein *n-Gewebe*. Überdies darf $(\overset{\tau}{\alpha}{}^1)^2 + (\overset{\tau}{\alpha}{}^2)^2 = 1$ angenommen werden, womit der Parameter in (1.5) als Bogenlänge $\overset{\tau}{s}$ festgelegt wird.

Zu einem Paar der Vektoren $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ gibt es ein Paar *kontragredienter Vektoren* $\underset{\varrho}{\alpha}$, $\underset{\sigma}{\alpha}$, deren Komponenten durch

$$\begin{cases} \overset{\varrho}{\alpha}{}^k \underset{\varrho}{\alpha}_k = 1, & \overset{\varrho}{\alpha}{}^k \underset{\sigma}{\alpha}_k = 0, \\ \overset{\sigma}{\alpha}{}^k \underset{\sigma}{\alpha}_k = 1, & \overset{\sigma}{\alpha}{}^k \underset{\varrho}{\alpha}_k = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

definiert sind. Sie bauen die *Linearformen*

$$\underset{\varrho}{\omega} = \underset{\varrho}{\alpha}_k \, dx^k, \quad \underset{\sigma}{\omega} = \underset{\sigma}{\alpha}_k \, dx^k \text{ [2]} \tag{1.7}$$

[2] Genauer müßten wir für $\underset{\varrho}{\omega}$ etwa $\overset{\varrho,\sigma}{\underset{\varrho}{\omega}}$ schreiben, um anzudeuten, daß zum Aufbau die Vektoren $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ benutzt worden sind. Wir sehen davon ab.

auf. Insbesondere ist dann auf der *ϱ-ten charakteristischen Kurvenschar* $\int_{\varrho} \omega = s$, d.h. die Bogenlänge und $\omega = 0$. Entsprechendes gilt auf der *σ-ten charakteristischen Kurvenschar*: $\int_{\sigma} \omega = s$, $\omega = 0$.

Im *fastlinearen Fall* kann die *invariante Form* (1.4) des Systems (1.1) bekanntlich vereinfacht werden. Führt man durch

$$U^\tau = g_j^\tau u^j \quad \text{mit} \quad u^j = h_e^j U^e \quad \text{und} \quad g_j^\tau h_e^j = \delta_e^\tau \tag{1.8}$$

neue gesuchte Funktionen ein, so erscheint wegen

$$g_j^\tau u^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} = U^\tau_{|\frac{\tau}{\alpha}} - g^\tau_{j\,|\frac{\tau}{\alpha}} u^j \tag{1.9}$$

(1.4) in der Gestalt

$$U^\tau_{|\frac{\tau}{\alpha}} + F^\tau = 0, \quad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.10}$$

mit

$$F^\tau(x^k, U^j) = \lambda_j^\tau f^j - g^\tau_{j\,|\frac{\tau}{\alpha}} h_e^j U^e. \tag{1.11}$$

Man nennt bekanntlich (1.10) die *Normalform* von (1.1). Dabei ist $F^\tau \in \mathfrak{C}^0$ für jedes Argument, falls $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$ und $f^i \in \mathfrak{C}^0$ sind für $x^k \in \mathfrak{G}$ und $-\infty < u^j < \infty$.

Die Normalform ist von *ausgezeichneter* Bedeutung, da sie 1. sofort den Übergang zu Volterraschen Integralgleichungen ermöglicht und 2. für die numerische Berechnung der Lösung bei den verschiedenen Anfangs- und Randwertbedingungen ein angepaßtes Differenzenverfahren anbietet.

Im *quasilinearen Fall* kann die Form (1.10) nur unter zusätzlichen Voraussetzungen gewonnen werden, da die Umformung (1.9) nicht gültig bleibt. An Stelle von (1.8) führen wir durch

$$U^\tau = \Phi^\tau(x^k, u^j) \tag{1.12}$$

neue gesuchte Funktionen U^τ ein. Multiplizieren wir (1.4) mit nichtverschwindenden Faktoren $M^\tau = M^\tau(x^k, u^j)$, so erhalten wir

$$M^\tau \tilde{L}^\tau \equiv M^\tau g_j^\tau u^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} + M^\tau \lambda_j^\tau f^j = 0. \tag{1.13}$$

Aus der Forderung, daß (1.13) die Gestalt (1.10) hat, folgt mit (1.12) unter Beachtung von (1.2)

$$M^\tau \tilde{L}^\tau = \sum_{j=1}^{n} \Phi^\tau_{|u^j} u^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} + \Phi^\tau_{|k} \overset{\tau}{\alpha}{}^k + F^\tau, \tag{1.14}$$

wobei die beiden letzten Terme zu einem $\tilde{F}^\tau$ zusammengefaßt werden können. Ein Vergleich mit (1.13) zeigt, daß dann $M^\tau g_j^\tau = \Phi^\tau_{|u^j}$ sein muß. Dies bedeutet, daß die Formen $\Theta^\tau = g_j^\tau \, du^j$ durch Multiplikatoren M^τ im Raume der u^j integrabel gemacht werden können. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$[d, M^\tau \Theta^\tau] = 0, \quad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

gilt. $[d, M^\tau \Theta^\tau]$ bedeutet die *äußere Ableitung* der Form $M^\tau \Theta^\tau$. In der Schreibweise folgen wir W. HAACK [5]. Für $n = 2$ gibt es stets solche Multiplikatoren (vgl. die Bemerkung von J. NITSCHE in [4], S. 350), für $n \geqq 3$ ist dies im allgemeinen nicht richtig. Nach einem Satz von E. CARTAN [2], S. 48, besteht eine Relation der Form (1.15) genau dann, wenn es Formen Ω^τ derart gibt, daß

$$[d, \Theta^\tau] = [\Omega^\tau, \Theta^\tau] \tag{1.16}$$

gilt. Äquivalent mit (1.16) ist das Verschwinden der äußeren Produkte

$$[\Theta^\tau, [d, \Theta^\tau]] = 0 \tag{1.16a}$$

im Raume der u^j. Erfüllen die g_j^τ diese Gleichungen, so gibt es auch im *quasilinearen Falle* eine Normalform. Es ist leicht, solche Sonderfälle aufzuzählen. Sind etwa g_j^τ in (1.4) nur Funktionen von x^1, x^2 und der *einen* Variablen u^j ($g_1^\tau = g_1^\tau(x^1, x^2, u^1)$ usw.), dann ist $[d, \Theta^\tau] = 0$ und (1.16a) erfüllbar. Man erreicht (1.10) indem man für (1.12)

$$U^\tau = \int g_j^\tau \, d u^j \tag{1.17}$$

setzt.

§ 2. Das adjungierte System

Wir betrachten das lineare System (1.1) in $\mathfrak{G}$ und setzen $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$, b_j^i, $c^i \in \mathfrak{C}^0$ voraus. Dann sind $\overset{\tau}{\alpha}{}^k$ (1.5) aus $\mathfrak{C}^1$ und das *charakteristische n-Gewebe* existiert in $\mathfrak{G}$. (1.10) hat die Gestalt

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = A_j^\tau U^j + C^\tau; \qquad A_j^\tau, C^\tau \in \mathfrak{C}^0. \tag{2.1}$$

Wir definieren das zu (2.1) *adjungierte System*.

Zu diesem Zweck legen wir durch einen beliebigen inneren Punkt P_0: $\overset{\circ}{x}{}^k \in \mathfrak{G}$ die n charakteristischen Kurven (1.5) hindurch und betrachten sie ferner etwa für $x^2 \leqq \overset{\circ}{x}{}^2$. Dabei ist vorausgesetzt, daß $x^2 = \overset{\circ}{x}{}^2$ keine charakteristische Kurve ist, was gegebenenfalls durch eine Koordinatentransformation erreichbar ist. Schließlich bringen wir diese mit einer glatten Kurve $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{G}$ zum Schnitt, die nirgends eine charakteristische Richtung (1.5) hat. Qualitativ ergibt sich Fig. 1. Wir nennen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_n$ die *Außen-*, $\mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}$ die *Innencharakteristiken*[3]) und bezeichnen das durch $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{k}$ abgeschlossene Gebiet mit $\mathfrak{A}(P_0)$ und die Berandung mit $\dot{\mathfrak{A}}(P_0)$. In diesem Sinne denken wir uns auch die $\overset{\tau}{\alpha}$ numeriert.

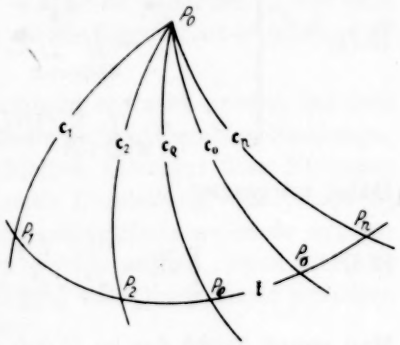

Fig. 1

[3]) Wir verzichten auf eine genaue Definition dieser wohlbekannten Begriffe.

Aus $\mathfrak{c}_\tau$, $\tau = 1, \ldots, n$ werden zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_\varrho$, $\mathfrak{c}_\sigma$ $(\varrho < \sigma)$ mit dazugehörigen $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ (1.5) und $\omega_\varrho, \omega_\sigma$ (1.7) *beliebig* ausgewählt[3a]). Wegen der Abhängigkeit der Vektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ von $\overset{\varrho}{\alpha}, \overset{\sigma}{\alpha}$ gilt

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = s^\tau U^\tau_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + t^\tau U^\tau_{|\overset{\sigma}{\alpha}} \tag{2.2}$$

mit $s^\varrho = t^\sigma = 1$, $s^\sigma = t^\varrho = 0$. Ferner ist

$$[d, \omega_\varrho] = q[\omega_\sigma, \omega_\varrho], \quad [d, \omega_\sigma] = \bar{q}[\omega_\varrho, \omega_\sigma], \tag{2.3}$$

$$q = \frac{1}{D}\left(\alpha_{\varrho 1|2} - \alpha_{\varrho 2|1}\right), \quad \bar{q} = \frac{1}{D}\left(\alpha_{\sigma 2|1} - \alpha_{\sigma 1|2}\right), \quad D = \alpha_{\varrho 1}\alpha_{\sigma 2} - \alpha_{\varrho 2}\alpha_{\sigma 1}. \tag{2.4}$$

Wenden wir auf die Form

$$\omega = \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau \left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \tag{2.5}$$

den Cartanschen Integralsatz

$$\int\limits_{\dot{\mathfrak{A}}(P_0)} \omega = \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} [d, \omega] \tag{2.6}$$

an und setzen $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ als Lösungen von (2.1) voraus, so folgt bei Beachtung von (2.2), (2.3)

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\dot{\mathfrak{A}}(P_0)} \omega = \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} \left\{\left(Z_\tau U^\tau s^\tau\right)_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + \left(Z_\tau U^\tau t^\tau\right)_{|\overset{\sigma}{\alpha}}\right\} [\omega_\varrho, \omega_\sigma] \\ \qquad + \displaystyle\iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau \left(s^\tau \bar{q} + t^\tau q\right) [\omega_\varrho, \omega_\sigma] \\ \qquad = \displaystyle\iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} \left\{U^\tau \left(Z_{\tau|\overset{\tau}{\alpha}} + \bar{A}^j_\tau Z_j\right) + Z_\tau C^\tau\right\} [\omega_\varrho, \omega_\sigma]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dabei ist gesetzt

$$\bar{A}^j_\tau = \begin{cases} A^j_\tau, & j \neq \tau \\ A^\tau_\tau + s^\tau_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + t^\tau_{|\overset{\sigma}{\alpha}} + s^\tau \bar{q} + t^\tau q, & j = \tau. \end{cases} \tag{2.8}$$

Man nennt (2.9b) das zu (2.9a) *adjungierte* System [4]:

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = A^\tau_j U^j, \tag{2.9a}$$

$$Z_{\tau|\overset{\tau}{\alpha}} = -\bar{A}^j_\tau Z_j. \tag{2.9b}$$

Dabei ist bemerkenswert, daß 1. keine Charakteristik ausgezeichnet worden ist und 2. das adjungierte System von (2.9b) wieder das Ausgangssystem (2.9a) ist. Ferner bestätigt man leicht die wichtige Relation

$$s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{c}_\tau. \tag{2.10}$$

[3a]) Sie müssen nicht benachbart sein, wie in Fig. 1.

§ 3. Anfangswertprobleme

1. Das Cauchysche Anfangswertproblem (A-Problem). Bei diesem ist neben (2.1) eine glatte Kurve $\mathfrak{k} < \mathfrak{G}$ mit nirgends charakteristischer Richtung (1.5) gegeben (Fig. 1). Wir dürfen $\mathfrak{k}$ bis zu dem Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt und in ein nicht charakteristisches Feld β eingebettet denken, welches durch

$$\dot{x}^1 = \beta^1, \quad \dot{x}^2 = \beta^2, \quad \beta^i \in \mathfrak{C}^1 \tag{3.1}$$

gegeben wird. Dann bildet $\overset{\tau}{\alpha}, \beta$ ein $(n+1)$-Gewebe in $\mathfrak{G}$. Für die Koeffizienten in (2.1) betrachten wir zwei Voraussetzungsgruppen:

$$V_{N_1}: A_j^\tau, C^\tau \in \mathfrak{C}^0,$$

$$V_{N_2}: A_j^\tau, C^\tau, A_{j|\beta}^\tau, C_{|\beta}^\tau \in \mathfrak{C}^0.$$

Es gilt dann der

Satz. (a) *Sind $U^\tau = \Psi^\tau \in \mathfrak{C}^0$ auf $\mathfrak{k}$ willkürlich vorgegebene Funktionen, dann gibt es unter V_{N_1} für alle $P_0 \in \mathfrak{G}$ für die $\mathfrak{A}(P_0) < \mathfrak{G}$ (Fig. 1) genau ein Lösungssystem $U^\tau(P_0)$ von (2.1) mit U^τ, $U_{|\overset{\tau}{\alpha}}^\tau \in \mathfrak{C}^0$, welches auf $\mathfrak{k}$ die Vorgaben Ψ^τ erfüllt.*

(b) *Sind $\Psi^\tau \in \mathfrak{C}^1$, dann hat unter V_{N_2} dieses Lösungssystem die Eigenschaft, daß auch $U_{|\beta}^\tau \in \mathfrak{C}^0$ gilt, welches mit* (a) *schließlich $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ ergibt.*

Bemerkung. Damit ist auch ein Existenzsatz für das Ausgangssystem (1.1) durch die Formel (1.8) gegeben. Die Vorgaben $u^\tau = \psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$ führen mit $\Psi^\tau = g_j^\tau \psi^j$ auf ein A-Problem vom obigen Typus. Die Voraussetzungen V_{N_1}, V_{N_2} ergeben sich aus solchen für (1.1):

$$V_{A_1}: \quad a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1, \quad b_j^i, c^i \in \mathfrak{C}^0$$

und entsprechendes für V_{A_2}. Die Lösung $u^\tau = h_i^\tau U^i$ ist dabei bei V_{A_1} nur eine verallgemeinerte Lösung, da sie nach Satz (a) nur die Eigenschaft $u^\tau, (g_j^\tau u^j)_{|\overset{\tau}{\alpha}} \in \mathfrak{C}^0$ besitzt.

Der Beweis kann durch ein Iterationsverfahren erbracht werden, bei dem es nicht nötig ist, die Technik der im allgemeinen nicht integrablen Richtungsableitungen zu verlassen [6]. Aus der reichlichen Literatur über Existenzfragen erwähnen wir nur die zusammenfassende Darstellung von P. Lax [9] und I. G. Petrowski [10], S. 77. Ist das *charakteristische n-Gewebe* explizit bekannt, so kann überdies die Frage beantwortet werden, wann sich die Lösung des A-Problems allein durch Verwendung von Quadraturen gewinnen läßt. Ist $((A_j^\tau))$ in (2.1) eine Dreiecksmatrix:

$$A_j^\tau = 0 \quad \text{für} \quad \tau < j, \tag{3.2}$$

so lautet die erste Gleichung in (2.1)

$$U_{|\overset{1}{\alpha}}^1 = A_1^1 U^1 + C^1. \tag{3.3}$$

Dies ist für die 1. Gewebeschar der charakteristischen Kurven eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit der Variablen $\underset{1}{s}$. Ihre eindeutige Lösung im beliebigen Punkt P_0 kann durch Quadraturen gefunden werden, da die Anfangswerte $U^1 = \Psi^1$ auf $\mathfrak{k}$ gegeben sind. Die zweite Gl. (2.1) erscheint dann

in der Gestalt

$$U^2_{|\alpha} = A_2^2 U^2 + \tilde{C}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{C}^2 = A_1^2 U^1 + C^2 \tag{3.4}$$

und das Verfahren setzt sich analog fort. Für $n=2$ sind durch (3.2) die verallgemeinerten *Laplaceschen Invarianten* gegeben (vgl. [4], S. 250). Aus (2.8) ist ersichtlich, daß $A_j^\tau = 0$, $\bar{A}_j^\tau = 0$ für $\tau < j$ äquivalente Aussagen sind, so daß beide Systeme (2.9) bezüglich der Integration durch Quadraturen dieselben Eigenschaften haben. Ist überdies $((A_j^\tau))$ eine Diagonalmatrix

$$A_j^\tau = 0, \quad \tau \neq j, \tag{3.5}$$

so ist die τ-te Gleichung, $\tau = 1, \ldots, n$ in (2.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Variablen $\underset{\tau}{s}$ längs $\mathfrak{c}_\tau$ (Fig. 1). Die Lösungen $U^\tau(P_0)$ hängen daher nur von den Anfangswerten Ψ^τ auf $\mathfrak{k}$ im Punkte P_τ (Fig. 1) ab. (3.5) bedeutet die Gültigkeit des *Huyghensschen Prinzipes*, sowohl für das A-Problem zu (2.1) wie zu (1.1). Für $n=2$ hängen u^1, u^2 in P_0 nur von den Anfangswerten im Durchschnitt $(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) \cdot \mathfrak{k}$ ab.

2. Das charakteristische Anfangswertproblem (C-Problem). Durch Vorgaben allein auf den *Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$ (Fig. 1) soll uns in einem geeigneten Gebiet aus $\mathfrak{G}$ eine eindeutige Lösung sowohl von (2.1) wie von (1.1) ermöglicht werden. Wir sind an der *Gesamtheit* solcher Vorgaben interessiert.

Satz. *Auf den Charakteristiken* (Fig. 1) *werden die stetigen Vorgaben getroffen*:

(1) $U^1 = \Psi^1$ *ist auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$, $U^n = \Psi^n$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}$ *vorgegeben.*

(2) $U^\sigma = \Psi^\sigma$ *ist für* $\sigma = 2, \ldots, n-1$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{\sigma-1}$ *vorgegeben.*

(3) $U^\sigma = \Phi^\sigma$ *ist für* $\sigma = 2, \ldots, n-1$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_{\sigma+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ *vorgegeben mit stetigem Zusammenschluß in* P_0 *mit den Vorgaben in* (2).

Dann gibt es unter V_{N_1} *für alle* $P \in \mathfrak{A}(P_0)$ *bei festem* P_0 *und* $\mathfrak{A}(P_0) < \mathfrak{G}$ *genau ein Lösungssystem* $U^\tau(P)$ *von* (2.1) *mit* U^τ, $U^\tau_{|\alpha} \in \mathfrak{C}^0$, *welches auf* $\mathfrak{c}_\tau$ *die gemachten Vorgaben erfüllt. Sind* Ψ, $\Phi \in \mathfrak{C}^1$, *so ist* $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ *für* V_{N_1}. Der Existenzbereich für $U^\tau(P)$ kann bekanntlich noch erweitert werden.

Folgerungen: (a) Aus (2) und (3) folgt, daß U^2 auf $\mathfrak{c}_1$, U^{n-1} auf $\mathfrak{c}_n$ vorgegeben werden muß. (b) U^σ darf nicht auf $\mathfrak{c}_\sigma$ vorgegeben werden. (c) Bei n Charakteristiken sind genau $2n-2$ Vorgaben nötig.

Beispiele für $n=4$:

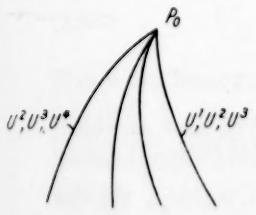

Fig. 2

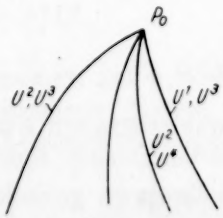

Fig. 3

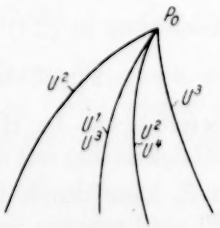

Fig. 4

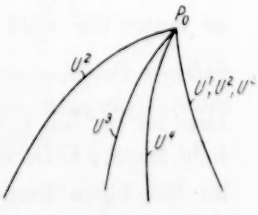

Fig. 5

Der Beweis ist wieder durch ein Iterationsverfahren zu erbringen, indem man das C-Problem für $U^\tau_{|\alpha} = C^\tau$ als ersten Schritt verwendet. Die dabei zu verwendende Integrationstechnik ist aus Fig. 6 ersichtlich, die die zu verwendenden Integrationswege für das Beispiel der Fig. 4 angibt. Damit ist auch die Gesamtheit der C-Probleme für (1.1) aufgefunden, indem man die entsprechenden Linearkombinationen (1.8) $g^\tau_j u^j$ vorgibt. Man nennt diejenigen Probleme für (1.1) *ausgezeichnete*, die zu ihrer Formulierung die g^τ_j nicht benötigen, wo also die u^j einzeln auf den Charakteristiken vorgegeben sind. *Auf solche Probleme führen genau diejenigen C-Probleme für die Normalform* (2.1), *bei denen Vorgaben nur auf den Außencharakteristiken gemacht worden sind* (Fig. 2). Über die erste und letzte Gleichung in (2.1) ist dann nämlich U^1 auf $\mathfrak{c}_1$, U^n auf $\mathfrak{c}_n$ eindeutig berechenbar. Mit dieser Bemerkung kann auch die Gesamtheit der ausgezeichneten C-Probleme für (1.1) leicht angegeben werden.

Fig. 6

3. Das verallgemeinerte C-Problem. Die Gesamtheit dieser Probleme entsteht aus unseren Überlegungen in Nr. 2 dadurch, daß noch geeignete Sprünge S^τ der Funktion U^τ längs der Charakteristik $\mathfrak{c}_\sigma$ vorgegeben werden. (Man vergleiche auch F. RELLICH [*11*] für Differentialgleichungen n-ter Ordnung.) Bezeichnen wir das durch $\mathfrak{c}_\varrho$, $\mathfrak{c}_{\varrho+1}$ und $\mathfrak{k}$ begrenzte abgeschlossene Gebiet mit $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ (Fig. 1) und U^τ dort mit $\overset{\varrho}{U}{}^\tau$, so gilt

$$\mathfrak{A}(P_0) = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0). \tag{3.6}$$

Die neue Gesamtheit erhalten wir dann aus der Nr. 2 durch die Ergänzung

(4) *Längs der Innencharakteristiken* $\mathfrak{c}_\gamma$, $\gamma = 2, \ldots, n-1$ *werden die Sprünge* $\overset{\gamma}{S}{}^\tau$ *der Funktion* U^τ

$$\overset{\gamma}{S}{}^\tau = \overset{\gamma-1}{U}{}^\tau - \overset{\gamma}{U}{}^\tau, \quad \tau \neq \gamma, \ \tau = 1, \ldots, n \tag{3.7}$$

willkürlich aber stetig vorgegeben, so daß in P_0 *die Verträglichkeitsbedingung*

$$\overset{1}{U}{}^\tau(P_0) - \overset{n-1}{U}{}^\tau(P_0) = \sum_{\nu=2}^{n-1} \overset{\nu}{S}{}^\tau(P_0) \tag{3.8}$$

erfüllt ist.

Die Lösung $\overset{\gamma}{U}{}^\tau$ hat dann die Eigenschaft $\overset{\gamma}{U}{}^\tau$, $\overset{\gamma}{U}{}^\tau_{|\alpha} \in \mathfrak{C}^0$ in $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ bei V_{N_1} und entsprechend $\overset{\gamma}{U}{}^\tau(P_0) \in \mathfrak{C}^1$ in $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ bei V_{N_2}, $\gamma = 2, \ldots, n-1$, $\varrho = 1, \ldots, n-1$. Die Formulierung solcher verallgemeinerten Probleme ist auch für (1.1) unter V_A, leicht möglich.

Auch für Anfangs-Randwertprobleme kann eine ähnliche Vollständigkeit erreicht werden [*6*].

§ 4. Auflösungsformeln

1. Reduktionsformeln. $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien Lösungen des A-Problems (2.1) mit $U^\tau = \Psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$ und $Z_\tau, \overline{Z}_\tau$ zwei Lösungen der C-Probleme (2.9b) mit

(4.1) $Z_n = 0$ auf $\mathfrak{c}_1$, $Z_1 = 1$ auf $\mathfrak{c}_n$, $Z_\mu = 0$ auf $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_n$, $\mu = 2, \ldots, n-1$;

(4.2) $\overline{Z}_n = 1$ auf $\mathfrak{c}_1$, $\overline{Z}_1 = 0$ auf $\mathfrak{c}_n$, $\overline{Z}_\mu = 0$ auf $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_n$, $\mu = 2, \ldots, n-1$.

(2.7) ergibt dann mit $\varrho = 1$, $\sigma = n$ in (2.2) bei Beachtung von (2.10)

$$\int_{\mathfrak{A}(P_0)} \omega = \int_{P_1}^{P_n} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau (s^\tau \underset{n}{\omega} - t^\tau \underset{1}{\omega}) + \int_{P_n}^{P_0} U^1 \underset{n}{\omega} = \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau C^\tau [\underset{1}{\omega}, \underset{n}{\omega}] \tag{4.3}$$

oder

$$U^1(P_0) = H(Z_1, \ldots, Z_n)_{|\alpha}^{n} \tag{4.4}$$

mit

$$H(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \int_{P_1}^{P_n} Z_\tau \Psi^\tau (t^\tau \underset{1}{\omega} - s^\tau \underset{n}{\omega}) + \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} Z_\tau C^\tau [\underset{1}{\omega}, \underset{n}{\omega}] \right\} \tag{4.5}$$

und entsprechend

$$U^n(P_0) = H(\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n)_{|\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.6}$$

Damit ist (2.1) auf $n-2$ Gleichungen reduziert. Ist $n = 2p$ bzw. $2p+1$, so sind nach p bzw. $p+1$ Reduktionen Auflösungsformeln für alle U^τ hergestellt.

2. Auflösungsformeln. $Z_\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien Lösungen eines verallgemeinerten C-Problems (2.9b). Da nur ein Sprung auftreten wird, machen wir von der Bezeichnungsweise in § 3,3 keinen Gebrauch. Für $\tau = 1, \ldots, n-1$ sei

$$\begin{cases} Z_\mu = 0, \quad \mu = 2, \ldots, n \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_1, \\ Z_\tau = 1, \quad Z_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, n-1, \quad \mu \neq \tau \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_n, \\ Z_\tau \text{ macht auf } \mathfrak{c}_\tau \text{ einen Sprung (3.7) der Höhe } -1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Der Integralsatz (2.7) liefert mit $\varrho = 1$, $\sigma = n$

$$\int_{P_n}^{P_0} U^\tau t^\tau \underset{n}{\omega} = H(Z_1, \ldots, Z_n) + \int_{P_\tau}^{P_0} U^\tau (s^\tau \underset{n}{\omega} - t^\tau \underset{1}{\omega}). \tag{4.8}$$

Nach (2.10) verschwindet das letzte Integral und wir erhalten

$$U^\tau(P_0) = \frac{1}{t^\tau(P_0)} H(Z_1, \ldots, Z_n)_{|\alpha}^{n}, \qquad \tau = 1, \ldots, n-1. \tag{4.9}$$

Setzen wir jetzt $\tau = 2, \ldots, n$ und erklären wir $\overline{Z}_\tau$ als Lösungen des verallgemeinerten C-Problems (2.9b) mit

$$\begin{cases} \overline{Z}_\tau = 1, \quad \overline{Z}_\mu = 0, \quad \mu = 2, \ldots, n, \quad \mu \neq \tau \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_1, \\ \overline{Z}_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, n-1 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_n, \\ Z_\tau \text{ macht auf } \mathfrak{c}_\tau \text{ einen Sprung (3.7) der Höhe 1,} \end{cases} \tag{4.10}$$

so finden wir entsprechend

$$U^\tau(P_0) = \frac{1}{s^\tau(P_0)} H(\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n)_{|\frac{1}{\alpha}}, \qquad \tau = 2, \ldots, n. \tag{4.11}$$

Damit sind explizite Auflösungsformeln für alle U^τ gewonnen. Sie enthalten die Auflösungsformeln von E. HOLMGREEN [8] für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Für Auflösungsformeln ähnlichen Charakters für partielle Differentialgleichungen n-ter Ordnung vergleiche man E. HOLMGREEN [7] und F. RELLICH [11]. Man beachte, daß wir stets nur *ausgezeichnete* C-Probleme verwendet haben. Damit sind auch sofort explizite Auflösungsformeln für das A-Problem (1.1) aufgefunden.

3. Die Riemannsche Methode. Die in Nr. 2 erzielten Auflösungsformeln wollen wir nicht als eine Verallgemeinerung der klassischen Riemannschen Methode bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ansehen, da eigentlich nur die Auflösung nach Integralausdrücken über U^τ gelingt, und U^τ nur durch Differentiationsprozesse gewonnen wird. Wir geben jetzt eine *echte* Verallgemeinerung.

$U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien wieder Lösungen des A-Problems (2.1) mit $U^\tau = \Psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$. In Fig. 1 werden zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_\varrho$, $\mathfrak{c}_\sigma$ $(\varrho < \sigma)$ beliebig ausgewählt. Nach getroffener Wahl sind ϱ, σ *feste* Indizes. $\overset{\gamma}{Z}_\tau \in \mathfrak{C}^1$ in $\overset{\mu}{\mathfrak{A}}(P_0)$, $\gamma = 2, \ldots, n-1$, $\mu = 1, \ldots, n-1$ seien Lösungen eines noch festzulegenden verallgemeinerten C-Problems von (2.9b). Die längs der Innencharakteristiken auftretenden Sprünge von $\overset{\gamma}{Z}_\tau$ werden analog zu (3.7) mit $\overset{\gamma}{S}_\tau$ bezeichnet. Den oberen Index in $\overset{\gamma}{Z}_\tau$ werden wir im allgemeinen fortlassen. Der Integralsatz (2.7) wird dann

$$\left\{ \sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \int_{P_1}^{P_0} Z_\tau U^\tau \left(t^\tau \omega_\varrho - s^\tau \omega_\sigma\right) + \int_{P_n}^{P_0} Z_\tau U^\tau \left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) + \right.\right. \tag{4.12}$$
$$\left.\left. + \sum_{\gamma=2}^{n-1} \int_{P_\gamma}^{P_0} \overset{\gamma}{S}_\tau U^\tau \left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \right\} = H(Z_1, \ldots, Z_n),$$

$$H(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} Z_\tau C^\tau [\omega_\varrho, \omega_\sigma] + \int_{P_1}^{P_n} Z_\tau \Psi^\tau \left(t^\tau \omega_\varrho - s^\tau \omega_\sigma\right) \right\}, \tag{4.13}$$

wobei natürlich die Integrale in H wegen der Unstetigkeiten von Z_τ in Teilintegrale aufgespalten werden müssen. Nach (3.7) ist

$$\overset{\gamma}{S}_\tau = \overset{\gamma-1}{Z}_\tau - \overset{\gamma}{Z}_\tau, \quad \gamma = 2, \ldots, n-1. \tag{4.14}$$

Wir setzen ferner

$$\overset{1}{S}_\tau = -Z_\tau \text{ auf } \mathfrak{c}_1, \quad \overset{n}{S}_\tau = Z_\tau \text{ auf } \mathfrak{c}_n. \tag{4.15}$$

Dann erscheint (4.12) in der Form

$$\sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \sum_{\gamma=1}^{n} \int_{P_\gamma}^{P_0} \overset{\gamma}{S}_\tau U^\tau \left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \right\} = H(Z_1, \ldots, Z_n), \tag{4.16}$$

wobei die Summe wegen der Relation (2.10) nur über die Glieder mit $\gamma \neq \tau$ zu erstrecken ist. Wir denken uns die n^2 Größen $\overset{\gamma}{S}_\tau$ in ein quadratisches Schema angeordnet mit γ als Zeilenindex und setzen alle $\overset{\gamma}{S}_\tau$ Null sofern sie nicht in der Hauptdiagonalen oder in der ϱ-ten Zeile stehen:

$$\overset{\gamma}{S}_\tau = 0 \quad \text{falls} \quad \gamma \neq \tau \quad \text{und} \quad \gamma \neq \varrho. \tag{4.17}$$

Dies sind $(n-1)^2$ Forderungen. Dann reduziert sich (4.16) auf

$$-\sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho}}^{n} \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{S}_\tau U^\tau t^\tau \omega_\varrho = H(Z_1, \ldots, Z_n) \tag{4.18}$$

wegen $\omega_\sigma = 0$ auf $\mathfrak{c}_\varrho$. Wir betrachten jetzt die ϱ-te Gleichung in (2.1). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß es einen *festen* Index $\varepsilon \neq \varrho$ so gibt, daß $A^\varrho_\varepsilon \not\equiv 0$ ist. — Wäre dies nicht der Fall, so könnte $U^\varrho(P_0)$ aus der ϱ-tenGleichung gemäß § 3,1 berechnet werden, und zwar ohne Differentiationsprozesse. Die Auflösungsformel für $U^\varrho(P_0)$ wäre damit im Sinne von RIEMANN geliefert und die Riemannsche Methode nur noch für ein System mit $(n-1)$ Unbekannten aufzufinden. Für dieses System sind dann entweder unsere Überlegungen wieder verwendbar oder es reduziert sich auf ein System mit $(n-2)$ Unbekannten usw. — Die ϱ-te Gl. (2.1) wird dann

$$A^\varrho_\varepsilon U^\varepsilon = U^\varrho_{|\alpha} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \varepsilon}}^{n} A^\varrho_j U^j - C^\varrho. \tag{4.19}$$

Wegen eventueller Nullstellen von A^ϱ_ε ist ein kleiner Kunstgriff nötig (vgl. [4], S. 344). Wir setzen

$$\overset{\varrho}{S}_\varepsilon = A^\varrho_\varepsilon \overset{\varrho}{T}_\varepsilon \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_\varrho \tag{4.20}$$

und erhalten für (4.18)

$$-\sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho, \varepsilon}}^{n} \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{S}_\tau U^\tau t^\tau \omega_\varrho - \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{T}_\varepsilon A^\varrho_\varepsilon U^\varepsilon t^\varepsilon \omega_\varrho = H. \tag{4.21}$$

Im vorletzten Glied verwenden wir (4.19) und erhalten für (4.21)

$$-\int_{P_\varrho}^{P_0} \Big\{ \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon (U^\varrho_{|\alpha} - A^\varrho_\varrho U^\varrho) - \sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho, \varepsilon}}^{n} U^\tau (\overset{\varrho}{S}_\tau t^\tau - \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon A^\varrho_\tau) - \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon C^\varrho \Big\} \omega_\varrho = H. \tag{4.22}$$

Nun ist im ersten Glied partielle Integration möglich und das Weitere verläuft in Analogie zu RIEMANN. Durch

$$(\overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon)_{|\alpha} + A^\varrho_\varrho \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_\varrho, \qquad \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon \big|_{P_0} = -1 \tag{4.23}$$

ist $\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}$ und damit gemäß (4.20) $\overset{\varrho}{S}_{\varepsilon}$ auf $\mathfrak{c}_{\varrho}$ eindeutig festgelegt. Ferner wird verlangt

$$A^{\varrho}_{\tau}\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}t^{\varepsilon}=\overset{\varrho}{S}_{\tau}t^{\tau} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_{\varrho} \quad \text{für} \quad \tau \neq \varrho, \varepsilon. \tag{4.24}$$

Damit sind alle $\overset{\varrho}{S}_{\tau}$ außerhalb der Hauptdiagonalen eindeutig festgelegt. Durch die n Verträglichkeitsbedingungen (3.8) für Z_{τ} werden die $\overset{\tau}{S}_{\tau}$, $\tau=1,\ldots,n$ im Punkte P_0 eindeutig festgelegt. Somit ist für Z_{τ} in der Tat ein ausgezeichnetes verallgemeinertes C-Problem festgelegt worden. Aus (4.22) folgt nun sofort

$$\overset{\varrho}{U}(P_0)=H(Z_1,\ldots,Z_n)-\int_{P_{\varrho}}^{P_0}\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}t^{\varepsilon}C^{\varrho}\underset{\varrho}{\omega}-\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}\Psi^{\varrho}t^{\varepsilon}\Big|P_{\varrho}, \tag{4.25}$$

gültig für $\varrho=1,\ldots,n-1$. Ganz entsprechend findet man eine Auflösungsformel für $U^{\sigma}(P_0)$ für $\sigma=2,\ldots,n$. Durch arithmetische Mittelbildung können die Auflösungsformeln noch symmetrisch im Aufbau gemacht werden. Gleichzeitig ist auch eine echte Verallgemeinerung der Riemannschen Methode für das A-Problem (1.1) aufgefunden, da nur ausgezeichnete C-Probleme benutzt worden sind.

Literatur

[1] Blaschke, W., u. G. Bol: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [2] Cartan, E.: Les systèmes differéntiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris 1945. — [3] Courant, R., and K. O. Friedrichs: Supersonic flow and shock waves. New York 1948. — [4] Haack, W., u. G. Hellwig: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. I. Math. Z. **53**, 244–266 (1950); II. Math. Z. **53**, 340–356 (1950). — [5] Haack, W.: Elementare Differentialgeometrie. Basel 1955. — [6] Hellwig, G.: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. Diss. der Techn. Universität Berlin-Charlottenburg 1951. — [7] Holmgreen, E.: Sur l'extension de la méthode d'intègration de Riemann. Ark. Mat., Astr. och Fysik **1**, 317–326 (1904). — [8] Holmgreen, E.: Sur les systemes lineares aux dérivées partielles du premier ordre. Ark. Mat., Astr. och Fysik **6**, Nr. 2 (1911). — [9] Lax, P.: The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. of Math. Studies, Nr. 33, Princeton 1954. — [10] Petrowski, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Leipzig 1955. — [11] Rellich, F.: Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen. Math. Ann. **103**, 249–278 (1930).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 26. März 1957)

RAGAB, F. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 338/339 (1958)

Some Formulae for the Product of Bessel and Legendre Functions

By
F. M. RAGAB

Introduction. The basic formula to be proved is

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma} E\left\{p;\alpha_r:q;\varrho_t:\frac{z}{1+\lambda}\right\}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta;\\ \gamma\end{matrix}-\lambda\right)d\lambda\\ &\quad=\Gamma(\gamma)\,\frac{\sin\pi\sigma\sin\pi(\alpha+\beta-\gamma+\sigma)}{\sin\pi(\alpha-\gamma+\sigma)\sin\pi(\beta-\gamma+\sigma)}\times\\ &\qquad\times E\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\ 1-\sigma,\ 1-\alpha-\beta+\gamma-\sigma:z\\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q,\ 1-\alpha+\gamma-\sigma,\ 1-\beta+\gamma-\sigma\end{matrix}\right)+\\ &\qquad+\sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi\beta}{\sin\pi(\gamma-\alpha-\sigma)\sin\pi(\beta-\alpha)}\,\Gamma(\gamma)\,z^{-(\alpha-\gamma+\sigma)}\times\right.\\ &\qquad\left.\times E\left(\begin{matrix}\alpha_1+\alpha-\gamma+\sigma,\ldots,\alpha_p+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\beta:z\\ \varrho_1+\alpha-\gamma+\sigma,\ldots,\varrho_q+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\beta\end{matrix}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

where $R(\gamma)>0$, $R(\alpha-\gamma+\sigma+\alpha_r)>0$, $R(\beta-\gamma+\sigma+\alpha_r)>0$ $r=1,2,3,\ldots,p$, and $p\geqq q+1$. For other values of p and q, the formula holds if the integral converges. In (1), z is taken for simplicity to be real and positive and $\sum_{\alpha,\beta}$ denotes that to the expression following it the corresponding expression with α,β interchanged is to be added. For the definitions and properties of the E-functions the reader is referred to [1] p. 352. Integrals involving the product of Legendre and Bessel functions are deduced from (1) by substituting for the hypergeometric and E-functions from the following formulae respectively

$$(2)\qquad P_n^m(1+2\lambda)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\{\lambda(1+\lambda)\}^{-\frac{1}{2}m}F\left(\begin{matrix}-m-n,\ n-m+1;\\ 1-m\end{matrix}-\lambda\right)$$

$$(3)\qquad \cos\nu\pi\,E\left(\frac{1}{2}+\nu,\frac{1}{2}-\nu::\frac{2z}{1+\lambda}\right)=\left(\frac{2\pi z}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)K_\nu\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)$$

and

$$(4)\qquad E\left(\nu+1:\frac{z}{1+\lambda}\right)=\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}\nu}I_\nu\left\{2\sqrt{\left(\frac{1+\lambda}{z}\right)}\right\}$$

which are to be found in [1] pp. 262, 351 and 414 respectively. The following formulae are required in the proof of (1):

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma}E\{p;\alpha_r:q;\varrho_t:z(1+\lambda)\}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta;\\ \gamma\end{matrix}-\lambda\right)d\lambda\\ &\qquad=\Gamma(\gamma)\,E\left(\begin{matrix}p;\alpha_r,\alpha-\gamma+\sigma,\beta-\gamma+\sigma:z\\ q;\varrho_t,\sigma,\alpha+\beta-\gamma+\sigma\end{matrix}\right)\end{aligned}\right.$$

where $R(\gamma)>0$, $R(\alpha-\gamma+\sigma)>0$, $R(\beta-\gamma+\sigma)>0$, $R(z)>0$ see [2] p. 133 formula (7).

If $p \geqq q+1$,

$$(6)\quad \begin{cases} E(p;\alpha_r:q;\varrho_t:z) = \pi^{p-q-1}\sum_{r=1}^{p}\prod_{t=1}^{q}\sin\{(\varrho_t-\alpha_r)\pi\}\left\{\prod_{t=1}^{p}{}'\sin(\alpha_t-\alpha_r)\pi\right\}^{-1}\times \\ \qquad \times z^{\alpha_r}E\left\{\begin{matrix}\alpha_r,\ \alpha_r-\varrho_1+1,\ \ldots,\ \alpha_r-\varrho_q+1 \\ \alpha_r-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \alpha_r-\alpha_p+1\end{matrix} : \frac{e^{\pm i\pi(p-q-1)}}{z}\right\} \end{cases}$$

([1] pp. 352, 353 formulae (21), (22), (33)).

Proof of the formula. Consider the special case of (1) with $p=1$, $q=0$; then the left hand side becomes

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma}E\left\{\alpha_1 :: \frac{z}{1+\lambda}\right\}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta; \\ \gamma\end{matrix} -\lambda\right)d\lambda \\ &\quad = z^{-\alpha_1}\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\alpha_1-\sigma}E\left\{a_1 :: \frac{1+\lambda}{z}\right\}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta; \\ \gamma\end{matrix} -\lambda\right)d\lambda \\ &\quad = z^{-\alpha_1}\Gamma(\gamma)\,E\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha-\gamma+\alpha_1+\sigma,\ \beta-\gamma+\alpha_1+\sigma : 1/z \\ \alpha+\beta-\gamma+\alpha_1+\sigma,\ \alpha_1+\sigma\end{matrix}\right) \end{aligned}$$

by (5). Here expand the last E-function by means of (6) and so obtain (1) with the special case $p=1$, $q=0$. The general case can then be deduced in the usual way (see [3] p. 193).

Particular case: In (1) take $p=2$, $q=0$, $\alpha_1=\frac{1}{2}+\nu$, $\alpha_2=\frac{1}{2}-\nu$, $\alpha=-m-n$, $\beta=n-m+1$, $\gamma=1-m$, write $2z$ for z; then apply (2) and (3) and so obtain the following result:

$$(7)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}m}(1+\lambda)^{\frac{1}{2}m-\sigma-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)K_\nu\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)P_n^m(1+2\lambda)\,d\lambda \\ = \frac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}}\cdot\frac{\sin(\pi\sigma)\sin\pi(\sigma-m)}{\sin\pi(\sigma-n)\sin\pi(n+\sigma)}E\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ 1-\sigma,\ 1+m-2\sigma \\ 2+n-\sigma,\ 1-n-\sigma\end{matrix} : 2z\right\} + \\ \quad + \frac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}}\cdot\frac{\sin(\pi n\sin\pi(m-n)}{\sin\pi(\sigma-n)\sin(2n\pi)}(2z)^{-(-n-1+\sigma)}\times \\ \quad \times E\left\{\begin{matrix}\nu-\frac{1}{2}-n+\sigma,\ -\nu-\frac{1}{2}-n+\sigma,\ -n,\ m-n \\ -n+\sigma,\ -2n\end{matrix} : 2z\right\} + \\ \quad + \frac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}}\cdot\frac{\sin(\pi n)\sin\pi(m+n)}{\sin\pi(n+\sigma)\sin\pi(2n+1)}(2z)^{-(n+\sigma)}\times \\ \quad \times E\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}+\nu+n+\sigma,\ \frac{1}{2}-\nu+n+\sigma,\ 1+n,\ 1+m+n \\ 1+n+\sigma,\ 2+2n\end{matrix} : 2z\right\} \end{cases}$$

where $R(z)>0$, $R(1-m)>0$, $R(-\frac{1}{2}-n+\sigma\pm\nu)>0$.

References

[1] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable, 4th ed. Glasgow 1954. — [2] Rathie, C. B.: Some results involving hypergeometric and E-functions. Proc. Glasgow Math. Assoc. **2**, 132–138 (1955). — [3] Ragab, F. M.: Integrals of E-functions expressed in terms of E-functions. Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, 192–195 (1953).

Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. (U.S.A.) and
Faculty of Science, Ein Shams University, Abbassia, Cairo (Egypt)

(Eingegangen am 21. Mai 1957)

Suschowk, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 340–361 (1958)

Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung, Tschebyscheffsche Polynome und Legendresche Funktionen 2. Art

Von
Dietrich Suschowk

§ 1. Einleitung und Zusammenfassung

Fragen der Hochgeschwindigkeitsaerodynamik führen zu der Aufgabe, Lösungen $v(t,x,y)$ der Wellengleichung

$$\alpha^2 v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} = 0 \tag{1}$$

zu finden, die samt ihren ersten partiellen Ableitungen in den Punkten des charakteristischen Strahlenhalbkegels

$$t^2 - \alpha^2(x^2+y^2) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

verschwinden, im Inneren dieses Kegels, d.h. für Punkte (t,x,y) mit

$$t^2 - \alpha^2(x^2+y^2) > 0, \qquad t > 0 \tag{2'}$$

jedoch nicht identisch Null sind. Nach dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung (vgl. [*1*], S. 380) können Lösungen von (1) mit dieser Eigenschaft nicht in allen inneren Punkten von (2) der Wellengleichung genügen. Deshalb besitzen die im folgenden angegebenen Lösungen dieser Aufgabe im Inneren von (2) Singularitäten; und zwar sind es die Punkte der „Achse" $x^2+y^2=0$ von (2), in denen die Lösungsfunktionen nicht differentiierbar sind. Diese Funktionen scheinen bisher nicht eingehender untersucht worden zu sein (vgl. jedoch [*1*], S. 167–169 und S. 403–408).

Wir werden im folgenden zunächst für jede der aus (1) nach Einführung von Zylinderkoordinaten

$$x = r\sin\omega, \qquad y = r\cos\omega \qquad (r>0,\ 0\leq\omega<2\pi)$$

und durch den Separationsansatz

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t,r)\cdot(a_k\cos k\omega + b_k\sin k\omega) \sim u(t,r,\omega) := v(t, r\sin\omega, r\cos\omega) \tag{3}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$\Delta_k u^{(k)} := \alpha^2 u^{(k)}_{tt} - u^{(k)}_{rr} - \frac{1}{r}u^{(k)}_r + \frac{k^2}{r^2}u^{(k)} = 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

eine noch von einer weitgehend willkürlichen Funktion f_k abhängende Lösung angeben, welche die Anfangsbedingungen

$$(5)\qquad \begin{cases} u^{(k)} = 0, \quad u_t^{(k)} = 0, \quad u_r^{(k)} = 0 \\ \text{für Punkte } (t, r) \text{ mit } t^2 - \alpha^2 r^2 = 0, \quad t > 0,\ r > 0 \end{cases}$$

erfüllt. Die angekündigten Lösungen von (4) haben die Gestalt

$$(6)\qquad u^{(k)}(t, r) = \int_0^{t-\alpha r} \frac{T_k\left(\frac{t-\sigma}{\alpha r}\right)}{\sqrt{(t-\sigma)^2 - \alpha^2 r^2}} f_k(\sigma)\, d\sigma \qquad (\alpha > 0,\ t - \alpha r \geqq 0),$$

wo T_k das k-te Tschebyscheffsche Polynom bedeutet und f_k eine noch weitgehend beliebige Funktion ist, die zur Verfügung steht, um $u^{(k)}(t, r)$ bzw. $u(t, r, \omega)$ weiteren (insbesondere Rand-) Bedingungen anzupassen. Wir werden verschiedene Integraldarstellungen dieser Funktionen angeben, ihre Singularitäten untersuchen und zeigen, daß je endlich viele dieser Funktionen linear unabhängig sind. [Die unter (6) stehenden Funktionen sind in den Fällen $k = 0$ bzw. $k = 1$ in der Aerodynamik als „Quell-Senken-Lösungen" bzw. „Dipol-Lösungen" von (4) zu den Anfangsbedingungen (5) wohlbekannt, ohne daß sich allerdings die Tschebyscheffschen Polynome im Kern von (6) in diesen einfachen Fällen zu erkennen gegeben hätten; vgl. [5], S. 51, Formel (99) und (100).]

Unter der zusätzlichen Annahme, daß f_k im Intervall $[0, \Lambda[$ die Darstellung

$$(7)\qquad f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots$$

gestattet, erhält man für (6) die in dem Streifen

$$\{(t, r):\ 0 \leq t - \alpha r < \Lambda;\ t > 0,\ r > 0\}$$

konvergente Entwicklung

$$(8)\qquad u^{(k)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}(t^2 - \alpha^2 r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}\right),$$

in der Q_n^k die n, k-te Legendresche (Kugel-)Funktion 2. Art bedeutet (vgl. [4], S. 135ff.) und

$$c_{kn} = (-1)^k a_{kn} \frac{n!}{(n+k)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Die in (7) gestellte Forderung $f_k(0) = 0$ erweist sich als notwendige Bedingung für das Verschwinden von $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ auf der Charakteristik $t - \alpha r = 0$ von (4). Der Übergang von (6) zu (8) gelingt vermöge einer Integraldarstellung

der Legendreschen Funktionen 2. Art, welche diese Funktionen mit den Tschebyscheffschen Funktionen in Beziehung setzt. Diese Relation wird für komplexe Indizes angegeben. Wir gehen danach auf die Frage nach der Konvergenz der in (3) stehenden formalen Entwicklung ein. Es zeigt sich, daß die Forderung nach der Konvergenz dieser Entwicklung scharfe Einschränkungen für die „Dichte"-Funktionen f_k, ihre „Größe" mit wachsendem k betreffend, nach sich zieht. Schließlich beweisen wir die Existenz von Lösungen der eingangs gestellten Aufgabe auch für den Fall, in dem unendlich viele (nicht identisch verschwindende) $u^{(k)}$ auftreten.

§ 2. Die Lösungen des Anfangswertproblems (4), (5)

Da durch eine einfache Maßstabsänderung der t-Koordinate in allen vorstehenden Ausdrücken ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit α zu 1 gemacht werden kann, nehmen wir fortan $\alpha = 1$. Weiterhin wollen wir die Indizierung der f_k vorerst unterdrücken.

Die im folgenden an (6) auszuführenden Differentiationen lassen eine Umformung des dort auftretenden Integrals angebracht erscheinen. Nimmt man die Substitution $t - \sigma = r\tau$ vor, so geht (6) über in

$$(9) \qquad u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t - r\tau)\, d\tau \qquad \left(\frac{t}{r} \gtrsim 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Von dieser Darstellung für $u^{(k)}$ ausgehend, beweisen wir den

Satz 1. *Es sei f nicht identisch null, zweimal differentiierbar und f'' über jedes endliche Intervall im Riemannschen Sinne (eigentlich) integrierbar sowie $f(0) = 0$. Ferner sei*

$$T_k(\tau) = \frac{1}{2}\left[(\tau + \sqrt{\tau^2-1})^k + (\tau - \sqrt{\tau^2-1})^k\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

das k-te Tschebyscheffsche Polynom. Dann ist, wie f im übrigen auch gewählt sein mag, jede der Funktionen (6) *bzw.* (9) *für $\{(t,r): t - r \gtrsim 0, r > 0\}$ eine Lösung der Gl.* (4), *welche den Anfangsbedingungen* (5) *genügt.*

Beweis. Durch Differentiation von (9) erhalten wir

$$(10a) \qquad u_t^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t - r\tau)\, d\tau + \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f(0)$$

und

$$(10b) \qquad u_r^{(k)}(t,r) = -\int_1^{t/r} \frac{\tau\, T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t - r\tau)\, d\tau - \frac{t}{r} \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f(0).$$

Wegen der Voraussetzung $f(0)=0$ verschwinden die integralfreien Summanden in (10a) und (10b). Da wir jedoch hernach vorübergehend den Fall $f(0)\neq 0$ zu betrachten haben, sind diese Glieder hier aufgenommen. Unter Berücksichtigung von $f(0)=0$ liefert die nochmalige Differentiation von (10a) und (10b)

$$u_{tt}^{(k)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f''(t-r\tau)\,d\tau+\frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}f'(0) \tag{10c}$$

und

$$u_{rr}^{(k)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f''(t-r\tau)\,d\tau+\left(\frac{t}{r}\right)^2\frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}f'(0). \tag{10d}$$

Demnach erhält man

$$\Delta_k u^{(k)}=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[f''(t-r\tau)-\tau^2 f''(t-r\tau)+\frac{\tau}{r}f'(t-r\tau)+\frac{k^2}{r^2}f(t-r\tau)\right]d\tau-$$
$$-\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f'(0)$$

oder

$$r^2\Delta_k u^{(k)}=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)r^2 f''(t-r\tau)+\tau r f'(t-r\tau)+k^2 f(t-r\tau)\right]d\tau-$$
$$-\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f'(0).$$

Wegen $r f'(t-r\tau)=-f_\tau(t-r\tau)$ geht die letzte Gleichung über in

$$\left.\begin{aligned} r^2\Delta_k u^{(k)}=&\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)f_{\tau\tau}(t-r\tau)-\tau f_\tau(t-r\tau)+k^2 f(t-r\tau)\right]d\tau+\\ &+\frac{1}{r}\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f_\tau(0).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In den eckigen Klammern steht der lineare Differentialausdruck, der durch das k-te Tschebyscheffsche Polynom annulliert wird. Die Tschebyscheffsche Differentialgleichung ist nicht selbstadjungiert, jedoch hat wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)f_{\tau\tau}-\tau f_\tau\right]=-\left(\sqrt{\tau^2-1}\,f_\tau\right)_\tau$$

der Differentialausdruck

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{(\tau^2-1}\,f_\tau\right)-\frac{k^2}{\sqrt{\tau^2-1}}f$$

diese Eigenschaft. Damit folgt aus (11) durch Anwendung der Lagrangeschen Identität (vgl. [3], S. 281) und unter Beachtung von $f(0)=0$

$$
\begin{aligned}
r^2 \Delta_k u^{(k)} &= \int_1^{t/r} T_k(\tau) \left[\frac{k^2}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t-r\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{\tau^2-1}\, f_\tau(t-r\tau) \right) \right] d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= -\sqrt{\tau^2-1} \left(T_k(\tau)\, f_\tau(t-r\tau) - T_k'(\tau)\, f(t-r\tau) \right) \Big|_{\tau=1}^{\tau=t/r} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= -\frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist zunächst bewiesen, daß die Funktionen (6) bzw. (9) der Gl. (4) genügen. Auch die Anfangsbedingungen sind erfüllt, wie die folgenden einfachen Abschätzungen zeigen: Da f'' über jedes endliche Intervall (eigentlich) Riemann-integrierbar ist, so sind f und f' in jedem endlichen Intervall beschränkt. Es seien M bzw. M' Schranken für $|f|$ bzw. $|f'|$ in einem beliebig aber fest gewählten solchen Intervall. Dann ist

$$
\left\{
\begin{aligned}
|u^{(k)}| &= \left| \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t-r\tau)\, d\tau \right| \leq M\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \int_1^{t/r} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \\
&= M\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \log\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1} \right) \\
|u_t^{(k)}| &= \left| \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau \right| \leq M'\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \log\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1} \right) \\
|u_r^{(k)}| &= \left| \int_1^{t/r} \frac{\tau\, T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau \right| \leq M'\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \int_1^{t/r} \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \\
&= \frac{M'}{r}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \sqrt{t^2-r^2}.
\end{aligned}
\right. \tag{12}
$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichungen streben für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ nach Null. Also ist für $t=r>0$

$$
u^{(k)} = 0, \qquad u_t^{(k)} = 0, \qquad u_r^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),
$$

d.h. die Anfangsbedingungen (5) sind erfüllt (und zwar werden die Anfangswerte für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ stetig angenommen). Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen uns noch davon überzeugen, daß die in Satz 1 genannte Voraussetzung $f(0)=0$ für die Gültigkeit des Satzes notwendig ist. Das kann unmittelbar aus (10a) bzw. (10b) abgelesen werden: Nach den beiden letzten unter (12) stehenden Abschätzungen verschwinden für $t=r$ die Integrale in (10a) und (10b), während im Falle $f(0)\neq 0$ die integralfreien Summanden für $\frac{t}{r}\downarrow 1$ über alle Grenzen wachsen. Demnach sind, falls $f(0)\neq 0$ ist, die Anfangsbedingungen (5) für $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ nicht erfüllt. [Die Differentialgleichung (4) und die Anfangsbedingung $u^{(k)}=0$ für $t=r>0$ wird jedoch auch im Falle $f(0)\neq 0$ befriedigt.]

Wir geben nun eine weitere Integraldarstellung der unter (6) bzw. (9) stehenden Funktionen an, die wir später benutzen werden.

Satz 2. *Unter den im Satz 1 angegebenen Voraussetzungen gilt für* $\{(t,r)\colon t-r\geq 0, r>0\}$

$$u^{(0)}(t,r)=\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma-f(t-r)\cdot\log r$$

und $(k=1,2,\ldots)$

$$u^{(k)}(t,r)=\frac{1}{2k\,r^k}\int_0^{t-r}\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\,d\sigma-$$

$$-\frac{r^k}{2k}\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma.$$

Beweis. Offenbar ist für $k=0,1,2,\ldots$

$$(13)\quad \int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f(t-r\tau)\,d\tau=f(t)\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau-\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t}f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau.$$

Die Substitution $\tau=\cosh\sigma$ ergibt

$$\int_1^{\frac{t}{r}}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau=\int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|}T_k(\cosh\sigma)\,d\sigma.$$

Wegen

$$T_k(\tau)=\frac{1}{2}\left[\left(\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right)^k+\left(\tau-\sqrt{\tau^2-1}\right)^k\right]$$

ist

$$T_k(\cosh\sigma)=\frac{1}{2}\left[(\cosh\sigma+\sinh\sigma)^k+(\cosh\sigma-\sinh\sigma)^k\right]=\cosh k\sigma.$$

Daraus folgt

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\frac{t}{r}} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma\, d\sigma \\ \qquad = \begin{cases} \log\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1}\right) & (k=0) \\ \frac{1}{2k}\left[\frac{\left(t+\sqrt{t^2-r^2}\right)^k}{r^k} - \frac{r^k}{\left(t^2+\sqrt{t^2-r^2}\right)^k}\right] & (k=1,2,\ldots). \end{cases} \end{cases}$$

Für das zweite der auf der rechten Seite von (13) stehenden Integrale erhält man

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t-r} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

woraus sich nach (hier legitimer) Vertauschung der Integrationsreihenfolge in dem zweiten Integral der rechten Seite

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau = \left(f(t)-f(t-r)\right)\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau + \int_0^{t-r} f'(\sigma)\left(\int_{\frac{t-\sigma}{r}}^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau\right)d\sigma$$

ergibt. Führt man hier auf der rechten Seite den unter (14) stehenden Ausdruck für die Integrale über $T_k(\tau)/\sqrt{\tau^2-1}$ ein, so erhält man aus (13)

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,f(t-r\tau)\,d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma - \\ \qquad -f(t-r)\cdot\log r \qquad (k=0) \\ \frac{1}{2k}\left[\frac{1}{r^k}\displaystyle\int_0^{t-r}\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\,d\sigma - \right. \\ \left. \quad -r^k\displaystyle\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma\right] \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases}$$

Das ist die Behauptung.

Wir haben bereits eingangs darauf hingewiesen, daß die $u^{(k)}$ nicht in allen Punkten $(t,r)\in\{(t,r): t-r\geq 0, r\geq 0\}$ der Gl. (4) genügen können. An Hand des Satzes 2 können wir hierzu die folgende genauere Aussage machen:

Satz 3. *Die Funktionen $u^{(k)}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ sind in keiner (einseitigen) Umgebung von $r=0$ beschränkt (insbesondere also für $r=0$ nicht differentiierbar). Es gilt dort mit beliebigem festem $t=t'>0$*

$$u^{(0)}(t',r)=O(\log r) \qquad \text{falls } f(t')\neq 0$$

und

$$u^{(k)}(t',r)=O(r^{-k}) \quad (k=1,2,\ldots) \qquad \text{falls } \int_0^{t'}(t'-\sigma)^{k-1}f(\sigma)\,d\sigma\neq 0.$$

Beweis. 1) Es sei $k=0$. In

$$u^{(0)}(t,r)=\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma - f(t-r)\log r$$

bleibt wegen

$$\left|\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma\right| \leq \log\left(t+\sqrt{t^2-r^2}\right)\cdot\int_0^{t-r}|f'(\sigma)|\,d\sigma$$

der erste Summand bei festem t für $r\downarrow 0$ beschränkt. Der zweite Summand wächst für $f(t)\neq 0$[1]) mit $r\downarrow 0$ wie $\log r$ über alle Grenzen.

2) Es sei $k=1,2,\ldots$. In

$$u^{(k)}(t,r)=\frac{1}{2kr^k}\int_0^{t-r}\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\,d\sigma -$$

$$-\frac{r^k}{2k}\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma$$

bleibt bei festem $t=t'$ für $r\downarrow 0$ der zweite Summand endlich, denn $t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}$ ist für $0\leq\sigma\leq t-r$ positiv und daher gilt zunächst nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $0<\theta<1$

$$I(t,r):=\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma = f'\left(\theta\cdot(t-r)\right)\int_0^{t-r}\frac{d\sigma}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}.$$

Weiterhin ist wegen $r\leq t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\leq t+\sqrt{t^2-r^2}$

$$|I(t,r)|\leq|f'\left(\theta\cdot(t-r)\right)|\int_0^{t-r}\frac{d\sigma}{r^k}=\frac{t-r}{r^k}\,|f'\left(\theta\cdot(t-r)\right)|.$$

---

[1]) f ist stetig und wegen der im Satz 1 eingeführten Voraussetzung $f\not\equiv 0$ gibt es Werte t mit $f(t)\neq 0$.

Demnach ist

$$\left| \frac{r^k}{2k} \int_0^{t-r} \frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k} d\sigma \right| \leq \frac{t-r}{2k} |f'(\theta \cdot (t-r))|.$$

Die rechte Seite bleibt also für $r \downarrow 0$ beschränkt.

In

$$\tilde{I}(t,r) := \int_0^{t-r} \left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\, d\sigma$$

kann man den Grenzübergang $r \downarrow 0$ direkt vornehmen. Man erhält

$$\tilde{I}(t,0) = 2^k \int_0^t (t-\sigma)^k f'(\sigma)\, d\sigma,$$

also bis auf einen Faktor das k-te iterierte Integral von f, welches bei geeigneter Wahl von t einen endlichen und von Null verschiedenen Wert annimmt. Daher wächst $u^{(k)}(t,r)$ (k fest) bei geeignet gewählten festen t für $r \downarrow 0$ wie r^{-k} über alle Grenzen. Satz 3 ist damit bewiesen.

Aus dem Satz 3 können wir eine Folgerung ziehen:

Satz 4. *Es sei I eine endliche Menge voneinander verschiedener natürlicher Zahlen mit möglichem Einschluß der Null. Ferner sei f_k mit $k \in I$ nicht identisch null, zweimal differentiierbar und f_k'' über jedes endliche Intervall im Riemannschen Sinne (eigentlich) integrierbar sowie $f_k(0) = 0$. Dann sind die Funktionen*

$$u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau$$

in dem Streifen $\{(t,r): t-r \geq 0, r>0\}$ linear unabhängig[2]).

Beweis. Gäbe es reelle Zahlen c_k so, daß

$$\sum_{k \in I} c_k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau = 0$$

für *alle* $(t,r) \in \{(t,r): t-r \geq 0, r>0\}$, und ist dann k' die größte der Zahlen $k \in I$ mit $c_k \neq 0$, so wäre

$$(15) \qquad \sum_{k \in I-\{k'\}} c_k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau = -c_{k'} \int_1^{t/r} \frac{T_{k'}(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_{k'}(t-r\tau)\, d\tau.$$

Nach Satz 3 zeigt die rechte Seite bei geeignetem festen t für $r \downarrow 0$ das Verhalten $O(r^{-k'})$, während die linke Seite dort höchstens das Verhalten $O(r^{-(k'-1)})$ bzw. $O(\log r)$ aufweisen kann, im Widerspruch zu der Gl. (15).

[2]) Man beachte, daß die f_k, von den angegebenen Voraussetzungen abgesehen, *beliebig* gewählt werden durften; insbesondere dürfen sie *einander gleich* sein.

§ 3. Die Darstellung der Lösungen des Anfangswertproblems (4), (5) durch Legendresche Funktionen 2. Art

Gestatten die Funktionen f_k (bzw. f) im Intervall $[0, \Lambda[$ die Darstellung

$$f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots,$$

so können die Lösungen der Aufgabe (4), (5) in Gestalt unendlicher Reihen, die nach Legendreschen Funktionen 2. Art fortschreiten, dargestellt werden. Auf dieses Resultat abzielend, beweisen wir zunächst den folgenden vorbereitenden Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Tschebyscheffschen Polynomen — oder allgemeiner den Tschębyscheffschen Funktionen — mit den Legendreschen Funktionen 2. Art herstellt.

Satz 5. *Es seien n und k nicht negative, ganze Zahlen. Q_n^k bezeichne die n, k-te Legendresche Funktion 2. Art. Dann ist für $(t, r) \in \{(t, r): t - r \geq 0, r > 0\}$*

$$(t^2 - r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau.$$

Beweis. Wir wählen in (9) speziell $f(\lambda) = \lambda^n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$u^{(k)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} f(t - r\tau)\, d\tau = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau. \tag{16}$$

Unterwirft man hier die unabhängigen Veränderlichen t und r der Substitution

$$t = \varrho\zeta, \qquad r = \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (\varrho > 0,\ \zeta > 1), \tag{17}$$

so erhält man eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Gebietes $\{(t, r): t - r > 0, r > 0\}$ der (t, r)-Ebene auf das Gebiet $\{\varrho > 0, \zeta > 1\}$ der (ϱ, ζ)-Ebene. [Es ist $\partial(t, r)/\partial(\varrho, \zeta) = \varrho \cdot (\zeta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$; die Eineindeutigkeit der durch (17) vermittelten Abbildung ist demnach für $\varrho = 0$ und $\zeta = 1$ (bzw. $t - r = 0$ und $r = 0$) gestört.] Führt man in (16) an Stelle von t und r die Größen ϱ und ζ ein und ersetzt die Integrationsveränderliche τ durch $\cosh\sigma$, so ergibt sich

$$u^{(k)}\left(\varrho\zeta, \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = \varrho^n \int_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cosh\sigma\right)^n \cosh k\sigma \, d\sigma.$$

Nun ist aber (vgl. [2], S. 259, Formel 118)

$$(-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cosh\sigma\right)^n \cosh k\sigma \, d\sigma = Q_n^k(\zeta).$$

Daraus ergibt sich, wenn man für ϱ und ζ wieder t und r einführt, $\cosh\sigma = \tau$ setzt und beachtet, daß $T_k(\cosh\sigma) = \cosh k\sigma$ ist,

$$(t^2 - r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau,$$

also die Behauptung aus Satz 5, denn in dem bisher ausgeschlossenen Fall $t = r > 0$ verschwinden die rechte und die linke Seite dieser Gleichung.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir das folgende Ergebnis an:

Satz 6. *Es sei μ beliebig komplex, ν komplex mit* $\operatorname{Re}(\nu+1)>0$ *und mit* $-\pi \leq \arg \sigma < \pi$

$$T_\mu(\sigma) = \tfrac{1}{2}\left[(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1})^\mu + (\sigma - \sqrt{\sigma^2-1})^\mu\right]$$

durch Beschränkung von $(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-1})^\mu$ auf seinen Hauptwert eindeutig erklärt. Ferner sei für komplexes ζ und reelles $t \geq -1$

$$\zeta - t = r e^{i\beta} \quad \text{mit} \quad -\pi < \beta < \pi,$$

wo β den Winkel bezeichnet, den die Gerade durch ζ und t mit der Richtung der positiven reellen Achse der ζ-Ebene einschließt. Endlich sei Z die von $+1$ über -1 längs der negativen reellen Achse nach ∞ aufgeschnittene ζ-Ebene. Dann ist für $\zeta \in Z$

$$Q_\nu^\mu(\zeta) = e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int\limits_{\mathfrak{C}(0,\,\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})} T_\mu\left(\frac{\zeta-\sigma}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\frac{\sigma^\nu}{\sqrt{\sigma^2-2\zeta\sigma+1}}\,d\sigma,$$

wo $\mathfrak{C}\left(0, \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)$ ein beliebiger, die Punkte 0 und $\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ verbindender Weg in der von den Punkten $\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$, $\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ und 0 nach ∞ aufgeschnittenen σ-Ebene ist.

Beweis. Das auf S. 349 angeführte Zitat besagt, daß bei geeigneter Wahl des Integrationsweges

$$(18)\qquad Q_\nu^\mu(\zeta) = e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\cosh\sigma\right)^\nu \cosh\mu\sigma\,d\sigma$$

ist. Wir beschränken $\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ auf seinen Hauptwert und wählen den Integrationsweg $\mathfrak{C}'$ so, daß er erstens ganz in dem Streifen

$$\Sigma := \{\sigma : -\infty < \operatorname{Re}(\sigma) < +\infty,\ 0 \leq \operatorname{Im}(\sigma) < 2\pi\}$$

verläuft, zweitens die Strecke $\{\sigma : \operatorname{Re}(\sigma) = 0,\ 0 \leq \operatorname{Im}(\sigma) < 2\pi\}$ nicht überschreitet und sie im Falle $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = 0$ (und zwar nur dann) in genau zwei Punkten trifft. Unter der Substitution

$$(19)\qquad S_1:\quad \cosh\sigma = \tau,\ \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}$$

geht Σ über in die bei -1 und $+1$ verzweigte zweiblättrige Riemannsche Fläche, auf der $\sqrt{\tau^2-1}$ eindeutig ist. Bei der getroffenen Wahl des Integrationsweges können wir uns auf die Betrachtung eines Blattes, also der τ-Ebene, beschränken. Schließen wir die Punkte $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = +1$, $\tau_3 = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$, $\tau_4 = \infty$ aus dieser Ebene aus und schneiden sie von den Punkten τ_j $(j = 1,2,3)$ nach ∞ auf, so ist nach Festlegung des arcus von τ und Beschränkung von

$(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu$ sowie $(\tau \pm \sqrt{\tau^2-1})^\mu$ auf ihre Hauptwerte der Integrand des aus (18) unter (19) hervorgehenden Integrals

$$\int_{S_1(\mathfrak{C}')} (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu T_\mu(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}$$

in der so aufgeschnittenen τ-Ebene T eindeutig und regulär. Unter (19) wird $\sigma = 0$ in $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{1}{2} \log \frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ in $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ abgebildet. Demnach ist für jeden die Punkte $\tau = 1$ und $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ verbindenden und in T verlaufenden Weg $\mathfrak{C}''$

$$e^{\mu\pi i} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}} (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu T_\mu(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} = Q_\nu^\mu(\zeta). \tag{20}$$

Die lineare Abbildung

$$S_2\colon \quad \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau = v, \qquad \frac{d\tau}{dv} = -\sqrt{\zeta^2-1} \tag{21}$$

überführt die singulären Stellen τ_j $(j = 1, 2, 3)$ der τ-Ebene bzw. in die Punkte $v_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$, $v_2 = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$, $v_3 = 0$, $v_4 = \infty$ der v-Ebene. Wir schließen diese Punkte aus der v-Ebene aus und legen wie zuvor von v_j $(j = 1, 2, 3)$ einen Schnitt nach ∞. Unter den gleichen Festsetzungen wie zuvor ist der Integrand des aus (20) unter (21) hervorgehenden Integrals

$$\int_{S_2(\mathfrak{C}'')} T_\mu\left(\frac{\zeta - v}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right) \frac{v^\nu}{\sqrt{v^2 - 2\zeta v + 1}}\, dv$$

in der so aufgeschnittenen v-Ebene Y eindeutig und regulär. Da unter (21) $\tau = 1$ in $v = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ und $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ in $v = 0$ übergeht, so ist mit $\zeta \in Z$

$$e^{\mu\pi i} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_{\mathfrak{C}(0,\,\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})} T_\mu\left(\frac{\zeta - v}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right) \frac{v^\nu}{\sqrt{v^2 - 2\zeta v + 1}}\, dv = Q_\nu^\mu(\zeta)$$

für jeden Weg, der $v = 0$ mit $v = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ verbindet und ganz in Y verläuft, was behauptet wurde.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 7. *Die (reelle) Funktion f_k besitze im Intervall $[0, \Lambda[$ die Entwicklung*

$$f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots$$

und es sei für $t - r \geqq 0$, $r > 0$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$u^{(k)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t - r\tau)\, d\tau.$$

Dann gestattet $u^{(k)}(t,r)$ *die in dem Streifen* $\{(t,r): 0 \leq t-r < \Lambda,\ r>0\}$ *konvergente Entwicklung*

$$u^{(k)}(t,r) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!}\, a_{kn}\,(t^2-r^2)^{n/2}\, Q_n^k\!\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\right).$$

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes ist es unzweckmäßig, von der Formel (9) auszugehen, da dort $u^{(k)}(t,r)$ durch ein uneigentliches Integral dargestellt wird, was bei einer im folgenden vorzunehmenden Vertauschung von Grenzübergängen lästig wäre. Wir nehmen daher in dem Integral aus Satz 7 die Substitution $\tau = \cosh\sigma$ vor und erhalten

$$u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\, f_k(t-r\tau)\, d\tau = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} f_k(t-r\cosh\sigma)\cosh k\sigma\, d\sigma.$$

Da $(f_k =) \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\lambda^n$ mit $\varepsilon>0$ in $[0, \Lambda-\varepsilon]$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch

$$\left(f_k(t-r\cosh\sigma) = \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(t-r\cosh\sigma)^n$$

bei beliebigem aber festem $(t,r) \in \{(t,r): 0 \leq t-r \leq \Lambda-\varepsilon,\ r>0\}$ gleichmäßig für alle Werte $\cosh\sigma$, für welche σ im Integrationsintervall $\left[0,\ \left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|\right]$ liegt. Deshalb können wir auf der rechten Seite der Gleichung

$$\int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot f_k(t-r\cosh\sigma)\, d\sigma = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(t-r\cosh\sigma)^n\, a\sigma$$

die Integration gliedweise ausführen und erhalten

$$u^{(k)}(t,r) = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot f_k(t-r\cosh\sigma)\, d\sigma$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} (t-r\cosh\sigma)^n \cosh k\sigma\, d\sigma,$$

oder nach Ausführung der Substitution $\cosh\sigma = \tau$

$$u^{(k)}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,(t-r\tau)^n\, d\tau. \tag{22}$$

Nach Satz 5 ist aber

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,(t-r\tau)^n\, d\tau = (-1)^k \frac{n!}{(n+k)!}\,(t^2-r^2)^{n/2}\, Q_n^k\!\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\right).$$

Setzt man den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung in (22) ein, so ergibt sich die für beliebige $(t, r) \in \{(t, r): 0 \leq t - r < \Lambda, r > 0\}$ konvergente Entwicklung

$$u^{(k)}(t, r) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} a_{kn} (t^2 - r^2)^{n/2} Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right),$$

deren Existenz in Satz 7 behauptet wurde[3]).

Wir schließen hier eine Bemerkung an: Hätte man die Aufgabe (4), (5) mittels des formalen — durch die Sätze 1 und 7 jedoch gerechtfertigten — Ansatzes

$$u^{(k)}\left(\varrho\,\zeta, \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} \varrho^n Q_n^k(\zeta)$$

zu lösen versucht, so hätte sich nach dem Vorstehenden

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} (t^2 - r^2)^{n/2} Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) \\ &= (-1)^k k! \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} b_{kn} (t - r\tau)^n d\tau \end{aligned}$$

ergeben. Setzt man $b_{kn} = c_{k, n+k}$, so ist dann mit $g_k(\lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} \lambda^n$ wegen

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} g_k(\lambda) \left(= g_k^{(k)}(\lambda)\right) = k! \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{k, n+k} \lambda^n:$$

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t, r) &= (-1)^k k! \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{k, n+k} (t - r\tau)^n d\tau \\ &= (-1)^k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} g_k^{(k)}(t - r\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

d.h. *die zu $u^{(k)}$ gehörigen Dichtefunktionen $f_k (= g_k^{(k)})$ stellen sich als k-te Ableitungen dar.*

§ 4. Zur Konvergenz der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t, r) \cdot (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega)$

Die Voraussetzungen über die in den Ausdrücken (6) bzw. (9) auftretenden Funktionen f_k bzw. f waren verhältnismäßig lose. Stellt man jedoch in dem Falle, in dem man Veranlassung hätte, unendlich viele nicht identisch verschwindende Funktionen $u^{(k)}$ zu betrachten, die Frage nach der Konvergenz

---

[3]) Wegen entsprechender Entwicklungen für $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ vgl. [6], S. 11, Formel (13), (14a), (14b). Um Übereinstimmung mit den hier benutzten Bezeichnungen zu erhalten, ist dort t für x und $u^{(k)}$ für $\psi^{(k)}$ zu lesen sowie $\alpha = 1$ zu setzen.

der Reihen

$$u(t,r,\omega) = u^{(0)}(t,r) + \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(t,r)\cos k\omega \quad [4]), \tag{23}$$

so zeigt sich, daß die f_k wesentlich schärferen Bedingungen genügen müssen. Bevor wir hierzu Aussagen machen, führen wir abermals neue Veränderliche ξ, η gemäß

$$\begin{cases} \dfrac{t}{r} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{r}\right)^2 - 1} = e^{\xi}, & t = \dfrac{\eta\cosh\xi}{\cosh\xi - 1} \\ t - r = \eta, & r = \dfrac{\eta}{\cosh\xi - 1} \end{cases} \tag{24}$$

ein, wodurch eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Gebietes $\{(t,r)\colon 0<t-r<\infty,\ 0<r<\infty\}$ der (t,r)-Ebene auf das Gebiet $\{(\xi,\eta)\colon 0<\xi<\infty,\ 0<\eta<\infty\}$ der (ξ,η)-Ebene erklärt ist. Mit

$$w^{(k)}(\xi,\eta) := u^{(k)}\left(\frac{\eta\cosh\xi}{\cosh\xi-1}, \frac{\eta}{\cosh\xi-1}\right)$$

ist dann

$$w^{(k)}(\xi,\eta) = \int_1^{\cosh\xi} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k\left(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}\cdot(\cosh\xi-\tau)\right) d\tau \qquad (\xi>0,\ \eta>0), \tag{25}$$

und die rechte Seite der Gl. (23) ist zu ersetzen durch

$$w^{(0)}(\xi,\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(\xi,\eta)\cos k\omega \qquad \left(\sim w(\xi,\eta,\omega)\right). \tag{23'}$$

Wir formulieren nunmehr den

Satz 8. *Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der mit dem Ausdruck* (25) *— in dem die Funktionen f_k die gleichen Forderungen zu erfüllen haben wie das f aus Satz 1 — gebildeten Reihe* (23') *bei festem $\xi=\xi'>0$, festem $\eta=\eta'>0$ und alle ω besteht in der Möglichkeit, zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $k=k'$ so aufzufinden, daß*

$$|f_k(\theta_k(\cosh\xi')\cdot\eta')| < \varepsilon\frac{k}{\sinh k\xi'}, \qquad (0<\theta_k<1)$$

für jedes $k\geq k'$ ausfällt. (Dann darf (23') *jedenfalls als — möglicherweise nicht für alle angegebenen Wertetripel (ξ,η,ω) konvergente — Fouriersche Reihe für eine Funktion $w(\xi,\eta,\omega)$ angesehen werden.)*

Beweis. Nach Satz 1 kann man für (23) schreiben

$$u(t,r,\omega) = \int_1^{t/r} \frac{f_0(t-r\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k\omega \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau.$$

[4]) Der einfacheren Schreibweise wegen beschränken wir uns hier und im folgenden auf die Betrachtung der cosinus-Reihe. Alle weiteren Überlegungen gelten ebenso für die sinus-Reihe und da unsere späteren Voraussetzungen die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (3) sichern, auch für die allgemeine Fourier-Reihe (3).

Da $T_k(\tau)/\sqrt{\tau^2-1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ für $\tau>1$ von positivem Vorzeichen und jedes der f_k stetig ist, so ergibt der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung — den wir auch für das nachfolgende uneigentliche Integral heranziehen können —

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau = f_k\left(\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau$$

mit $0<\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)<1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Unter Beachtung von (14) erhält man daraus

$$(26)\quad \begin{cases} u(t,r,\omega) \sim f_0\left(\theta_0\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\log\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{k} f_k\left(\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\cdot\left[\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)^k-\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)^{-k}\right]\cos k\omega\,. \end{cases}$$

Nach Einführung der unabhängigen Veränderlichen ξ, η gemäß (24) ergibt sich hieraus

$$(26')\quad \begin{cases} w(\xi,\eta,\omega) \sim f_0\left(\theta_0(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\cdot\xi + \\ \qquad +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} f_k\left(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\cdot\sinh k\xi\cdot\cos k\omega \quad (\xi\geq 0,\ \eta\geq 0)\,. \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der rechts stehenden Reihe — die wir als Fouriersche Reihe anzusehen haben — bei festem ξ und festem η ist

$$(27)\qquad \frac{1}{k} f_k\left(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\sinh k\xi \to 0 \qquad (k\to\infty)\,,$$

denn die Koeffizienten einer solchen Reihe bilden stets Nullfolgen. Die präzise Fassung dieser Bedingung ist in Satz 8 angegeben, der damit bewiesen ist.

Natürlich ist es sehr einfach, *irgendein* hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe (26′) anzugeben. Wir begnügen uns damit, die folgende Bedingung zu formulieren:

Satz 9. *Ist bei festen* $\xi=\xi'>0$ *und* $\eta=\eta'>0$ *für alle* $k\geq k'$ $(k'$ *fest)*

$$\max_{0\leq\eta\leq\eta'}|f_k(\eta)|\leq\frac{1}{k^{2+\delta}\sinh k\xi'} \qquad (\delta>0)\,,$$

so konvergiert die Reihe (26′) *für jedes* $(\xi,\eta)\in\{(\xi,\eta): 0\leq\xi\leq\xi',\ 0\leq\eta\leq\eta'\}$ *und alle* ω *absolut und gleichmäßig und stellt eine nach* ω *zweimal differentiierbare Funktion dar.*

Beweis. Da θ_k für jedes $k=0, 1, 2, \ldots$ im Inneren des Intervalls $[0, 1]$ liegt, so ist zunächst für $\eta\in[0,\eta']$

$$|f_k(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta)|\leq\max_{0\leq\eta\leq\eta'}|f(\eta)|\,.$$

Weiterhin wächst $\sinh k\xi$ monoton mit ξ, woraus für $\xi<\xi'$

$$\max_{0\leq\eta\leq\eta'}|f_k(\eta)|\sinh k\xi<\max_{0\leq\eta\leq\eta'}|f_k(\eta)|\sinh k\xi'$$

folgt. Ist nun für $k \geq k'$ und $\delta > 0$

$$\max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi' \leq \frac{1}{k^2+\delta},$$

so konvergiert nicht nur

$$F(\xi, \eta', \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \frac{\sinh k\xi}{k} \cdot \cos k\omega,$$

sondern auch

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F(\xi, \eta', \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi \cdot \sin k\omega$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} F(\xi, \eta', \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi \cos k\omega$$

für jedes $\xi \in [0, \xi']$ und alle ω absolut und gleichmäßig. Diese drei Reihen sind aber Majoranten für die Reihe (26′) und deren erste und zweite partielle Ableitung nach ω. Damit ist der Satz bewiesen.

Um behaupten zu können, daß wir in (26) bereits eine Lösung der eingangs formulierten Aufgabe vor uns haben, müssen wir jedoch die in Satz 9 angegebene Bedingung für f_k etwas verschärfen.

§ 5. Die Existenz nichttrivialer Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems von (1)

Die Existenz von Lösungen

$$u(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} f_k(t - r\tau)\, d\tau \tag{28}$$

unserer ursprünglichen Aufgabe ist bereits durch Satz 1 gesichert. Denn nehmen wir in (28) nur endlich viele der f_k als von null verschieden an, so treten für

$$\begin{cases} \Delta u := u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u_{\omega\omega} \\ \quad = \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \cos k\omega \cdot \left\{ \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \left[(1 - \tau^2) f_k''(t - r\tau) + \frac{\tau}{r} f_k'(t - r\tau) + \right. \right. \\ \qquad \left. \left. + \frac{k^2}{r^2} f_k(t - r\tau) \right] d\tau - \frac{1}{r^2} \sqrt{t^2 - r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_k'(0) \right\} \end{cases} \tag{29}$$

Konvergenzfragen nicht auf. Da nach dem Beweis des Satzes 1 jeder der Ausdrücke in den geschweiften Klammern aus (29) verschwindet, so annulliert

9272-68 24 A

$u(t, r, \omega)$ die linke Seite von (29). Ebenso sind die Anfangsbedingungen $u=0$, $u_t=0$, $u_r=0$, $u_\omega=0$ für $t=r>0$ erfüllt, was für u, u_t und u_r sofort aus Satz 1 und (28), für u_ω aus

$$u_\omega = -\sum_{k=1}^{\infty} k \sin k\omega \cdot u^{(k)}(t, r)$$

und Satz 1 folgt.

Wir beweisen jetzt ein entsprechendes Ergebnis für den Fall, in dem unendlich viele der f_k von null verschieden sind.

Satz 10. *Es sei f_k nicht identisch null und zweimal stetig differentiierbar. $f_k^{(l)}$ bezeichne die l-te Ableitung von f_k. Ferner gebe es reelle Zahlen $\xi'>0$ und $\eta'>0$ sowie eine natürliche Zahl k' so, daß bei beliebigem festem $\delta>0$*

$$\max_{0\le\eta\le\eta'} |f_k^{(l)}(\eta)| \le \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}\sinh(k+l)\xi'} \quad (l=0,1,2)$$

für jedes $k\ge k'$ ausfällt. Dann konvergiert (28) absolut und gleichmäßig für alle $(t, r)\in\{(t, r): 1\le\frac{t}{r}\le\cosh\xi', 0\le t-r\le\eta'\}$ und alle ω und stellt eine nicht identisch verschwindende Lösung der Aufgabe

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u_{\omega\omega} = 0$$

mit

$$u=0, \quad u_t=0, \quad u_r=0, \quad u_\omega=0 \quad \text{für} \quad t-r=0,\ r>0$$

dar. Falls für mindestens ein k $f_k'(0)\neq 0$ ist, bleiben u_{tt} und u_{rr} für $\frac{t}{r}\downarrow 1$ nicht beschränkt.

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß die Voraussetzungen aus Satz 10 die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (28) und der aus ihr durch gliedweise Differentiation hervorgehenden Reihen

$$u_r(t, r, \omega) = -\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{\tau T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau$$

$$u_{tt}(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \left(\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau + \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f_k'(0) \right)$$

$$u_{rr}(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \left(\int_1^{t/r} \frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau + \left(\frac{t}{r}\right)^2 \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f_k'(0) \right)$$

$$u_{\omega\omega}(t, r, \omega) = -\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos k\omega \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau,$$

9272-68 24 A

in denen f_k'' jetzt als stetig angenommen wird, sichern. Für die hierin auftretenden Integrale liefert der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung nach Ausführung der Substitution (24) und mit $0<\theta_k, \tilde{\theta}_k, \tilde{\tilde{\theta}}_k<1$ sowie $k=1, 2, \ldots$

$$
(30)\quad \begin{cases}
A_1 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = f_k\big(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\,\dfrac{\sinh k\xi}{k} \\
A_2 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{\tau\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{\tau\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = \dfrac{1}{2} f_k'\big(\tilde{\theta}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\left[\dfrac{\sinh(k-1)\xi}{k-1}+\dfrac{\sinh(k+1)\xi}{k+1}\right] \\
A_3 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{\tau^2\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{\tau^2\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = \dfrac{1}{4} f_k''\big(\tilde{\tilde{\theta}}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\left[\dfrac{\sinh(k-2)\xi}{k-2}+2\dfrac{\sinh k\xi}{k}+\dfrac{\sinh(k+2)\xi}{k+2}\right].
\end{cases}
$$

Demnach ist für $\xi \geqq 0$ und $k=1, 2, \ldots$

$$
|A_1| < |f_k\big(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)|\,\frac{\sinh k\xi}{k}
$$

$$
|A_2| < |f_k'\big(\tilde{\theta}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)|\,\frac{\sinh(k+1)\xi}{k+1}
$$

$$
|A_3| < |f_k''\big(\tilde{\tilde{\theta}}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)|\,\frac{\sinh(k+2)\xi}{k+2}.
$$

Gibt es nun reelle Zahlen $\xi'>0$ und $\eta'>0$ sowie eine natürliche Zahl k' so, daß bei beliebigem festem $\delta>0$ für jedes $k \geqq k'$

$$
(31)\qquad \max_{0\leq\eta\leq\eta'} |f_k^{(l)}(\eta)|\sinh(k+l)\xi' \leq \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}} \qquad (l=0, 1, 2)
$$

gilt, so konvergieren zunächst die (auf die Veränderlichen ξ, η umgeschriebenen) Reihen für u, u_r,

$$
u_t(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau
$$

und

$$
u_\omega(t, r, \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau
$$

absolut und gleichmäßig für $(\xi, \eta) \in \{(\xi, \eta): 0\leq\xi\leq\xi', 0\leq\eta\leq\eta'\}$ und alle ω, denn ihre Koeffizienten werden nach (30) und (31) durch die Glieder der

konvergenten Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}} \qquad (l=0,1)$$

majorisiert. Demnach konvergieren die Reihen für u, u_t, u_r und u_ω absolut und gleichmäßig für alle $(t,r) \in \left\{(t,r): 1 \leq \frac{t}{r} \leq \cosh \xi',\ 0 \leq t-r \leq \eta'\right\}$ und alle ω. Entsprechend wäre die absolute und gleichmäßige Konvergenz der *sämtlichen* zweiten partiellen Ableitungen von u für die angegebenen (ξ, η, ω) gesichert, wenn wir die Konvergenz der in ihnen auftretenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_k'(0) \cos k\omega = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(0) \cosh k\xi \cos k\omega$$

aus (31) folgern könnten. Das ist mit der Einschränkung $\xi > 0$ tatsächlich der Fall, wie die folgenden Betrachtungen zeigen: Wir wählen ein festes $\xi = \tilde{\xi} > 0$ und bestimmen die natürliche Zahl $\tilde{k}(\tilde{\xi})$ so, daß

$$\tilde{k} > \frac{1}{\tilde{\xi}} \log \frac{2}{e^{\tilde{\xi}} - 1} \tag{32}$$

ausfällt. Dann ist für $\xi > \tilde{\xi}$ ebenfalls $\tilde{k} > \frac{1}{\xi} \log \frac{2}{e^{\xi}-1}$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt aus (32)

$$e^{\tilde{k}\xi} > \frac{2}{e^{\xi}-1} \qquad (\xi > \tilde{\xi}),$$

wofür wir

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - e^{\tilde{k}\xi} > 2$$

oder

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - 1 > e^{\tilde{k}\xi} + 1 \tag{33}$$

schreiben können. Nun ist einerseits mit $\xi > 0$

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - 1 < e^{(\tilde{k}+1)\xi} - e^{-(\tilde{k}+1)\xi},$$

andrerseits

$$e^{\tilde{k}\xi} + 1 > e^{\tilde{k}\xi} + e^{-\tilde{k}\xi}.$$

Demnach ergibt sich aus (33) bei der von uns getroffenen Wahl von $\tilde{k}$

$$\cosh \tilde{k}\xi < \sinh(\tilde{k}+1)\xi \qquad (\xi > \tilde{\xi}).$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion nach l, daß hieraus

$$\cosh(\tilde{k}+l)\xi < \sinh(\tilde{k}+l+1)\xi \qquad (l=1,2,\ldots) \quad (\xi > \tilde{\xi})$$

folgt. Als Induktionsvoraussetzung benutzen wir

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\xi < \sinh(\tilde{k}+l)\xi.$$

Danach ist

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\xi\cosh\xi<\sinh(\tilde{k}+l)\xi\cosh\xi. \tag{34}$$

Aus

$$\sinh(k+l-1)\xi<\sinh(k+l)\xi<\cosh(k+l)\xi$$

ergibt sich

$$\sinh(k+l-1)\xi\sinh\xi<\cosh(k+l)\xi\sinh\xi. \tag{35}$$

Addition von (34) und (35) liefert

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\xi\cosh\xi+\sinh(\tilde{k}+l-1)\xi\sinh\xi<\sinh(\tilde{k}+l)\xi\cosh\xi+\\+\cosh(\tilde{k}+l)\xi\sinh\xi.$$

Nach den Additionstheoremen für die hyperbolischen Funktionen ist diese Ungleichung identisch mit der Behauptung.

Wir wissen nun, daß mit $\xi\geq\tilde{\xi}>0$ für jedes $k\geq\tilde{k}$

$$|f_k'(0)|\cosh k\xi<|f_k'(0)|\sinh(k+1)\xi$$

ist. Da daraus wegen (31) mit $\delta>0$

$$|f_k'(0)|\cosh k\xi<\frac{1}{(k+1)^{1+\delta}}\qquad\text{für jedes } k\geq\tilde{k}$$

folgt, so konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k'(0)|\cosh k\xi\cos k\omega$$

absolut und gleichmäßig für alle $\xi\geq\tilde{\xi}>0$ und alle ω. Da $\tilde{\xi}>0$ beliebig gewählt werden durfte, so können wir $0<\tilde{\xi}<\xi'$ nehmen und sind jetzt sicher, daß für $(\xi,\eta)\in\{(\xi,\eta):\tilde{\xi}\leq\xi\leq\xi',\ 0\leq\eta\leq\eta'\}$ und alle ω bzw. für $(t,r)\in\left\{(t,r):\cosh\tilde{\xi}\leq\frac{t}{r}\leq\cosh\xi,\ 0\leq t-r\leq\eta'\right\}$ und alle ω die Umordnung der Reihen für u_r, u_{tt}, u_{rr}, $u_{\omega\omega}$ zu (29) legitim ist. Wegen Satz 1 verschwindet jeder der Ausdrücke in den geschweiften Klammern aus (29). Somit genügt u, dessen Darstellung durch (28) sogar für alle $(t,r)\in\left\{(t,r):1\leq\frac{t}{r}\leq\cosh\xi',\ 0\leq t-r\leq\eta'\right\}$ und alle ω konvergiert, der Gleichung $\Delta u=0$. Da nach Satz 1 für $t=r>0$ $u^{(k)}=0$, $u_t^{(k)}=0$, $u_r^{(k)}=0$ ist, so gilt für $t=r>0$ und alle ω auch

$$u_t(t,r,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}u_t^{(k)}(t,r)\cos k\omega=0$$

$$u_r(t,r,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}u_r^{(k)}(t,r)\cos k\omega=0$$

$$u_\omega(t,r,\omega)=-\sum_{k=1}^{\infty}k\,u^{(k)}(t,r)\sin k\omega=0,$$

d.h. die Anfangsbedingungen sind ebenfalls erfüllt. Schließlich können, wenn mindestens ein $f_k'(0) \neq 0$ ist, u_{tt} und u_{rr} für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ nicht beschränkt bleiben, da dann nach (10c) bzw. (10d) mindestens eines der in ihren Reihenentwicklungen auftretenden Glieder über alle Grenzen wächst. Der Satz ist damit bewiesen.

Literatur

[1] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2. Berlin 1937. — [2] Hobson, E. W.: The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931. — [3] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [4] Lense, J.: Kugelfunktionen. Leipzig 1950. — [5] Sauer, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Berlin 1951. — [6] Suschowk, D.: Mitt. a. d. Math. Inst. d. TH München Nr. DFG 21, München 1956.

Math. Institut der Technischen Hochschule München

(Eingegangen am 25. Mai 1957)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 362–366 (1958)

Über die Darstellung der positiven Funktionale

Von
IVAN VIDAV

Sei $\mathfrak{B}$ eine lineare komplexe Algebra mit Einheitselement 1 in der eine Involution definiert ist, d.h. eine solche Abbildung $x \to x^*$ von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst, die folgenden Bedingungen genügt: a) $x^{**} = x$, b) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$, c) $(xy)^* = y^* x^*$. Ein Element u, für das $u^* = u$ gilt, werden wir symmetrisch nennen. Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ kann man dann in der Form $x = u + iv$ schreiben, wo u und v symmetrisch sind. Ein lineares Funktional $f(x)$ in $\mathfrak{B}$ heißt positiv, wenn $f(x^* x) \geq 0$ für alle $x \in \mathfrak{B}$ gilt. Bekanntlich ist $f(1) > 0$, wenn nicht $f(x) \equiv 0$ ist. Es soll hier stets $f(1) = 1$ angenommen werden. Ein positives Funktional $f(x)$ heißt unzerlegbar, wenn aus $f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)$, $0 < \alpha < 1$, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ positive Funktionale bedeuten, stets $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f(x)$ folgt.

Betrachten wir nun die Algebra $\mathfrak{B}$, die durch zwei symmetrische Elemente p und q erzeugt wird. Zwischen diesen Elementen bestehe die Vertauschungsrelation

$$pq - qp = -i, \qquad i^2 = -1. \tag{1}$$

Daraus folgt, daß sich jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig in der Form

$$x = \sum \alpha_{kl} p^k q^l, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

schreiben läßt, wobei α_{kl} komplexe Zahlen bedeuten. Das adjungierte Element x^* ist dann

$$x^* = \sum \bar{\alpha}_{kl} q^l p^k = \sum \beta_{kl} p^k q^l.$$

Die Algebra $\mathfrak{B}$ besteht hier aus allen Polynomen (2).

Wird $p + iq = a\sqrt{2}$, $p - iq = a^* \sqrt{2}$ gesetzt, dann lautet die Relation (1)

$$a^* a - a a^* = 1. \tag{3}$$

Daß in dieser Algebra positive Funktionale existieren, erkennt man so: Sei $\psi(q)$ eine solche unendlich oft differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen q, $-\infty < q < \infty$, für die bei beliebigen natürlichen Zahlen k und l das Produkt $|q^k \psi^{(l)}(q)|$ gegen Null strebt, wenn $|q| \to \infty$. Ordnen wir nun dem Elemente p den Differentiationsoperator $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$, dem Elemente q aber den Multiplikationsoperator q zu. Dann bestimmt jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig einen Differentialoperator X, nämlich

$$X = \sum \alpha_{kl} \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dq}\right)^k q^l \tag{2*}$$

für das Element (2). Wird nun

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi(q) \overline{\psi(q)}\, dq \tag{4}$$

gesetzt, so ist, wie man leicht bestätigt, $f(x)$ ein positives Funktional.

Nun erhebt sich die folgende Frage: Wann läßt sich ein positives Funktional $f(x)$ in der Form (4) schreiben? Eine teilweise Antwort auf diese Frage ist, wie hier gezeigt werden soll, in den Arbeiten von PUTNAM [3] und RELLICH [2] enthalten.

Betrachten wir also ein positives Funktional $f(x)$ mit $f(1) = 1$. Diejenigen Elemente $x \in \mathfrak{B}$, für die $f(x^* x) = 0$ gilt, bilden ein linksseitiges Ideal $\mathfrak{N}$. Die Restklassen mod $\mathfrak{N}$ bilden einen linearen Vektorraum $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$. Sei $\xi = \{x + \mathfrak{N}\}$ diejenige Restklasse, die das Element x enthält. Wird hier das innere Produkt

$$(\xi, \eta) = f(y^* x), \quad \xi = \{x + \mathfrak{N}\}, \quad \eta = \{y + \mathfrak{N}\} \tag{5}$$

eingeführt, so wird $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ zu einem Hilbertschen Raum, der offenbar separabel, aber nicht notwendig vollständig ist. Sei $\mathfrak{H}$ der Hilbertsche Raum, der aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ durch Vervollständigung entsteht.

Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ läßt sich nun als ein linearer Operator A_x in $\mathfrak{H}$ auffassen: $A_x \xi_0$ bedeutet diejenige Restklasse mod $\mathfrak{N}$, die $x x_0$ enthält, also $A_x \{x_0 + \mathfrak{N}\} = \{x x_0 + \mathfrak{N}\}$. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{A_x}$ von A_x ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$, also ist A_x in $\mathfrak{H}$ dicht definiert. Da nun

$$(A_{x^*} \xi_0, \eta_0) = f(y_0^* x^* x_0) = f[(x y_0)^* x_0] = (\xi_0, A_x \eta_0)$$

für alle $\xi_0, \eta_0 \in \mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ gilt, besitzt jedes A_x in $\mathfrak{H}$ eine Abschließung, die mit $\bar{A}_x$ bezeichnet werden soll. Nunmehr können wir folgenden Satz formulieren:

Ist in der oben beschriebenen Darstellung die Abschließung des Operators $A_{aa^*} = A_a A_{a^*}$ selbstadjungiert, dann gibt es eine solche Folge von unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\psi_k(q)$, $-\infty < q < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \leq \infty$, daß für jedes $x \in \mathfrak{B}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi_k(q) \overline{\psi_k(q)}\, dq \tag{6}$$

gilt. Dabei bedeutet X den Differentialoperator, der dem Element x entspricht, d.h. den Operator (2).*

Bei dem Beweis bedienen wir uns des folgenden Hilfssatzes:

Seien A und B zwei dicht definierte Operatoren mit demselben Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. *$A\xi$, $B\xi \in \mathfrak{D}$ für jedes $\xi \in \mathfrak{D}$.*
2. *$(A\xi, \eta) = (\xi, B\eta)$ für $\xi, \eta \in \mathfrak{D}$.*
3. *Die Abschließungen $(\overline{AB})$ und $(\overline{BA})$ sind selbstadjungiert.*

Dann ist $\overline{B} = (\bar{A})^*$ und $(\overline{AB}) = \bar{A}\bar{B}$, $(\overline{BA}) = \bar{B}\bar{A}$.

Hier bedeutet $\bar{A}$ die Abschließung von A, $\overline{B}$ die von B usw. Zunächst erkennt man aus 2., daß die Abschließungen $\bar{A}$ und $\overline{B}$ existieren. Da $(\overline{AB})$ und $(\overline{BA})$ positive selbstadjungierte Operatoren sind, liegen die Wertevorräte $(E+BA)\mathfrak{D}$ und $(E+AB)\mathfrak{D}$, wo E die identische Transformation bedeutet, in $\mathfrak{H}$ dicht. Sei nun $\boldsymbol{H}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ das kartesische Produkt des Raumes $\mathfrak{H}$ mit sich selbst. $\boldsymbol{H}$ besteht aus allen geordneten Paaren $\{\xi,\eta\}$, $\xi,\eta\in\mathfrak{H}$. Nun gilt die folgende Identität

$$\{(E+BA)\xi,\ (E+AB)\eta\}$$
$$=\{\xi+B\eta,\ A(\xi+B\eta)\}+U\{i(\eta-A\xi),\ iB(\eta-A\xi)\},$$

wobei ξ,η beliebige Vektoren aus $\mathfrak{D}$ sind, U ist aber der unitäre Operator: $U\{\xi,\eta\}=\{i\eta,\ -i\xi\}$. Durchlaufen ξ und η die Menge $\mathfrak{D}$, so liegt die zugehörige Menge der Vektoren $\{(E+BA)\xi,\ (E+AB)\eta\}$ in $\boldsymbol{H}$ dicht. Es ist also

$$\boldsymbol{H}=\overline{M(A)}\oplus U\overline{M(B)}.$$

Mit $M(A)$ und $M(B)$ haben wir die Graphen des Operators A und B bezeichnet. Da $\overline{M(A)}=M(\bar{A})$, folgt daraus

$$\boldsymbol{H}=M(\bar{A})\oplus UM(\overline{B}).$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\overline{B}=(\bar{A})^*$ ist ([1], S. 102). Das Produkt $\overline{B}\bar{A}=(\bar{A})^*\bar{A}$ ist also selbstadjungiert. Da $(BA)\xi=\overline{B}\bar{A}\xi$ für $\xi\in\mathfrak{D}$ gilt und die Abschließung von BA nach Voraussetzung selbstadjungiert ist, hat man $(\overline{BA})=\overline{B}\bar{A}$.

Wir werden nun diesen Hilfssatz auf die Operatoren A_a und A_{a^*} anwenden, wobei $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ ist. Diese Operatoren genügen offenbar der Gleichung

$$A_{a^*}A_a-A_aA_{a^*}=E, \tag{7}$$

die der Relation (3) entspricht. Daraus erkennt man, daß die Abschließungen A_{aa^*} und A_{a^*a} denselben Definitionsbereich haben. Sie sind also nach Voraussetzung des Satzes beide selbstadjungiert. Aus dem Hilfssatz folgt nun

$$\bar{A}_{a^*}=(\bar{A}_a)^*,\quad (\overline{A_{a^*}A_a})=(\bar{A}_a)^*\bar{A}_a,\quad (\overline{A_aA_{a^*}})=\bar{A}_a(\bar{A}_a)^*.$$

Wird $\bar{A}_a=A$, also $\bar{A}_{a^*}=A^*$ gesetzt, so haben die selbstadjungierten Operatoren AA^* und A^*A denselben Definitionsbereich. Zwischen ihnen besteht die Relation

$$A^*A-AA^*=E. \tag{7*}$$

Nach einem Satz von PUTNAM [3] besitzt dann der Operator AA^* ein reines Punktspektrum, das aus allen nicht negativen ganzen Zahlen $\lambda=0,1,2,3,\ldots$ besteht.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}_k$ den Raum der Eigenlösungen des Operators AA^* für $\lambda=k$, d.h. die Menge der Lösungen der Gleichung $AA^*\xi=k\xi$. Die zueinander orthogonalen Räume $\mathfrak{L}_k$ haben die gleiche Dimension. Aus (7*) erkennt man nämlich, daß $A\mathfrak{L}_k\subset\mathfrak{L}_{k+1}$ und $A^*\mathfrak{L}_{k+1}\subset\mathfrak{L}_k$. Ferner ist $A\xi\neq 0$, wenn $\xi\in\mathfrak{L}_k$ und $A^*\xi\neq 0$ für $\xi\in\mathfrak{L}_{k+1}$ $(\xi\neq 0)$, was auch aus (7*) folgt.

Sei nun $\xi_0', \xi_0'', \ldots, \xi_0^{(n)}$, $n \leq \infty$, eine orthonormierte Basis im Unterraum $\mathfrak{L}_0$. Die Vektoren $\xi_k^{(l)} = A^k \xi_0^{(l)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, sind alle von Null verschieden und sie genügen den Gleichungen $AA^* \xi_k^{(l)} = k \xi_k^{(l)}$. Es ist ferner

$$(\xi_{k+1}^{(l)}, \xi_{k+1}^{(j)}) = (A\,\xi_k^{(l)}, A\,\xi_k^{(j)}) = (AA^*\,\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) + (\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) = (k+1)\,(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}).$$

Hieraus folgt $(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(l)}) = k!$ und $(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) = 0$ für $l \neq j$. Setzt man also $\eta_k^{(l)} = \xi_k^{(l)} / (\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(l)})^{\frac{1}{2}}$, so bekommt man eine orthonormierte Basis $\eta_k', \eta_k'', \ldots, \eta_k^{(n)}$ für den Raum $\mathfrak{L}_k$. Eine leichte Rechnung gibt nun

$$A\,\eta_k^{(l)} = \eta_{k+1}^{(l)} \sqrt{k+1}. \tag{8}$$

Sei jetzt $\mathfrak{H}_l$ der Unterraum, den die Vektoren $\eta_0^{(l)}, \eta_1^{(l)}, \eta_2^{(l)}, \ldots$ aufspannen. Die Unterräume $\mathfrak{H}_l$ sind zueinander orthogonal und es ist

$$\mathfrak{H} = \sum_{l=1}^{l=n} \oplus\, \mathfrak{H}_l. \tag{9}$$

Die Wirkung des Operators A im Unterraum $\mathfrak{H}_l$ ist durch (8) vollständig bestimmt. Ferner ist

$$A^*\,\eta_{k+1}^{(l)} = \eta_k^{(l)} \sqrt{k+1}, \quad A^*\,\eta_0^{(l)} = 0. \tag{8*}$$

Die Räume $\mathfrak{H}_l$ reduzieren also A und A^*.

Jedes $\mathfrak{H}_l$ ist unendlich dimensional und ist folglich dem Raume $L_2(-\infty, \infty)$ isomorph. Der Operator A ist aber in L_2 dem Differentialoperator $\frac{i}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right)$ unitär äquivalent. Man überzeugt sich davon, wenn man in L_2 die orthonormierte Basis bestehend aus Hermiteschen Polynomen einführt. Daraus erkennt man, daß in L_2 der Operator A_p dem Differentiationsoperator $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$ und A_q dem Multiplikationsoperator q unitär äquivalent ist.

Sei nun $\varepsilon = \{1 + \mathfrak{R}\}$ die Restklasse, die das Einheitselement 1 enthält. $\varepsilon = \{1 + \mathfrak{R}\}$, als ein Vektor aus $\mathfrak{H}$ aufgefaßt, kann man infolge von (9) in der Form

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^{l=n} \eta_l$$

schreiben, wo die Vektoren $\eta_l \in \mathfrak{H}_l$ zueinander orthogonal sind. Da $(A_x \varepsilon, \varepsilon) = f(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{B}$ ist und auch $A_x \eta_l$ zu $\mathfrak{H}_l$ gehört, folgt daraus

$$f(x) = \sum_{l=1}^{l=n} (A_x \eta_l, \eta_l).$$

Nun ist $\mathfrak{H}_l$ dem Raume $L_2(-\infty, \infty)$ isomorph, der Operator A_x ist aber dem Differentialoperator (2*) äquivalent. Folglich entspricht jedem η_l eine Funktion $\psi_l(q)$ aus $L_2(-\infty, \infty)$, so daß

$$(A_x \eta_l, \eta_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\, \psi_l(q)\, \overline{\psi_l(q)}\, dq$$

gilt. Die Funktionen $\psi_l(q)$ sind notwendig unendlich oft differenzierbar. Daraus ergibt sich

$$f(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi_l(q) \overline{\psi_l(q)}\, dq.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Ist im besonderen das Funktional $f(x)$ unzerlegbar, dann ist $n=1$. In diesem Falle hat man also die Darstellung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi(q) \overline{\psi(q)}\, dq.$$

Für $n>1$ kann man nämlich das Funktional (6) zerlegen.

Literatur

[1] ACHIESER, N. I., u. I. M. GLASMAN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Berlin 1954. — [2] RELLICH, F.: Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen. Göttinger Nachr. **1946**, 107—115. — [3] PUTNAM, C. R.: Remarks on certain operators of quantum field theory. J. London Math. Soc. **29**, 350—354 (1954).

Mathematisches Institut der Universität Ljubljana (Jugoslavien)

(Eingegangen am 5. Juni 1957)

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 367–406 (1958)

Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I

Von
DIETER PUPPE

Inhalt von Teil I und II[0])

Einleitung

§ 1. CSS-Komplexe und CSS-Gruppen

1.1. CSS-Komplexe 370
1.2. CSS-Gruppen 373
1.3. Homotopiegruppen von CSS-Gruppen 374
1.4. Homologiegruppen 375
1.5. CSS-Abbildungen und induzierte Homomorphismen 378
1.6. Der Hurewiczsche Homomorphismus 378
1.7. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus' für abelsche CSS-Gruppen und abelsche topologische Gruppen 380

§ 2. Geometrische Realisierung von CSS-Komplexen

2.1. Definition der geometrischen Realisierung 382
2.2. Existenz der geometrischen Realisierung 383
2.3. Induzierte Abbildungen 385
2.4. Produkte von CW-Komplexen 387
2.5. Produkte von CSS-Komplexen und ihre geometrische Realisierung 387
2.6. Geometrische Realisierung von CSS-Gruppen 391
2.7. Die Isomorphie der Homologiegruppen eines CSS-Komplexes und seiner geometrischen Realisierung 393
2.8. Die Isomorphie der Homotopiegruppen einer CSS-Gruppe und ihrer geometrischen Realisierung 396
2.9. Der Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|)$ 397
2.10. Vergleich mit Ergebnissen von A. DOLD und R. THOM 399

§ 3. Abelsche CSS-Monoide und abelsche topologische Monoide[0])

3.1. CSS-Monoide und topologische Monoide 407
3.2. Bemerkungen über die Homotopiegruppen topologischer Monoide 408
3.3. Ein Hilfssatz 409
3.4. Ergänzungen zu 3.3 411
3.5. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus für abelsche topologische Monoide mit neutralem Element 412
3.6. Die Homotopieäquivalenz zwischen abelschen topologischen Gruppen und erzeugenden Untermonoiden 414
3.7. Anwendung auf das unendliche symmetrische Produkt 418

Einleitung. Der Begriff des vollständigen semi-simplizialen Komplexes (CSS-Komplex, vgl. 1.1) im Sinne von EILENBERG-ZILBER [7], [8] gewinnt in der algebraischen Topologie immer größere Bedeutung. Er enthält den Begriff des singulären Komplexes eines topologischen Raumes und in gewissem Sinne den des simplizialen Komplexes als Spezialfälle (1.1 Beispiel 1 und 2).

[0]) § 3 erscheint als Teil II dieser Arbeit im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

KAN [9] hat für eine gewisse Klasse von CSS-Komplexen eine Homotopietheorie entwickelt, die, angewandt auf den singulären Komplex eines topologischen Raumes, die übliche ergibt. Zu dieser Klasse von CSS-Komplexen gehören, wie MOORE ([11] Exp. 18 Th. 3) zeigte, insbesondere die CSS-Gruppen (vgl. 1.2). Für sie kann man aber eine einfachere Definition der Homotopiegruppen geben, als allgemein für die Kanschen CSS-Komplexe. Von dieser gehen wir hier aus und definieren für eine CSS-Gruppe $K = \bigcup_q K_q$ mit den Seitenoperatoren d_i die q-te Homotopiegruppe $\pi_q(K)$ durch

$$\pi_q(K) = \Big(K_q \cap \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{Kern} d_i\Big) \Big/ d_{q+1}\Big(K_{q+1} \cap \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{Kern} d_i\Big) \qquad \text{(vgl. 1.3)}.$$

Eine weitere Sonderstellung nehmen die abelschen CSS-Gruppen ein. Wichtige Beispiele sind erstens der singuläre CSS-Komplex $S(X)$ einer abelschen topologischen Gruppe X und zweitens die von einem beliebigen CSS-Komplex K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe ΓK (vgl. 1.2 Beispiel 1 und 2). Setzt man in einer abelschen CSS-Gruppe K mit den Seitenoperatoren d_i (bei additiver Schreibweise der Gruppenoperationen) $d = \sum_i (-1)^i d_i$, so kann man K als Kettenkomplex auffassen und seine Homologiegruppen $\mathfrak{H}_q(K)$ bilden (vgl. 1.4). Den Ausdruck „Homologiegruppen von K" für $\mathfrak{H}_q(K)$ vermeiden wir aber, denn als Homologiegruppen eines CSS-Komplexes K pflegt man $\mathfrak{H}_q(\Gamma K)$ zu bezeichnen. Wir schließen uns diesem Gebrauch an und schreiben $H_q(K) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K)$, oder für ein Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen: $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$. (Der Quotient $\Gamma K/\Gamma L$ ist in naheliegender Weise definiert, vgl. 1.2 und 1.4.)

Ein erstes Ergebnis dieser Arbeit, das unabhängig auch von MOORE bewiesen wurde[1]), ist die Isomorphie

$$\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) \tag{1}$$

für jede abelsche CSS-Gruppe K (vgl. 1.4 Satz 2). Für den speziellen Fall, daß $K = S(X)$ der singuläre CSS-Komplex einer abelschen topologischen Gruppe ist (1.2 Beispiel 1), wurde diese Isomorphie von DOLD vermutet. Wir benutzen sie unter anderem dazu, für jede abelsche CSS-Gruppe K einen natürlichen Homomorphismus $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ zu definieren (E ist der CSS-Unterkomplex der neutralen Elemente, s. 1.6), dessen Zusammensetzung $g_* \circ h_*$ mit dem Hurewiczschen Homomorphismus $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ (der für CSS-Komplexe analog wie für topologische Räume erklärt wird, s. 1.6) die Identität ist (vgl. 1.7 Satz 3). Durch Anwendung auf den singulären CSS-Komplex $S(X)$ einer abelschen topologischen Gruppe X mit dem neutralen Element e folgt daraus die Existenz eines Homomorphismus $g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$, dessen Zusammensetzung $g_* \circ h_*$ mit dem Hurewiczschen Homomorphismus $h_*: \pi_q(X, e) \to H_q(X, e)$ die Identität ist (vgl. 1.7 Folgerung B). Insbesondere besagt das, daß h_* monomorph[2]) ist und daß $h_* \pi_q(X, e)$ [bzw.

[1]) Vgl. J. C. MOORE, Algebraic homotopy theory. Chapt. 2 Appendix A: Abelian group complexes. Princeton Lecture Notes 1956 (vervielfältigtes Manuskript).

[2]) Ein Homomorphismus $f: G \to G'$ heißt monomorph oder Monomorphismus, wenn sein Kern verschwindet. f heißt epimorph oder Epimorphismus, wenn $f(G) = G'$ ist.

$h_*\pi_q(K)]$ direkter Summand in $H_q(X, e)$ [bzw. $H_q(K, E)$] ist. In § 3[9]) konstruieren wir einen Homomorphismus $g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$ mit analogen Eigenschaften auch noch für den Fall, daß X ein bogenweise zusammenhängendes abelsches topologisches Monoid (Halbgruppe) mit neutralem Element e ist (vgl. 3.5 Satz 12).

DOLD und THOM haben zu einem Raum X mit Grundpunkt l das unendliche symmetrische Produkt $SP(X)$ (vgl. [3], [4]) und eine von der Menge $X-l$ erzeugte freie abelsche Gruppe $AG(X)$ mit einer gewissen Topologie (vgl. [4]) konstruiert. Unter gewissen Voraussetzungen über X (über Einzelheiten s. 2.10) haben DOLD und THOM die Isomorphien

$$\pi_q(SP(X)) \cong H_q(X, l) = H_q(X) \qquad q > 0, \tag{2}$$

$$\pi_q(AG(X)) \cong H_q(X, l) \tag{3}$$

dadurch bewiesen, daß sie die Axiome der Homologietheorie für die Gruppen $\pi_q(SP(X))$ und $\pi_q(AG(X))$ verifizierten (vgl. [3], [4]). Unter nur unwesentlich abweichenden Voraussetzungen beweisen wir diese Isomorphien auf völlig andere Weise und erhalten dabei zugleich explizite Isomorphismen, d.h. Isomorphismen, die sich mit Hilfe von singulären Ketten von X und Sphärenabbildungen in $SP(X)$ bzw. $AG(X)$ verhältnismäßig einfach angeben lassen [vgl. 2.10 Satz 10 und die Folgerung aus Satz 14 und 15 in 3.7[9])]. Bei der Definition dieser Isomorphismen spielt der obige Homomorphismus g_* eine entscheidende Rolle. Die Dold-Thomsche Methode liefert keine expliziten Isomorphismen, und dieser Umstand war es gerade, der den ersten Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab.

In den ersten Abschnitten von § 2 werden wir die weitgehend bekannte, aber noch nicht in allgemein zugänglicher Form veröffentlichte Theorie der geometrischen Realisierung $|K|$ eines CSS-Komplexes K entwickeln[3]). Unter anderem wird dabei gezeigt, daß sich das Produkt $K \times K'$ zweier abzählbarer CSS-Komplexe durch das topologische Produkt $|K| \times |K'|$ geometrisch realisieren läßt (vgl. 2.5 Satz 5 und 2.4A.). Ist K eine abzählbare CSS-Gruppe, so folgt daraus, daß in $|K|$ eine Gruppenstruktur induziert wird, die $|K|$ zu einer topologischen Gruppe macht (vgl. 2.6 Satz 6). Für ein Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen wird die Isomorphie

$$H_q(K, L) \cong H_q(|K|, |L|) \tag{4}$$

bewiesen (vgl. 2.7 Satz 7) und für eine abelsche CSS-Gruppe K die Isomorphie

$$\pi_q(K) \cong \pi_q(|K|) \tag{5}$$

[3]) Andeutungen darüber findet man bei KAN ([9], III § 5). Die einzige Darstellung der Theorie mit genauen Definitionen und Beweisen gibt m.W. MILNOR in „The geometric realization of a semi-simplicial complex". Princeton Seminar Notes 1956 (vervielfältigtes Manuskript). Sie enthält (bei Abweichungen in den Formulierungen und Beweisen) der Sache nach ungefähr dasselbe wie die Abschnitte 2.1 bis 2.8 der vorliegenden Arbeit, die verfaßt wurde, ehe mir die genannten Princeton Notes von MILNOR und MOORE [vgl. Fußnote [1]), S. 368] zugänglich waren.

Zusatz bei der Korrektur: Die genannte Arbeit von MILNOR ist inzwischen in den Annals of Mathematics Bd. 65, 357–362 (1957) erschienen.

(vgl. 2.8 Satz 8). [(5) ist aber auch für nicht abelsche CSS-Gruppen K richtig, vgl. die Bemerkung in 2.8.]

Nun können wir unseren Beweis der Dold-Thomschen Isomorphie (3) kurz skizzieren: Für jedes Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen gilt

(6) $\pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|) \cong \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$ als Spezialfall von (5),

(7) $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$ als Spezialfall von (1),

(8) $\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) = H_q(K, L)$ nach Definition.

Durch Zusammenfassung von (6), (7), (8) und (4) folgt

(9) $$\pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|) \cong H_q(|K|, |L|).$$

Ist L speziell der von einem Element $l_0 \in K_0$ erzeugte CSS-Unterkomplex $L = \{(s_0)^q l_0\}$ von K (vgl. 2.10, s_0 ist der 0-te Ausartungsoperator), so ist $|L|$ ein Punkt $l \in |K|$. Benutzt man ihn als Grundpunkt, so stellt sich heraus, daß $AG(|K|)$ für abzählbares K eine geometrische Realisierung von $\Gamma K/\Gamma L$ ist [2.10 (12)]. Aus (9) ergibt sich also $\pi_q(AG(|K|)) = H_q(|K|, l)$ d.h. die Isomorphie (3) für geometrische Realisierungen abzählbarer CSS-Komplexe.

Das wichtigste Ergebnis von § 3[0]) enthält der Abschnitt 3.6. In etwas ungenauer Formulierung, die aber das wesentliche hervorhebt, besagt es:

Ist G eine abelsche topologische Gruppe mit einer „semi-simplizialen Zellenzerlegung", die mit der Gruppenoperation verträglich ist, so ist jedes Untermonoid $M \subset G$ Deformationsretrakt von G, vorausgesetzt, daß M das neutrale Element von G enthält, die Gruppe G erzeugt und ein zusammenhängender Teilkomplex der Zellenzerlegung von G ist. (Vgl. die Folgerung aus Satz 13 sowie die anschließende Bemerkung in 3.6.) Als Spezialfall ergibt sich in 3.7, daß $SP(X)$ ein Deformationsretrakt von $AG(X)$ ist, wenn X die geometrische Realisierung eines abzählbaren CSS-Komplexes ist, und damit ist die Dold-Thomsche Isomorphie (2) auf (3) zurückgeführt.

Ich danke Herrn DOLD für viele anregende Gespräche und für die Information über seine und THOMs noch nicht veröffentlichten Ergebnisse und Beweismethoden.

§ 1. CSS-Komplexe und CSS-Gruppen

1.1. CSS-Komplexe. Wir betrachten vollständige semi-simpliziale Komplexe (CSS-Komplexe) im Sinne von EILENBERG-ZILBER [7], [8]. Bezeichnet $[q]$ die Menge der ganzen Zahlen von 0 bis q, so besteht ein *CSS-Komplex* $K = \bigcup_q K_q$ aus einer Folge von disjunkten Mengen K_q, $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (q heißt die Dimension der Elemente von K_q), in der jeder monotonen[4]) Abbildung $\beta: [p] \to [q]$ eine Abbildung $\beta^*: K_q \to K_p$ zugeordnet ist, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\iota^*: K_q \to K_q$ ist die Identität von K_q, wenn $\iota: [q] \to [q]$ die Identität von $[q]$ bezeichnet.

[4]) Unter „monoton" verstehen wir in dieser Arbeit immer: schwach monoton wachsend, d.h. hier: $\beta(i) \leq \beta(j)$, falls $i \leq j$.

b) Für alle monotonen Abbildungen $\beta: [p] \to [q]$, $\gamma: [r] \to [p]$ ist $(\beta \circ \gamma)^* = \gamma^* \circ \beta^*$.

Eine Teilmenge $L = \bigcup_q L_q < K$ mit $L_q < K_q$ heißt *CSS-Unterkomplex* von K, wenn für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ gilt: $\beta^*(L_q) < L_p$.

Besondere Beachtung verdienen die Abbildungen

$$\varepsilon: [q-1] \to [q] \quad \text{und} \quad \eta: [q+1] \to [q], \quad i = 0, \ldots, q,$$

definiert durch

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & j \geq i \end{cases} \quad \text{(d.h. } i \in [q] \text{ wird ausgelassen)}$$

$$\eta_i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i \end{cases} \quad \text{(d.h. } i \in [q] \text{ wird „verdoppelt“).}$$

Wir bezeichnen ε_i^* und η_i^* auch mit d_i bzw. s_i. Die d_i heißen *Seiten-*, die s_i *Ausartungsoperatoren*. Die Bedingungen a), b) liefern für diese Abbildungen die Vertauschungsregeln:

$$\text{(Vt)} \qquad \begin{cases} d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i, & i \leq j \\ d_i \circ s_j = s_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ d_j \circ s_j = d_{j+1} \circ s_j = \text{Identität} \\ d_i \circ s_j = s_j \circ d_{i-1}, & i > j+1. \end{cases}$$

[Die erste Gleichung von (Vt) z.B. ist nur eine andere Schreibweise für $\varepsilon_i^* \circ \varepsilon_j^* = \varepsilon_{j-1}^* \circ \varepsilon_i^*$; nach b) ist das mit $(\varepsilon_j \circ \varepsilon_i)^* = (\varepsilon_i \circ \varepsilon_{j-1})^*$ äquivalent. Aus der Definition von ε_i entnimmt man aber unmittelbar $\varepsilon_j \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i \circ \varepsilon_{j-1}$ für $i < j$. Entsprechend erhält man die anderen Gleichungen von (Vt).]

Bemerkung. Wie man leicht sieht, läßt sich jede monotone Abbildung $\beta: [p] \to [q]$ in der Form $\beta = \varepsilon_{j_1} \circ \cdots \circ \varepsilon_{j_t} \circ \eta_{i_1} \circ \cdots \circ \eta_{i_s}$ $(q = p - s + t)$ schreiben und folglich β^* in der Form $\beta^* = s_{i_s} \circ \cdots \circ s_{i_1} \circ d_{j_t} \circ \cdots \circ d_{j_1}$. Daher genügt es zur Festlegung der Struktur eines CSS-Komplexes, die Mengen K_q und die Seiten- und Ausartungsoperatoren d_i, s_i zu kennen. Man kann auch zeigen, daß d_i und s_i beliebig vorgegeben werden können, wenn sie nur die Relationen (Vt) erfüllen (s. EILENBERG-MACLANE [5] § 2). Dementsprechend definiert man einen CSS-Komplex manchmal als eine Menge $K = \bigcup_q K_q$ (K_q disjunkt, $q = 0, 1, 2, \ldots$) zusammen mit Abbildungen

$$d_i: K_q \to K_{q-1}, \qquad i = 0, \ldots, q$$
$$s_i: K_q \to K_{q+1}, \qquad i = 0, \ldots, q,$$

die den Vertauschungsregeln (Vt) genügen.

Beispiel 1. *Singulärer Komplex.* Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $q \geq 0$ wählen wir ein bestimmtes euklidisches q-Simplex Δ_q und numerieren seine Ecken mit den ganzen Zahlen von 0 bis q. Jede Abbildung

$\beta: [p] \to [q]$ induziert dann eine affine Abbildung $\beta: \Delta_p \to \Delta_q$, bei der die Ecke i in die Ecke $\beta(i)$ übergeht. $S_q(X)$ sei die Menge der singulären q-Simplexe von X, d.h. der stetigen Abbildungen $\sigma: \Delta_q \to X$. $S(X) = \bigcup_q S_q(X)$ wird zu einem CSS-Komplex, dem *singulären CSS-Komplex* von X, wenn man für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ die Abbildung $\beta^*: S_q(X) \to S_p(X)$ durch $\beta^*(\sigma) = \sigma \circ \beta$ definiert.

Beispiel 2. *Simplizialer Komplex* (vgl. CARTAN [2] Exp. I und EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. II). Ein (unendlicher) abstrakter *simplizialer Komplex* (W, Φ) besteht aus einer Menge W von „Ecken" und einer Menge Φ von endlichen, nicht leeren Teilmengen von W, „Simplexe" genannt, so daß gilt:

a) Für jedes $P \in W$ ist $\{P\} \in \Phi$.

b) Ist $M' \subset M \subset W$, M' nicht leer und $M \in \Phi$, so ist auch $M' \in \Phi$.

Zu (W, Φ) gehört in bekannter Weise ein „geometrischer simplizialer Komplex" X, d.h. eine Menge X (der wir gleich eine Topologie geben werden) zusammen mit einer Zerlegung in euklidische Simplexe, die den „Simplexen" aus Φ umkehrbar eindeutig entsprechen (s. [6] Chapt. II Exercise F). Auf X sind im allgemeinen verschiedene Topologien sinnvoll, wir benutzen in dieser Arbeit immer die *„schwache Topologie"* (s. [6] Ch. II Ex. F): Eine Teilmenge von X ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Durchschnitt mit jedem abgeschlossenen euklidischen Simplex der Zerlegung in diesem Simplex offen (abgeschlossen) ist. Es dürfte keine Mißverständnisse verursachen, wenn wir in Zukunft abstrakte und geometrische simpliziale Komplexe nicht immer streng unterscheiden; insbesondere schreiben wir $X = (W, \Phi)$.

Sind $X = (W, \Phi)$, $X' = (W', \Phi')$ simpliziale Komplexe, so heißt $\varphi: W \to W'$ eine (abstrakte) *simpliziale Abbildung*, wenn für jedes $M \in \Phi$ auch $\varphi(M) \in \Phi'$ ist. Durch affine Fortsetzung von den Ecken auf die euklidischen Simplexe, aus denen X besteht, bestimmt φ eine stetige Abbildung $X \to X'$, die wir wieder mit φ bezeichnen und (geometrische) simpliziale Abbildung nennen.

Ein euklidisches Simplex Δ_q ist ein simplizialer Komplex mit der Eckenmenge $[q] = \{0, 1, \ldots, q\}$; seine Simplexmenge ist die Menge aller nicht leeren Teilmengen von $[q]$. Für irgendeinen simplizialen Komplex $X = (W, \Phi)$ sei $O_q(X)$ die Menge der simplizialen Abbildungen $\sigma: [q] \to W$ (bzw. $\sigma: \Delta_q \to X$). $O(X) = \bigcup_q O_q(X)$ wird zu einem CSS-Komplex, wenn man für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ die Abbildung $\beta^*: O_q(X) \to O_p(X)$ durch $\beta^*(\sigma) = \sigma \circ \beta$ definiert. Bei geometrischer Auffassung der simplizialen Abbildungen σ ist $O(X)$ offenbar ein CSS-Unterkomplex des singulären CSS-Komplexes $S(X)$ (vgl. Beispiel 1). Bei abstrakter Auffassung sind die Elemente von $O_q(X)$ nichts anderes als die $(q+1)$-tupel $(P_0, \ldots, P_q)$ von Ecken $(\in W)$, für die es ein Simplex $(\in \Phi)$ gibt, das alle P_i enthält. (Die P_i brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.)

Ein simplizialer Komplex $X = (W, \Phi)$ heißt geordnet, wenn in seiner Eckenmenge W eine Teilordnung $\leq$ gegeben ist, die auf jedem $M \in \Phi$ eine

strenge Ordnung induziert. Ist X geordnet, so bilden die monotonen simplizialen Abbildungen $\sigma: [q] \to W$ (bzw. $\sigma: \Delta_q \to X$) einen CSS-Unterkomplex $O'(X)$ von $O(X)$. Bei abstrakter Auffassung sind die Elemente von $O'_q(X)$ die $(q+1)$-tupel $(P_0, \ldots, P_q)$ von Ecken $(\in W)$ die alle einem Simplex $(\in \Phi)$, angehören und für die $P_0 \leq P_1 \leq \cdots \leq P_q$ gilt.

1.2. CSS-Gruppen.

Definition. Ein CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ heißt *CSS-Gruppenkomplex* oder kürzer *CSS-Gruppe*, wenn K_q für jedes q eine *Gruppenstruktur* trägt und die Abbildungen $\beta^*: K_q \to K_p$, die zu monotonen Abbildungen $\beta: [p] \to [q]$ gehören, *Homomorphismen* sind. (Weil sich jedes β^* aus den Seiten- und Ausartungsoperatoren d_i, s_i zusammensetzen läßt — vgl. die Bemerkung in 1.1 — würde es auch genügen, von d_i und s_i zu fordern, daß es Homomorphismen sind.)

$L = \bigcup_q L_q$ heißt CSS-Untergruppe von $K = \bigcup_q K_q$, wenn L CSS-Unterkomplex von K ist und jedes L_q Untergruppe von K_q. Ist L_q darüber hinaus Normalteiler in K_q, so kann man in naheliegender Weise die CSS-Faktorgruppe $K/L = \bigcup_q K_q/L_q$ definieren; $\beta^*: K_q/L_q \to K_p/L_p$ wird durch $\beta^*: K_q \to K_p$ induziert.

CSS-Gruppen werden unter dem Namen „complexes des groupes" von Moore in [11] behandelt. Der Begriff der abelschen CSS-Gruppe, mit dem wir es hier hauptsächlich zu tun haben werden, deckt sich mit dem des *FD*-Komplexes bei Eilenberg-MacLane [5].

Beispiel 1. Der singuläre CSS-Komplex $S(X)$ (vgl. 1.1 Beispiel 1) einer topologischen Gruppe X wird zu einer CSS-Gruppe, wenn man für $\sigma, \tau \in S_q(X)$ das Produkt $\sigma \cdot \tau$ durch

$$(\sigma \cdot \tau)(t) = \sigma(t) \cdot \tau(t) \qquad \text{für alle } t \in \Delta_q$$

definiert. Ist e das neutrale Element von X, so ist die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$ das neutrale Element von $S_q(X)$; $\bar{\sigma}$ ist invers zu σ in $S_q(X)$, wenn man $\bar{\sigma}(t) = (\sigma(t))^{-1}$ für alle $t \in \Delta_q$ setzt. Daß die Abbildungen $\beta^*: S_q(X) \to S_p(X)$ Homomorphismen sind, ist klar.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir dieses Beispiel noch etwas verallgemeinern:

Definition. Ein topologischer Raum X, der zugleich eine Gruppenstruktur trägt, heißt *C-Gruppe*, wenn die Gruppenoperation $\mu: X \times X \to X$ und der Übergang zum Inversen $\varphi: X \to X$ auf kompakten Teilmengen stetig sind, d.h. wenn $\mu | C$ stetig ist für jedes kompakte $C \subset X \times X$ und $\varphi | C$ stetig für jedes kompakte $C \subset X$.

Auch in einer C-Gruppe X ist das Produkt zweier singulärer Simplexe $\sigma, \tau: \Delta_q \to X$ eine stetige Abbildung $\sigma \cdot \tau: \Delta_q \to X$, weil Δ_q und daher $\sigma(\Delta_q) \times \tau(\Delta_q) \subset X \times X$ kompakt sind. $\bar{\sigma}: \Delta_q \to X$ [mit $\bar{\sigma}(t) = (\sigma(t))^{-1}$ wie oben] ist stetig, weil $\sigma(\Delta_q) \subset X$ kompakt ist. Folglich induziert die Gruppenstruktur von X in $S(X)$ auch dann die Struktur einer CSS-Gruppe, wenn X nur eine C-Gruppe ist.

Beispiel 2. Sei $K = \bigcup_q K_q$ ein beliebiger CSS-Komplex. Bezeichnet $\Gamma_q K$ die von K_q erzeugte freie abelsche Gruppe, so wird $\Gamma K = \bigcup_q \Gamma_q K$ zu einer abelschen CSS-Gruppe, wenn man die Abbildungen β^*, die in $K_q \subset \Gamma_q K$ bereits definiert sind, linear fortsetzt. Wir nennen ΓK die *von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe*.

1.3. Homotopiegruppen von CSS-Gruppen. In einer CSS-Gruppe $K = \bigcup_q K_q$ führen wir die Abkürzung

$$K_q^r = K_q \cap \bigcap_{i \leq r} \operatorname{Kern} d_i$$

($K_q^r = K_q$ für $r < 0$, $K_q^r = K_q^q$ für $r > q$, $K_0^r = K_0$ für alle r) ein.

Definition. $K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$ heißt *q-te Homotopiegruppe* von K und wird mit $\pi_q(K)$ bezeichnet.

Damit $K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$ wirklich eine Gruppe ist, muß $d_{q+1} K_{q+1}^q$ in K_q^q Normalteiler sein. Tatsächlich ist $d_{q+1} K_{q+1}^q$ sogar Normalteiler in K_q. Um das zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß es für alle $a \in K_{q+1}^q$, $b \in K_q$ ein $a' \in K_{q+1}^q$ gibt, so daß $b \cdot d_{q+1} a \cdot b^{-1} = d_{q+1} a'$ ist. $a' = s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}$ erfüllt diese Bedingung, denn es ist

$$d_{q+1}(s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}) = b \cdot d_{q+1} a \cdot b^{-1} \quad \text{nach 1.1 (Vt), S. 371}$$

und wegen $d_i a = e_q$ für $i \leq q$ (e_q bezeichnet das neutrale Element von K_q)

$$d_i(s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}) = d_i s_q b \cdot d_i s_q b^{-1} = e_q \qquad \text{für } i \leq q.$$

Zur Rechtfertigung der Bezeichnung „Homotopiegruppe" beweisen wir:

Satz 1. *Ist $S(X)$ der singuläre CSS-Komplex einer C-Gruppe X mit dem neutralen Element e (vgl. 1.2. Beispiel 1), so ist $\pi_q(S(X))$ die gewöhnliche Homotopiegruppe $\pi_q(X, e)$ von X zum Grundpunkt e.*

Wir erinnern zunächst an die Definition der Homotopiegruppen von topologischen Räumen: Ist X ein beliebiger topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fester Punkt, so ist $\pi_q(X, x_0)$ ($q > 0$) die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, x_0)$ relativ zum Rand $\partial \Delta_q$ von Δ_q. Man definiert darüberhinaus in $\pi_q(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur (vgl. z.B. STEENROD [12] Part II). Ist X eine topologische Gruppe und $x_0 = e$ ihr neutrales Element, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen $\sigma, \tau: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, e)$ — definiert durch $(\sigma \cdot \tau)(t) = \sigma(t) \cdot \tau(t)$ für alle $t \in \Delta_q$ — induziert (vgl. [12] 16.7). In diesem Fall ist auch $\pi_0(X, e)$ erklärt (s. [12] 16.10), nämlich als die Gruppe der Bogenkomponenten von X. Eine Bogenkomponente von X ist eine Homotopieklasse von Abbildungen $\Delta_0 \to X$, die Definition von $\pi_0(X, e)$ ordnet sich also der allgemeinen unter, wenn man unter $\partial \Delta_0$ die leere Menge versteht. Da es sich immer nur um Abbildungen von kompakten Räumen in X handelt, überträgt sich alles, was hier über topologische Gruppen gesagt wurde, ohne Änderung auch auf C-Gruppen (vgl. 1.2 Beispiel 1).

Beweis von Satz 1. Für ein singuläres Simplex $\sigma: \Delta_q \to X$ ist $\sigma \in S_q^q(X) = S_q(X) \cap \bigcap_i \operatorname{Kern} d_i$ gleichbedeutend mit $\sigma(\partial \Delta_q) = e$. $\sigma \in S_q^q(X)$ besagt nämlich, daß $d_i \sigma$ für jedes i die konstante Abbildung $\Delta_{q-1} \to e \in X$ ist. Wegen $d_i \sigma = \varepsilon_i^* \sigma = \sigma \circ \varepsilon_i$ (vgl. 1.1) heißt das, daß σ jede Seite $\varepsilon_i(\Delta_{q-1})$ von Δ_q in e abbildet. $S_q^q(X)$ ist also gerade die Menge der Repräsentanten für die Elemente von $\pi_q(X, e)$. Weil die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von Repräsentanten induziert wird, ist $\pi_q(X, e)$ die Faktorgruppe von $S_q^q(X)$ nach dem Normalteiler der rel. $\partial \Delta_q$ nullhomotopen $\sigma \in S_q^q(X)$. Andererseits ist $\pi_q(S(X)) = S_q^q(X)/d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ mit $S_{q+1}^q(X) = S_{q+1}(X) \cap \bigcap_{i \leq q} \operatorname{Kern} d_i$.

$\sigma \in d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ bedeutet: Es gibt ein $\tau: \Delta_{q+1} \to X$, so daß $d_{q+1} \tau = \sigma$ und daß $d_i \tau$ für $i \leq q$ die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$ ist. Wegen $d_i \tau = \varepsilon_i^* \tau = \tau \circ \varepsilon_i$ (vgl. 1.1) lassen sich die Eigenschaften von τ auch so ausdrücken: $\tau: \Delta_{q+1} \to X$ bildet die Seiten $\varepsilon_i(\Delta_q)$ von Δ_{q+1} für $i \leq q$ in e ab und stimmt auf $\varepsilon_{q+1}(\Delta_q)$ mit σ überein (genauer: $\sigma = \tau \circ \varepsilon_{q+1}$). Die Existenz eines solchen τ ist offenbar äquivalent mit $\sigma \simeq 0$ rel. $\partial \Delta_q$ ($\simeq$ bedeutet: homotop), also ist $d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ gerade der Normalteiler der rel. $\partial \Delta_q$ nullhomotopen $\sigma \in S_q^q(X)$, und die Behauptung ist bewiesen.

$\pi_q(K)$ ist abelsch für $q > 0$ und jede CSS-Gruppe K, wie MOORE [11] Exp. 18 Th. 5 beweist. Für abelsche CSS-Gruppen gilt das trivialerweise (und zwar für alle q). Nur dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit eine Rolle spielen.

1.4. Homologiegruppen. In einer abelschen CSS-Gruppe K (mit additiv geschriebenen Gruppenoperationen) setzen wir

$$d = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i d_i : K_q \to K_{q-1} \qquad \text{für } q > 0.$$

Aus 1.1 (Vt) (S. 371) folgt durch einfache Rechnung $d \circ d = 0$. (K, d) ist daher ein Kettenkomplex (wenn wir für $q < 0$ $K_q = 0$ und $d = 0: K_{q+1} \to K_q$ setzen, vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V § 2). Seine Homologiegruppen

$$(K_q \cap \operatorname{Kern} d)/d K_{q+1}$$

bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_q(K)$.

Zu jedem CSS-Komplex K (ohne Gruppenstruktur) haben wir in 1.2 Beispiel 2 die von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe ΓK konstruiert. Ist L ein CSS-Unterkomplex von K, so ist ΓL eine CSS-Untergruppe von K. Wir lassen den Fall zu, daß L leer ist, und verstehen dann unter ΓL die triviale CSS-Gruppe, die in jeder Dimension nur aus dem neutralen Element besteht. Auf die CSS-Faktorgruppe $\Gamma K/\Gamma L$ können wir die obige Konstruktion anwenden und erhalten die Gruppen $\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$, die man als Homologiegruppen von K mod L — bzw. von K, falls L leer ist — zu bezeichnen pflegt. Wir haben daher diesen Gruppen das lateinische „H" vorbehalten und setzen $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$ sowie $H_q(K) = H_q(K, \emptyset) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K)$ ($\emptyset$ bezeichnet die leere Menge).

Ist $Y \subset X$ ein Paar von topologischen Räumen, so sind $H_q(S(X), S(Y)) = \mathfrak{H}_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y))$ die üblichen singulären Homologiegruppen von X mod Y, für die wir auch $H_q(X, Y)$ schreiben [bzw. $H_q(X)$, falls Y leer ist].

Ist X eine abelsche C-Gruppe, so ist $S(X)$ nach 1.2 Beispiel 1 eine CSS-Gruppe, die in diesem Fall offenbar abelsch ist. Also können wir $\mathfrak{H}_q(S(X))$ bilden. Das sind aber keineswegs die Homologiegruppen von X, sondern wie wir gleich sehen werden, die Homotopiegruppen $\pi_q(X, e)$ (e = neutrales Element von X, vgl. Folgerung C aus Satz 2).

Satz 2. *Für jede abelsche CSS-Gruppe K besteht ein Isomorphismus*

$$\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) \qquad \text{für alle } q \geq 0,$$

der durch die Identität induziert wird, d.h. bei dem entsprechende Elemente von $\pi_q(K)$ und $\mathfrak{H}_q(K)$ durch dasselbe Element von K_q repräsentiert werden können.

Beweis. Sei $K^r = \bigcup_q K_q^r$ mit $K_q^r = K_q \cap \bigcap_{i \leq r} \operatorname{Kern} d_i$ wie in 1.3. Ist $a \in K_q^r$, also $d_i a = 0$ für $i \leq r$, so folgt [vgl. 1.1 (Vt), S. 371]

$$d_i d_j a = \begin{cases} d_i 0 = 0 & \text{für } j \leq r \\ d_{j-1} d_i a = d_{j-1} 0 = 0 & \text{für } j > r,\ i \leq r, \end{cases}$$

d.h. $d_j a \in K_{q-1}^r$. Also gilt für alle j

$$d_j K_q^r \subset K_{q-1}^r. \tag{1}$$

Zwar ist im allgemeinen nicht auch $s_j K_q^r \subset K_{q+1}^r$, d.h. K^r ist kein CSS-Unterkomplex von K, aber aus (1) folgt, daß (K^r, d) ein Unterkomplex des Kettenkomplexes (K, d) ist mit $d = \sum_i (-1)^i d_i$. Analog zu $\mathfrak{H}_q(K)$ kann man daher $\mathfrak{H}_q(K^r) = (K_q^r \cap \operatorname{Kern} d)/d K_{q+1}^r$ bilden. Wir führen den Beweis von Satz 2, indem wir zeigen, daß die Injektionen $K^r \subset K^{r-1}$ Isomorphismen

$$\mathfrak{H}_q(K^{q-1}) \cong \mathfrak{H}_q(K^{q-2}) \cong \cdots \cong \mathfrak{H}_q(K^{-1}) = \mathfrak{H}_q(K) \tag{2}$$

induzieren und daß

$$\pi_q(K) = \mathfrak{H}_q(K^{q-1}) \tag{3}$$

ist.

Zum Beweis von (2) definieren wir für $0 \leq r \leq q$ den Homomorphismus $D_r: K_q^{r-1} \to K_{q+1}^{r-1}$ durch

$$D_r = \begin{cases} (-1)^r s_r \circ s_r \circ d_r, & 0 \leq r \leq q-1 \\ 0, & r = q. \end{cases}$$

$s_r s_r d_r K_q^{r-1}$ liegt tatsächlich in K_{q+1}^{r-1}, denn aus $d_i a = 0$ für $i \leq r-1$ folgt [vgl. 1.1 (Vt)]:

$$d_i s_r s_r d_r a = s_{r-1} s_{r-1} d_{r-1} d_i a = 0 \qquad \text{für } i \leq r-1.$$

Wir berechnen nun $d \circ D_r + D_r \circ d \colon K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ für $0 \leq r \leq q-1$. In K_q^{r-1} ist für $r < q-1$

$$D_r \circ d = \sum_{i=r}^{q} (-1)^{i+r} s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i$$

$$= s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_r - s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{q} (-1)^{i+r} s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i .$$

Aus 1.1 (Vt) folgt $d_r \circ d_{r+1} = d_r \circ d_r$ und $s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i = d_{i+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r$ für $i \geq r+2$, also

$$D_r \circ d = \sum_{i=r+2}^{q} (-1)^{i+r} d_{i+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r .$$

Für $r = q-1$ ist nach Definition $D_r \circ d = 0$. Andererseits ist (unter Beachtung von $D_r K_q^{r-1} \subset K_{q+1}^{r-1}$)

$$d \circ D_r = \sum_{i=r}^{q+1} (-1)^{i+r} d_i \circ s_r \circ s_r \circ d_r \qquad \text{für } 0 \leq r \leq q-1 .$$

Wir erhalten [vgl. 1.1 (Vt)]

$$(4) \quad \begin{cases} d \circ D_r + D_r \circ d = d_r \circ s_r \circ s_r \circ d_r - d_{r+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r + d_{r+2} \circ s_r \circ s_r \circ d_r \\ \qquad = s_r \circ d_r - s_r \circ d_r + s_r \circ d_{r+1} \circ s_r \circ d_r = s_r \circ d_r . \end{cases}$$

Bezeichnet $1 \colon K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ die Identität, so besagt (4), daß $(1 - s_r \circ d_r) \colon K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ für $r < q$ zur Identität kettenhomotop ist. Wegen $d_r \circ (1 - s_r \circ d_r) = d_r - d_r = 0$ ist

$$(5) \qquad (1 - s_r \circ d_r) K_q^{r-1} \subset K_q^r (\subset K_q^{r-1}) ;$$

wegen $d_r K_q^r = 0$ ist $(1 - s_r \circ d_r) \mid K_q^r$ die Identität. Die Kettenabbildung $(1 - s_r \circ d_r) \colon K_q^{r-1} \to K_q^r$ ist also für $r < q$ bis auf Kettenhomotopie zu der Injektion $K_q^r \to K_q^{r-1}$ invers (K_q^r ist „Ketten-Deformationsretrakt" von K_q^{r-1}), woraus (2) unmittelbar folgt.

Bei (3) steht nach Definition auf der einen Seite $\pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$, auf der anderen $\mathfrak{H}_q(K^{q-1}) = (K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d) / d K_{q+1}^{q-1}$. Offenbar ist

$$(6) \qquad K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d = K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d_q = K_q^q$$

und

$$(7) \qquad d K_{q+1}^{q-1} \supset d K_{q+1}^q = d_{q+1} K_{q+1}^q .$$

In (7) gilt aber auch die Umkehrung der Inklusion, denn ist $a \in K_{q+1}^{q-1}$, so gibt es ein Element $a' \in K_{q+1}^q$, nämlich $a' = (-1)^{q+1} (1 - s_q \circ d_q) a$ [vgl. (5)] mit

$$d_{q+1} a' = (-1)^{q+1} (d_{q+1} a - d_{q+1} s_q d_q a) = (-1)^{q+1} d_{q+1} a + (-1)^q d_q a \qquad \text{[nach 1.1 (Vt)]}$$
$$= d a .$$

In Verschärfung von (7) gilt also

$$(8) \qquad d K_{q+1}^{q-1} = d_{q+1} K_{q+1}^q ,$$

und zusammen mit (6) ergibt das (3). Damit ist Satz 2 bewiesen.

Folgerungen:

A. $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) = H_q(K, L)$ *für jedes Paar* $L \subset K$ *von CSS-Komplexen.*

B. $\pi_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y)) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y)) = H_q(X, Y)$ *für jedes Paar* $Y \subset X$ *von topologischen Räumen.*

C. $\mathfrak{H}_q(S(X)) \cong \pi_q(S(X)) = \pi_q(X, e)$ (vgl. 1.3 Satz 1) *für jede abelsche C-Gruppe* X *(mit dem neutralen Element* e*).*

Um später darauf Bezug nehmen zu können, formulieren wir noch ausdrücklich:

Folgerung D. *In einer abelschen CSS-Gruppe* K *gibt es zu jedem Element von* $\mathfrak{H}_q(K)$ *einen Repräsentanten* c*, der (nicht nur* $dc = 0$ *sondern auch)* $d_i c = 0$ *für alle* i *erfüllt.*

1.5. CSS-Abbildungen und induzierte Homomorphismen. Eine *CSS-Abbildung* $f: K \to K'$ zwischen CSS-Komplexen K, K' ist ein System von Abbildungen $f: K_q \to K'_q$, $q = 0, 1, \ldots$, so daß für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ gilt

$$\beta^* \circ f = f \circ \beta^*.$$

(Äquivalent ist die Forderung: $d_i \circ f = f \circ d_i$, $s_i \circ f = f \circ s_i$, weil sich jedes β^* aus den d_i und s_i zusammensetzen läßt, vgl. die Bemerkung in 1.1.) Sind K und K' darüberhinaus CSS-Gruppen und die Abbildungen $f: K_q \to K'_q$ Homomorphismen, so heißt $f: K \to K'$ ein *CSS-Homomorphismus.*

Die folgenden Feststellungen bestätigt man ohne Schwierigkeiten:

A. *Ein CSS-Homomorphismus* $f: K \to K'$ *induziert Homomorphismen* $f_\pi: \pi_q(K) \to \pi_q(K')$. f_π *ist die Identität, wenn* $f: K \to K$ *es ist, und für die Zusammensetzung zweier CSS-Homomorphismen* f, f' *gilt:* $(f' \circ f)_\pi = f'_\pi \circ f_\pi$.

B. *Ein CSS-Homomorphismus* $f: K \to K'$ *zwischen abelschen CSS-Gruppen* K, K' *induziert Homomorphismen* $f_{\mathfrak{H}}: \mathfrak{H}_q(K) \to \mathfrak{H}_q(K')$. $f_{\mathfrak{H}}$ *ist die Identität, wenn* $f: K \to K$ *es ist, und es gilt:* $(f' \circ f)_{\mathfrak{H}} = f'_{\mathfrak{H}} \circ f_{\mathfrak{H}}$.

C. *Eine CSS-Abbildung* $f: (K, L) \to (K', L')$ *zwischen Paaren* $L \subset K$, $L' \subset K'$ *von CSS-Komplexen (d.h. eine CSS-Abbildung* $f: K \to K'$ *mit* $f(L) \subset L'$*) induziert die CSS-Homomorphismen*

$$\Gamma f: \Gamma K \to \Gamma K',$$
$$\overline{\Gamma} f: \Gamma K/\Gamma L \to \Gamma K'/\Gamma L'$$

und schließlich die Homomorphismen

$$f_H = (\overline{\Gamma} f)_{\mathfrak{H}}: H_q(K, L) \to H_q(K', L') \qquad \text{(vgl. 1.4).}$$

Wieder gelten die üblichen Regeln für Identität und Zusammensetzung.

1.6. Der Hurewiczsche Homomorphismus. Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $x_0 \in X$ ein fester Punkt. Ein Element $\alpha \in \pi_q(X, x_0)$, $q > 0$ wird durch eine stetige Abbildung $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, x_0)$ repräsentiert (vgl. 1.3). Zugleich ist σ ein singuläres Simplex in X, und zwar ein Zykel mod x_0.

Ordnet man dem Element α die Homologieklasse dieses Zykels zu, so erhält man den Hurewiczschen Homomorphismus

$$h_*: \pi_q(X, x_0) \to H_q(X, x_0) \cong H_q(X), \qquad q > 0$$

(vgl. [12] 15.9).

Nach 1.4 ist $H_q(X, x_0) = H_q(S(X), S(x_0)) = \mathfrak{H}_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(x_0))$ und nach 1.3 Satz 1 für den Fall, daß X eine C-Gruppe mit dem neutralen Element $x_0 = e$ ist, $\pi_q(X, e) = \pi_q(S(X))$. Also kann man den Hurewiczschen Homomorphismus in diesem Fall in der Form $h_*: \pi_q(S(X)) \to H_q(S(X), S(x_0))$ schreiben. In dieser Form wird er auf beliebige CSS-Gruppen [an Stelle von $S(X)$] verallgemeinert:

Sei K eine CSS-Gruppe. Die neutralen Elemente $e_q \in K_q$ bilden eine CSS-Untergruppe $E = \{e_q\}$ von K. Wir setzen zur Abkürzung $\overline{\Gamma}K = \Gamma K/\Gamma E$. $h: K \to \overline{\Gamma}K$ sei die Abbildung, die sich aus der Injektion $K \subset \Gamma K$ und der Projektion $\Gamma K \to \overline{\Gamma}K$ zusammensetzt. h ist eine CSS-Abbildung, die zwar kein CSS-Homomorphismus ist, aber die neutralen Elemente $e_q \in K$ in die neutralen Elemente $0_q \in \overline{\Gamma}K$ überführt. (In $\overline{\Gamma}K$ schreiben wir die Gruppenoperationen additiv.) Folglich ist

$$h(K_q^q) \subset \overline{\Gamma}_q^q K \subset \overline{\Gamma}_q K \cap \operatorname{Kern} d$$

(zur Definition von K_q^r und entsprechend $\overline{\Gamma}_q^r K$ vgl. 1.3), d.h. h induziert $\bar{h}: K_q^q \to \mathfrak{H}_q(\overline{\Gamma}K)$. Ferner ist

$$h(d_{q+1} K_{q+1}^q) \subset d_{q+1} \overline{\Gamma}_{q+1}^q K \subset d\, \overline{\Gamma}_{q+1} K,$$

d.h. $\bar{h}$ induziert für jedes $q > 0$ einen Homomorphismus

$$h_*: \pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q \to \mathfrak{H}_q(\overline{\Gamma}K),$$

sofern bewiesen werden kann:

Hilfssatz. $\bar{h}: K_q^q \to \mathfrak{H}_q(\overline{\Gamma}K)$ *ist ein Homomorphismus für* $q > 0$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß $h(a \cdot b) - ha - hb$ für alle $a, b \in K_q^q$ ein d-Bild ist. Wir behaupten, es ist d-Bild von $(-1)^q hc$ mit $c = s_q a \cdot s_{q-1} b$. In der Tat ist [vgl. 1.1 (Vt), S. 371]:

$$d_{q+1} c = a \cdot s_{q-1} d_q b = a \qquad \text{(wegen } d_q b = e_{q-1}\text{)}$$
$$d_q c = a \cdot b$$
$$d_{q-1} c = s_{q-1} d_{q-1} a \cdot b = b \qquad \text{(wegen } d_{q-1} a = e_{q-1}\text{)}$$
$$d_i c = s_{q-1} d_i a \cdot s_{q-2} d_i b = e_q \quad \text{für } i \leq q-2 \qquad \text{(wegen } d_i a = d_i b = e_{q-1}\text{)},$$

folglich

$$\begin{aligned} d(-1)^q h c &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{i+q} h\, d_i c \\ &= -ha + h(a \cdot b) - hb + \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^{i+q} h e_q \\ &= h(a \cdot b) - ha - hb \qquad \text{(wegen } h e_q = 0_q\text{)}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu dem Fall $q>0$ ist $\bar{h}: K_0 (= K_0^0) \to \mathfrak{H}_0(\bar{\Gamma} K)$ im allgemeinen kein Homomorphismus, aber es wird doch eine Abbildung $h_*: \pi_0(K) \to \mathfrak{H}_0(\bar{\Gamma} K)$ induziert. Repräsentieren nämlich $a, b \in K_0$ dasselbe Element von $\pi_0(K)$, so gibt es ein $c \in K_1^0$ mit $d_1 c = a \cdot b^{-1}$. Daraus folgt $d_1(c \cdot s_0 b) = a$, $d_0(c \cdot s_0 b) = b$ und $d h(c \cdot s_0 b) = h b - h a$, also $\bar{h} a = \bar{h} b$.

Damit ist die *„Hurewiczsche Abbildung"* (homomorph für $q > 0$) $h_*: \pi_q(K) \to \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) = H_q(K, E)$ für jede CSS-Gruppe K erklärt. Für eine C-Gruppe X und $K = S(X)$, $q>0$, stimmt diese Definition offenbar mit der zuerst angegebenen überein.

Wir stellen schließlich fest:

$h: K \to \bar{\Gamma} K$ und damit auch $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ sind natürlich, d.h. für jeden CSS-Homomorphismus $f: K \to K'$ sind die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ \bar{\Gamma} K & \xrightarrow{\bar{\Gamma} f} & \bar{\Gamma} K' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_q(K') \\ {\scriptstyle h_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'_*} \\ H_q(K, E) & \xrightarrow{f_H} & H_q(K', E') \end{array}$$

kommutativ.

Bemerkung. Daß h_* hier als Abbildung in $H_q(K, E)$ und nicht in $H_q(K)$ definiert wurde, dient nur zur Vereinfachung der Definition. Während bei $h. K \subset \Gamma K \to \Gamma K / \Gamma E$ jedes $a \in K_q^q$ in einen Zykel übergeht (d.h. $dha = 0$), ist das bei der bloßen Injektion $K \subset \Gamma K$ nicht immer der Fall, denn in ΓK gilt für $q>0$

$$d a = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i e_{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } q \\ e_{q-1} & \text{für gerades } q. \end{cases}$$

In den geraden Dimensionen $q>0$ müßte man a also abändern, um eine Abbildung $\pi_q(K) \to H_q(K)$ direkt zu erhalten. Wir könnten aber nachträglich $H_q(K, E)$ durch $H_q(K)$ ersetzen. Wie man leicht bestätigt, verschwindet $H_q(E)$ nämlich für $q>0$, $H_0(E)$ ist frei zyklisch, und $H_0(E) \to H_0(K)$, induziert durch $E \subset K$, ist monomorph; also erhält man aus der exakten Homologiefolge des Paares (K, E)

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_q(E) & \to & H_q(K) & \to & H_q(K, E) & \to & H_{q-1}(E) & \to \cdots \\ & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & \mathfrak{H}_q(\Gamma E) & & \mathfrak{H}_q(\Gamma K) & & \mathfrak{H}_q(\Gamma K / \Gamma E) & & \mathfrak{H}_{q-1}(\Gamma E) & \end{array}$$

(vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V Th. 3.7) die natürliche Isomorphie $H_q(K) \cong H_q(K, E)$ für $q>0$. In der Dimension 0 induziert die Injektion $K \subset \Gamma K$ sogar direkt eine Abbildung $\pi_0(K) \to H_0(K)$, weil d in $\Gamma_0 K$ überhaupt verschwindet. [Daß zwei verschiedene Repräsentanten eines Elements von $\pi_0(K)$ auch dasselbe Element von $H_0(K)$ repräsentieren, zeigt man wie oben bei $h_*: \pi_0(K) \to H_0(K, E)$.]

1.7. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus' für abelsche CSS-Gruppen und abelsche topologische Gruppen. Für eine abelsche

CSS-Gruppe K sei $\tilde{g}.\, \Gamma K \to K$ derjenige CSS-Homomorphismus, der in $K \subset \Gamma K$ die Identität ist. Schreiben wir die Gruppenoperationen in K multiplikativ, die in ΓK additiv, so ist also

$$\tilde{g}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \prod_i a_i^{n_i}, \qquad a_i \in K_q, \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K.$$

Wegen $\tilde{g}(\Gamma E) \subset E$ (mit $E = \{e_q\}$, $e_q =$ neutrales Element von K_q) induziert $\tilde{g}$ einen CSS-Homomorphismus $g: \bar{\Gamma} K = \Gamma K / \Gamma E \to K$. Wir definieren $g_*: H_q(K, E) = \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) \to \pi_q(K)$ durch die Forderung, daß es sich unter Wahrung der Kommutativität in das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(\bar{\Gamma} K) & \xrightarrow{g_\pi} & \pi_q(K) \\ \| & \nearrow_{g_*} & \| \\ \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) & \xrightarrow[g_{\mathfrak{H}}]{} & \mathfrak{H}_q(K) \end{array}$$

einfügt, wobei die senkrechten Isomorphismen die von 1.4 Satz 2 sind. (Das Ausgangsdiagramm ohne g_* ist kommutativ, weil die senkrechten Isomorphismen durch die Identität induziert werden.) Für ein $\alpha \in H_q(K, E)$ wird also $g_*(\alpha)$ nach folgender Vorschrift bestimmt:

Man wähle ein $c = \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K$, $a_i \in K_q$, *dessen Restklasse* $\bar{c} \in \bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q E$ *die Homologieklasse* $\alpha \in H_q(K, E) = \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K)$ *repräsentiert, und zwar so, daß* $d_j \bar{c} = 0$ *für alle* j. [Daß das möglich ist, folgt aus der Isomorphie $\pi_q(\bar{\Gamma} K) \cong \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K)$, vgl. 1.4 Satz 2 Folgerung D. $\bar{c}$ repräsentiert gleichzeitig das Urbild von α in $\pi_q(\bar{\Gamma} K)$.] *Dann ist* $\prod_i a_i^{n_i}$ *(Multiplikation in* K_q*) ein Repräsentant von* $g_*(\alpha)$.

Offenbar gilt:

$g: \bar{\Gamma} K \to K$ *und damit auch* $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ *sind natürlich, d.h. für jeden CSS-Homomorphismus* $f: K \to K'$ *zwischen den abelschen CSS-Gruppen* K, K' *sind die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Gamma} K & \xrightarrow{\bar{\Gamma} f} & \bar{\Gamma} K' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ K & \xrightarrow{f} & K' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_q(K, E) & \xrightarrow{f_H} & H_q(K', E') \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'_*} \\ \pi_q(K) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_q(K') \end{array}$$

kommutativ.

Satz 3. *Für jede abelsche CSS-Gruppe* K *ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(K) \xrightarrow{h_*} H_q(K, E) \xrightarrow{g_*} \pi_q(K)$$

der Hurewiczschen Abbildung h_* *mit dem obigen Homomorphismus* g_* *die Identität.*

Beweis. Da h_*, g_* durch $h: K \to \bar{\Gamma} K$ (vgl. 1.6) bzw. $g: \bar{\Gamma} K \to K$ induziert werden, folgt die Behauptung aus der trivialen Beziehung $g \circ h =$ Identität.

Folgerung A. *Für jede abelsche CSS-Gruppe K ist $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ monomorph*[5] *[einwertig*[6]*] für $q=0$], $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ epimorph*[5]*, und für $q>0$ ist $h_* \pi_q(K)$ direkter Summand in $H_q(K, E)$.*

Ist X eine abelsche C-Gruppe mit dem neutralen Element e, so erhalten wir mit $K = S(X)$ einen Homomorphismus

$$g_*: H_q(X, e) = H_q(S(X), S(e)) \to \pi_q(S(X)) = \pi_q(X, e)$$

und aus Satz 3:

Folgerung B. *Für jede abelsche C-Gruppe X (insbesondere also für jede abelsche topologische Gruppe X) mit dem neutralen Element e ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(X, e) \xrightarrow{h_*} H_q(X, e) \xrightarrow{g_*} \pi_q(X, e)$$

die Identität. Daher ist h_* monomorph (einwertig für $q=0$), g_* epimorph, und für $q>0$ ist $h_* \pi_q(X, e)$ direkter Summand in $H_q(X, e)$.

§ 2. Geometrische Realisierung von CSS-Komplexen

2.1. Definition der geometrischen Realisierung. In einem CSS-Komplex K heißt ein Element $a \in K_p$ *ausgeartet*, wenn es in der Form $a = s_j a'$ (mit geeignetem j) darstellbar ist.

Hilfssatz. *Für jedes $a \in K_p$ gibt es eine Darstellung $a = \beta^* b$, wobei $\beta: [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ und $b \in K_q$ nicht ausgeartet ist. q, β und b sind dabei durch a eindeutig bestimmt.*

Einen Beweis dieses Hilfssatzes findet man bei EILENBERG-ZILBER [7] (8.3).

Definition. Ein CW-Komplex X (vgl. WHITEHEAD [13]) zusammen mit einer CSS-Abbildung $i: K \to S(X)$ des CSS-Komplexes K in den singulären CSS-Komplex $S(X)$ von X (vgl. 1.1 Beispiel 1) heißt *geometrische Realisierung* von K — Schreibweise: $X = |K|$ —, wenn es für jedes $q \geq 0$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Zellen e^q von X und den nicht ausgearteten Elementen $b \in K_q$ gibt, so daß $ib: \Delta_q \to X$ eine charakteristische Abbildung für e^q ist (d.h. ib bildet den Rand $\partial \Delta_q$ in das $(q-1)$-dimensionale Gerüst $X^{(q-1)}$ von X und $\Delta_q - \partial \Delta_q$ topologisch auf e^q ab, vgl. [13] § 4).

Aus dieser Definition folgt, daß verschiedene Elemente von K bei $i: K \to S(|K|)$ auch verschiedene Bilder haben. Seien nämlich $a = \beta^* b$, $a' = \beta'^* b'$ beliebige Elemente von K_p in der Darstellung gemäß dem Hilfssatz. Dann ist $ia = \beta^* ib$, $ia' = \beta'^* ib'$, und als charakteristische Abbildungen von Zellen in X können ib und ib' in $S(|K|)$ nicht ausgeartet sein. Aus $ia = ia'$ folgt also nach der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes $\beta = \beta'$ und $ib = ib'$.

---

[5]) Zur Definition von „monomorph" und „epimorph" s. Fußnote [2]) S. 368.

[6]) Weil es sich nicht um einen Homomorphismus handelt, ist das Wort „monomorph" nicht brauchbar. Um den Ausdruck „eineindeutig-in" zu vermeiden, bezeichnen wir jede Abbildung, bei der je zwei verschiedene Elemente auch verschiedene Bilder haben („jeder Wert tritt nur einmal auf"), als „einwertig". In Übereinstimmung damit findet sich in der englischen Literatur manchmal die Bezeichnung „univalent".

Wäre $b \neq b'$, so wären ib und ib' charakteristische Abbildungen verschiedener Zellen von X und damit $ib \neq ib'$. Also folgt aus $ia = ia'$ auch $b = b'$ und schließlich $a = a'$. K ist demnach mit seinem Bild $iK \subset S(|K|)$ isomorph. Wir können K als CSS-Unterkomplex von $S(|K|)$ auffassen.

Beispiel 1. Jeder simpliziale Komplex X im Sinne von 1.2 Beispiel 2 ist ein CW-Komplex, dessen Zellen die (offenen) Simplexe von X sind. Ist X geordnet, so haben wir den CSS-Komplex $O'(X) \subset S(X)$ (vgl. 1.2 Beispiel 2). Man bestätigt leicht, daß die Injektion $i: O'(X) \to S(X)$ die Bedingungen der obigen Definition erfüllt, d.h. X ist geometrische Realisierung von $O'(X)$.

Beispiel 2. Sei S^n die n-Sphäre, in der bekannten Weise in zwei Zellen e^0, e^n zerlegt. $\sigma: \Delta^n \to S^n$ sei eine charakteristische Abbildung (vgl. [*13*] § 4) für die Zelle e^n, und K sei der von σ in $S(S^n)$ erzeugte CSS-Unterkomplex. Da σ und $(d_0)^n\sigma$ die einzigen nicht ausgearteten Elemente von K sind, erfüllt die Injektion $i: K \to S(S^n)$ die Bedingungen der obigen Definition, d.h. S^n ist geometrische Realisierung von K.

2.2. Existenz der geometrischen Realisierung.

Satz 4. *Jeder CSS-Komplex* $K = \bigcup_q K_q$ *besitzt eine geometrische Realisierung* $|K|$.

Beweis. Sei $K^{(n)}$ — nicht zu verwechseln mit K^n in 1.4 — der von $\bigcup_{q \leq n} K_q$ erzeugte CSS-Unterkomplex von K. $K^{(n)}$ besteht demnach, wie man unter Benutzung des Hilfssatzes in 2.1 leicht bestätigt, aus allen Elementen der Form $\beta^* b$, wobei b ein nicht ausgeartetes Element von K_q, $q \leq n$ und $\beta: [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ ist. Wir konstruieren durch Induktion eine geometrische Realisierung $|K^{(n)}|$ von $K^{(n)}$, so daß $|K^{(n-1)}|$ ein CW-Teilkomplex von $|K^{(n)}|$ und die zu $K^{(n-1)}$ gehörende CSS-Abbildung $i_{n-1}: K^{(n-1)} \to S(|K^{(n-1)}|)$ (vgl. die Definition in 2.1) die Einschränkung der zu $K^{(n)}$ gehörenden CSS-Abbildung $i_n: K^{(n)} \to S(|K^{(n)}|)$ ist.

Die Menge K_0 mit der diskreten Topologie ist offenbar eine geometrische Realisierung von $K^{(0)}$; wir schreiben für sie also $|K^{(0)}|$. Die zugehörige CSS-Abbildung $i_0: K^{(0)} \to S(|K^{(0)}|)$ ordnet einem Element $\beta^* b \in K_p^{(0)}$ ($\beta: [p] \to [0]$, $b \in K_0$) das singuläre Simplex $i_0 \beta^* b: \Delta_p \to b \in K_0 = |K^{(0)}|$ zu. Nehmen wir nun an, daß $|K^{(m)}|$ und die zugehörige CSS-Abbildung $i_m: K^{(m)} \to S(|K^{(m)}|)$ für $m < n$ ($n > 0$) schon konstruiert sind und die obigen Forderungen erfüllen (d.h. $|K^{(m-1)}|$ ist CW-Teilkomplex von $|K^{(m)}|$ und $i_{m-1} = i_m | K^{(m-1)}$ für $m < n$)! Dann wählen wir zu jedem nicht ausgearteten $b \in K_n$ ein geordnetes euklidisches Simplex Δ_n^b. $d_j b$ liegt für jedes j in $K^{(n-1)}$, nach Induktionsvoraussetzung ist also das singuläre Simplex $i_{n-1} d_j b: \Delta_{n-1} \to |K^{(n-1)}|$ definiert. Ist $\varepsilon_j: \Delta_{n-1} \to \Delta_n^b$ die durch $\varepsilon_j: [n-1] \to [n]$ (vgl. 1.1, S. 371) induzierte affine Abbildung, so definieren wir $\varphi_b: \partial \Delta_n^b \to |K^{(n-1)}|$ durch

$$\varphi_b(t) = i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_j^{-1}(t)\right) \quad \text{für} \quad t \in \varepsilon_j(\Delta_{n-1}).$$

Wegen der ersten Vertauschungsregel [s. 1.1 (Vt), S. 371] ist φ_b eindeutig und folglich auch stetig.

[Ist nämlich $t \in \varepsilon_j(\Delta_{n-1}) \cap \varepsilon_k(\Delta_{n-1}) = \varepsilon_k \varepsilon_j(\Delta_{n-2}) = \varepsilon_j \varepsilon_{k-1}(\Delta_{n-2})$, $j<k$, so ist

$$\begin{aligned} i_{n-1} d_k b\left(\varepsilon_k^{-1}(t)\right) &= i_{n-1} d_k b\left(\varepsilon_j \varepsilon_j^{-1} \varepsilon_k^{-1}(t)\right) = i_{n-1} d_j d_k b\left((\varepsilon_k \circ \varepsilon_j)^{-1}(t)\right) \\ &= i_{n-1} d_{k-1} d_j b\left((\varepsilon_j \circ \varepsilon_{k-1})^{-1}(t)\right) \\ &= i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{-1} \varepsilon_j^{-1}(t)\right) = i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_j^{-1}(t)\right). \end{aligned}$$

]

X entstehe nun aus $|K^{(n-1)}|$, indem man für jedes nicht ausgeartete $b \in K_n$ das Simplex Δ_n^b mittels φ_b an $|K^{(n-1)}|$ anheftet, d.h. man bildet die topologische Summe $|K^{(n-1)}| + \sum_b \Delta_n^b$ und identifiziert $t \in \partial \Delta_n^b$ mit $\varphi_b(t) \in |K^{(n-1)}|$. X ist ein CW-Komplex, dessen $(n-1)$-dimensionales Gerüst $|K^{(n-1)}|$ ist. Die n-Zellen $\overset{\circ}{\Delta}{}_n^b = \Delta_n^b - \partial \Delta_n^b$ von X entsprechen umkehrbar eindeutig den nicht ausgearteten Elementen $b \in K_n$, und die natürliche Abbildung $\sigma_b\colon \Delta_n \xrightarrow{=} \Delta_n^b \to X$ ist eine charakteristische Abbildung für die Zelle $\overset{\circ}{\Delta}{}_n^b$. Definiert man $i_n\colon K^{(n)} \to S(X)$ durch

$$i_n a = i_{n-1} a \in S\left(|K^{(n-1)}|\right) \subset S(X) \quad \text{für } a \in K^{(n-1)}$$

$$i_n \beta^* b = \beta^* \sigma_b \quad \text{für nicht ausgeartetes } b \in K_n \text{ und } \beta\colon [p] \xrightarrow{\text{auf}} [n],$$

so ist X zusammen mit i_n eine geometrische Realisierung $|K^{(n)}|$ von $K^{(n)}$.

[Zu verifizieren ist dazu nur noch, daß i_n wirklich eine CSS-Abbildung ist. Wir zeigen die Vertauschbarkeit mit d_j und s_j: Für jedes $a \in K^{(n-1)}$ ist

$$d_j i_n a = d_j i_{n-1} a = i_{n-1} d_j a = i_n d_j a$$

$$s_j i_n a = s_j i_{n-1} a = i_{n-1} s_j a = i_n s_j a,$$

weil i_{n-1} nach Induktionsvoraussetzung eine CSS-Abbildung ist. Für nicht ausgeartetes $b \in K_n$ und $\beta\colon [p] \xrightarrow{\text{auf}} [n]$ ist

$$s_j i_n \beta^* b = s_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \eta_j)^* \sigma_b = i_n (\beta \circ \eta_j)^* b = i_n s_j \beta^* b,$$

weil mit β auch $\beta \circ \eta_j$ eine Abbildung auf $[n]$ ist (zur Definition von η_j vgl. 1.1). Zu zeigen bleibt also $d_j i_n \beta^* b = i_n d_j \beta^* b$. Nun ist entweder $\beta \circ \varepsilon_j\colon [p-1] \to [n]$ eine Abbildung auf $[n]$, dann ist wie für s_j

$$d_j i_n \beta^* b = d_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \varepsilon_j)^* \sigma_b = i_n (\beta \circ \varepsilon_j)^* b = i_n d_j \beta^* b;$$

oder es ist $\beta \circ \varepsilon_j = \varepsilon_k \circ \beta'$ mit geeignetem k und geeignetem $\beta'\colon [p-1] \xrightarrow{\text{auf}} [n-1]$, dann ist

$$d_j i_n \beta^* b = d_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \varepsilon_j)^* \sigma_b = (\varepsilon_k \circ \beta')^* \sigma_b = \beta'^* d_k \sigma_b = \beta'^* i_{n-1} d_k b,$$

letzteres wegen $d_k \sigma_b = \sigma_b \circ \varepsilon_k = \varphi_b \circ \varepsilon_k = i_{n-1} d_k b$ nach Definition von φ_b und σ_b, und schließlich

$$\beta'^* i_{n-1} d_k b = i_{n-1} \beta'^* d_k b = i_n \beta'^* d_k b = i_n d_j \beta^* b.$$

]

Nach Konstruktion ist $|K^{(n-1)}|$ CW-Teilkomplex von $|K^{(n)}|$ und i_{n-1} die Einschränkung von i_n auf $K^{(n-1)}$. Der direkte Limes $\lim_{n\to\infty} |K^{(n)}|$ [7]) der Folge $|K^{(0)}| \subset |K^{(1)}| \subset \cdots$ ist offenbar eine geometrische Realisierung von K, wenn man die CSS-Abbildung $i: K \to S(\lim_{n\to\infty} |K^{(n)}|)$ durch $i|K^{(n)} = i_n$ definiert.

2.3. Induzierte Abbildungen. Wir betrachten von nun an einen CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ immer als CSS-Unterkomplex des singulären Komplexes $S(|K|)$ der geometrischen Realisierung $|K|$ [d.h. wir identifizieren K vermöge $i: K \to S(|K|)$ mit $iK \subset S(|K|)$, vgl. 2.1]. Dann ist also jedes Element $a \in K_q$ zugleich ein singuläres Simplex $a: \Delta_q \to |K|$.

Eine CSS-Abbildung $f: K \to K'$ induziert eine Abbildung $|f|: |K| \to |K'|$ durch die Festsetzung

$$|f|(x) = fb(b^{-1}(x)) \tag{1}$$

für alle nicht ausgearteten $b \in K_q$, $q = 0, 1, \ldots$ und alle $x \in b(\mathring{\Delta}_q)$. [$\mathring{\Delta}_q = \Delta_q - \partial\Delta_q$ ist das Innere von Δ_q, $\mathring{\Delta}_0 = \Delta_0$; $b|\mathring{\Delta}_q: \mathring{\Delta}_q \to b(\mathring{\Delta}_q) \subset |K|$ ist topologisch, b^{-1} ist die dazu inverse Abbildung.] Da $b(\mathring{\Delta}_q)$ gerade alle Zellen von $|K|$ durchläuft, ist $|f|$ wirklich eindeutig definiert.

Mit (1) äquivalent ist offenbar

$$|f| \circ b|\mathring{\Delta}_q = fb|\mathring{\Delta}_q \quad \text{für alle nicht ausgearteten } b \in K_q. \tag{2}$$

Daraus folgt schärfer

$$|f| \circ a|\mathring{\Delta}_p = fa|\mathring{\Delta}_p \quad \text{für alle } a \in K_p,\ p = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Wir können nämlich nach dem Hilfssatz in 2.1 $a = \beta^* b$ setzen mit nicht ausgeartetem $b \in K_q$ und $\beta: [p] \xrightarrow{\text{auf}} [q]$. Nach Definition gilt

$$|f| \circ a = |f| \circ \beta^* b = |f| \circ b \circ \beta;$$

wegen $\beta(\mathring{\Delta}_p) \subset \mathring{\Delta}_q$ ist nach (2)

$$|f| \circ b \circ \beta|\mathring{\Delta}_p = fb \circ \beta|\mathring{\Delta}_p,$$

und weil f eine CSS-Abbildung ist, haben wir

$$fb \circ \beta = \beta^* fb = f\beta^* b = fa.$$

Zusammengefaßt ergibt das (3). Schließlich folgt sogar

$$|f| \circ a = fa \quad \text{auf ganz } \Delta_p,\ a \in K_p,\ p = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

---

[7]) Für eine Folge von topologischen Räumen $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ definiert man $\lim_{n\to\infty} X_n$ als die Menge $\bigcup_n X_n$ mit folgender Topologie: Eine Teilmenge $A \subset \bigcup_n X_n$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $A \cap X_n$ für jedes n in X_n offen (abgeschlossen) ist. Sind alle X_n CW-Komplexe, und ist X_n für jedes n Teilkomplex von X_{n+1}, so ist offenbar auch $\lim_{n\to\infty} X_n$ ein CW-Komplex.

Zum Beweis betrachten wir irgendein $t \in \Delta_p$. Es gibt eine (streng) monotone Abbildung $\gamma: [r] \to [q]$ (und damit $\gamma: \Delta_r \to \Delta_p$) und ein $t' \in \mathring{\Delta}_r$, so daß $t = \gamma(t')$ ist. Dann ist

$$|f|(a(t)) = |f|(a(\gamma(t'))) = |f|((\gamma^* a)(t')) = (f\gamma^* a)(t') \qquad \text{nach (3)}$$
$$= (\gamma^* f a)(t') = f a(\gamma(t')) = f a(t).$$

Da $a: \Delta_p \to a(\Delta_p) \subset |K|$ eine Identifizierungsabbildung ist (Δ_p ist kompakt, und $|K|$ ist ein Hausdorffscher Raum), ergibt sich aus der Stetigkeit von $fa: \Delta_p \to |K'|$ die von $|f|\,|a(\Delta_p)$. Insbesondere ist $|f|$ auf allen abgeschlossenen Zellen von $|K|$ stetig, und es folgt [s. WHITEHEAD [13] § 5 (A)]:

A. *$|f|$ ist stetig.*

Eine unmittelbare Folge der Definition von $|f|$ ist:

B. *$|f' \circ f| = |f'| \circ |f|$ für zwei CSS-Abbildungen $f: K \to K'$, $f': K' \to K''$. $f|$ ist die Identität von $|K|$, wenn $f: K \to K$ die Identität von K ist.*

Aus A. und B. folgt sofort:

C. *Die geometrische Realisierung $|K|$ eines CSS-Komplexes K ist bis auf Homöomorphie durch K eindeutig bestimmt.*

Wir stellen ferner fest:

D. *Ist L ein CSS-Unterkomplex von K, so kann man $|L|$ als CW-Teilkomplex von $|K|$ auffassen, und die Injektion $j: L \to K$ induziert die Injektion $j|: |L| \to |K|$.*

Beweis. Wie man leicht sieht, ist $a(\dot{\Delta}_p) \subset |K|$ für jedes $a \in K_p$ ein CW-Teilkomplex. Seine Zellen entsprechen den nicht ausgearteten $b \in K$, die man erhält, wenn man $\gamma^* a$ für jedes monotone $\gamma: [r] \to [p]$ gemäß dem Hilfssatz von 2.1 in der Form $\gamma^* a = \beta^* b$ schreibt ($\beta: [r] \xrightarrow{\text{auf}} [q]$). Liegt a in L, so auch jedes so konstruierte b, denn die Konstruktion verläuft ganz innerhalb des CSS-Komplexes L. Also ist $X = \bigcup_p \bigcup_{a \in L_p} a(\Delta_p)$ ein CW-Teilkomplex von $|K|$ und besteht aus den Zellen von $|K|$, die den nicht ausgearteten Elementen von L entsprechen. Das zeigt, daß X eine geometrische Realisierung von L ist. Nimmt man $X \subset |K|$ für $|L|$, so ist $|j|: |L| \to |K|$ nach seiner Definition die Injektion.

E. *Ist $f: K \to K'$ eine CSS-Abbildung auf K', so ist $|f|: |K| \to |K'|$ eine Identifizierungsabbildung.*

Beweis. Jeder Punkt $x' \in |K'|$ liegt in einer Zelle $b'(\mathring{\Delta}_q)$, wobei b' ein nicht ausgeartetes Element von K'_q ist. Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in K_q$ mit $b' = fb$. Es folgt: $x' \in fb(\mathring{\Delta}_q) = |f|(b(\mathring{\Delta}_q))$ nach (4), also $x' \in |f|(|K|)$, d.h. $|f|$ ist eine Abbildung auf $|K'|$.

Nun muß noch gezeigt werden, daß jede Teilmenge $A \subset |K'|$, für die $|f|^{-1}(A)$ abgeschlossen ist, selbst abgeschlossen ist. Weil $|K'|$ ein CW-Komplex ist, genügt es zu zeigen, daß der Durchschnitt von A mit der abgeschlossenen Hülle jeder Zelle, d.h. mit jedem $b'(\Delta_q)$ abgeschlossen ist (schwache Topologie,

vgl. WHITEHEAD [13] § 5). $b'\colon \Delta_q \to b'(\Delta_q)$ ist eine Identifizierungsabbildung (weil Δ_q kompakt und $|K'|$ ein Hausdorffscher Raum ist), also braucht man nur zu beweisen, daß $b'^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Wie oben sei $b' = fb$, $b \in K_q$. Dann ist nach (4) $b'^{-1}(A) = b^{-1}|f|^{-1}(A)$. Das ist aber eine abgeschlossene Menge, weil $|f|^{-1}(A)$ abgeschlossen und $b\colon \Delta_q \to |K|$ stetig ist.

2.4. Produkte von CW-Komplexen. Das topologische Produkt $X \times X'$ zweier CW-Komplexe X, X' ist ein hüllenfiniter Zellenkomplex (s. WHITEHEAD [13] § 4 und § 5 (H)) mit den Zellen $e^r \times {}'e^s$ (e^r, ${}'e^s$ sind die Zellen von X bzw. X'). $X \times X'$ trägt (wie DOWKER durch ein Gegenbeispiel zeigte[7a]) nicht immer die schwache Topologie bezüglich dieser Zellenzerlegung, d.h. $X \times X'$ ist kein CW-Komplex. Wir erhalten aber einen CW-Komplex, wenn wir in der Menge $X \times X'$ folgende neue Topologie (die *schwache* Topologie) einführen: $A \subset X \times X'$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $A \cap (\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s})$ für jedes Paar von Zellen $e^r \subset X$, ${}'e^s \subset X'$ in $\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s}$ offen (abgeschlossen) ist. ($\overline{e^r}$, $\overline{{}'e^s}$ sind die abgeschlossenen Hüllen von e^r bzw. ${}'e^s$ in X bzw. X'.) Den Zellenkomplex $X \times X'$, versehen mit dieser Topologie, bezeichnen wir mit $X \otimes X'$.

Die Topologie von $X \otimes X'$ ist offenbar feiner als die Produkttopologie in $X \times X'$. In vielen Fällen ist sie sogar dieselbe, denn es gilt:

A. *Für abzählbare CW-Komplexe X, X' (d.h. CW-Komplexe mit abzählbar vielen Zellen) stimmen die Topologien von $X \otimes X'$ und $X \times X'$ überein: $X \otimes X' = X \times X'$.*

(Unter „abzählbar" wird hier und im folgenden immer endlich oder abzählbar unendlich verstanden.) Zum Beweis vgl. z.B. MILNOR [10] Lemma 2.1.

Für beliebige CW-Komplexe X, X' gilt noch:

B. *Die kompakten Teilmengen von $X \otimes X'$ sind dieselben wie die von $X \times X'$, und die auf ihnen induzierten Topologien sind gleich.*

Beweis. Jedes kompakte $C \subset X \otimes X'$ ist auch kompakt in $X \times X'$ (wegen der Stetigkeit der Identität $X \otimes X' \to X \times X'$). Jedes kompakte $C \subset X \times X'$ ist in $p(C) \times p'(C)$ enthalten (wobei $p\colon X \times X' \to X$ und $p'\colon X \times X' \to X'$ die Projektionen sind). Als kompakte Mengen liegen $p(C)$, $p'(C)$ in endlichen Teilkomplexen Y, Y' von X bzw. X' (s. [13] § 5 (D),) d.h. $C \subset Y \times Y'$. $Y \times Y'$ und $Y \otimes Y'$ haben aber dieselbe Topologie, was man entweder aus A. entnimmt oder sehr leicht direkt bestätigt. Also ist C auch kompakt in $Y \otimes Y' \subset X \otimes X'$, und $X \times X'$ und $X \otimes X'$ induzieren dieselbe Topologie auf C.

2.5. Produkte von CSS-Komplexen und ihre geometrische Realisierung. Zu zwei CSS-Komplexen $K = \bigcup_q K_q$, $K' = \bigcup_q K'_q$ wird das *Produkt* $K \times K' = \bigcup_q (K \times K')_q$ folgendermaßen definiert (vgl. EILENBERG-ZILBER [8]): $(K \times K')_q$ ist die Produktmenge $K_q \times K'_q$, und zu einer monotonen Abbildung $\beta\colon [p] \to [q]$ gehört die Abbildung $\beta^*\colon (K \times K')_q \to (K \times K')_p$, definiert durch $\beta^*(a, a') = (\beta^* a, \beta^* a')$, $a \in K_q$, $a' \in K'_q$. Wie man ohne Schwierigkeiten bestätigt, ist z.B. $S(X \times X') = S(X) \times S(X')$ für irgend zwei topologische Räume X, X'.

[7a]) DOWKER, C. H.: Topology of metric complexes. Amer. J. Math. **74**, 555–577 (1952), Chapt. III, 5.

Wir definieren eine CSS-Abbildung $i: K \times K' \to S(|K| \otimes |K'|)$ durch

$$i(a, a')(t) = (a(t), a'(t)), \qquad t \in \Delta_q \tag{1}$$

für alle $a \in K_q \subset S_q(|K|)$, $a' \in K'_q \subset S_q(|K'|)$, $q = 0, 1, \ldots$. Die Abbildung $i(a, a'): \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$ ist stetig, weil sie es als Abbildung in $|K| \times |K'|$ ist, und weil ihr Bild kompakt ist (vgl. 2.4 B.). Daß i tatsächlich eine CSS-Abbildung ist, bestätigt man sehr leicht.

Satz 5. *K, K' seien beliebige CSS-Komplexe. Es gibt eine CW-Zellenzerlegung von $|K| \otimes |K'|$, die eine Unterteilung der ursprünglichen (vgl. 2.4) ist, so daß $|K| \otimes |K'|$ (mit der neuen Zellenzerlegung) zusammen mit der durch* (1) *definierten CSS-Abbildung $i: K \times K' \to S(|K| \otimes |K'|)$ eine geometrische Realisierung von $K \times K'$ ist.*

Entsprechend der Vereinbarung zu Beginn von 2.3 identifizieren wir dann $(a, a') \in K \times K'$ mit $i(a, a') \in S(|K| \otimes |K'|)$ und haben an Stelle von (1)

$$(a, a')(t) = (a(t), a'(t)), \qquad t \in \Delta_q. \tag{2}$$

Beweis von Satz 5. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $K = O'(X)$, $K' = O'(X')$ für zwei endliche (d.h. aus endlich vielen Simplexen bestehende) geordnete simpliziale Komplexe X, X' (vgl. 1.1 Beispiel 2). Bekanntlich (siehe z.B. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. II § 8) besitzt $X \times X'$ folgende simpliziale Zerlegung: Die Ecken sind die Paare (P, P') von Ecken P, P' von X bzw. X'. Man definiert eine Teilordnung der Ecken durch die Forderung, daß $(P, P') \leq (Q, Q')$ mit $P \leq Q$ (in X) und $P' \leq Q'$ (in X') äquivalent sein soll. Eine endliche Menge von Ecken $M = \{(P_j, P'_j)\}$ bildet genau dann ein Simplex von $X \times X'$, wenn die Ecken P_j und P'_j alle einem Simplex von X bzw. X' angehören, und wenn die Teilordnung $\leq$ in M eine strenge Ordnung induziert, d.h. wenn bei geeigneter Numerierung

$$(P_0, P'_0) < (P_1, P'_1) < \cdots < (P_q, P'_q)$$

gilt. Faßt man die Elemente von $O'_q(X)$, $O'_q(X')$ und $O'_q(X \times X')$ als geordnete $(q+1)$-tupel von Ecken auf (vgl. 1.1 Beispiel 2), so liefert die Zuordnung

$$((P_0, P'_0), \ldots, (P_q, P'_q)) \leftrightarrow ((P_0, \ldots, P_q), (P'_0, \ldots, P'_q))$$

die Isomorphie der CSS-Komplexe

$$O'(X \times X') = O'(X) \times O'(X'). \tag{3}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch die Abbildungen β^* auf beiden Seiten einander entsprechen. Nach 2.1 Beispiel 1 folgt aus (3)

$$|O'(X)| \times |O'(X')| = X \times X' = |O'(X \times X')| = |O'(X) \times O'(X')|,$$

d.h. die Behauptung des Satzes in dem betrachteten Spezialfall.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns dem allgemeinen Fall beliebiger CSS-Komplexe K, K' zu. Die Abbildung $i(a, a'): \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$, $\iota \in K_q$, $a' \in K'_q$ [vgl. (1)] setzt sich aus der Injektion der Diagonalen $\delta: \Delta_q \to \Delta_q \times \Delta_q$ [$\delta(t) = (t, t)$ für alle $t \in \Delta_q$] und der Produktabbildung $a \times a': \Delta_q \times \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$ zusammen. (Letztere ist stetig, weil sie als Abbildung in $|K| \times |K'|$ stetig

ist und ihr Bild kompakt ist, vgl. 2.4 B.) Schreibt man (a, a') in der Form $(\beta^* b, \beta'^* b')$ mit nicht ausgearteten $b \in K_r$, $b' \in K'_s$ und monotonen Abbildungen $\beta\colon [q] \xrightarrow{\text{auf}} [r]$, $\beta'\colon [q] \xrightarrow{\text{auf}} [s]$ (vgl. den Hilfssatz in 2.1), so läßt sich $i(a, a') = (a \times a') \circ \delta$ in

$$\Delta_q \xrightarrow{\delta} \Delta_q \times \Delta_q \xrightarrow{\beta \times \beta'} \Delta_r \times \Delta_s \xrightarrow{b \times b'} \overline{e^r} \times \overline{{}'e^s} \subset |K| \otimes |K'|$$

zerlegen. Die vorkommenden euklidischen Simplexe können wir als simpliziale Komplexe auffassen und nach der Vorbemerkung über simpliziale Komplexe auch ihre topologischen Produkte. Dann ist $(\beta \times \beta') \circ \delta \in O'(\Delta_r \times \Delta_s)$ und entspricht bei der Isomorphie (3) dem Element $(\beta, \beta') \in O'(\Delta_r) \times O'(\Delta_s)$. Die Elemente

$$(\beta \times \beta') \circ \delta \in O'(\Delta_r \times \Delta_s)$$
$$(\beta, \beta') \in O'(\Delta_r) \times O'(\Delta_s)$$
$$(\beta^* b, \beta'^* b') \in K \times K'$$

sind alle drei zugleich ausgeartet oder nicht.

[Für die ersten beiden ist das klar wegen der Isomorphie (3). Wir brauchen es nur noch für die beiden letzten zu beweisen: Ist $(\beta, \beta') = s_j(\gamma, \gamma') = (\eta_j^* \gamma, \eta_j^* \gamma') = (\gamma \circ \eta_j, \gamma' \circ \eta_j)$, so ist $(\beta^* b, \beta'^* b') = (\eta_j^* \gamma^* b, \eta_j^* \gamma'^* b') = s_j(\gamma^* b, \gamma'^* b')$. Wenn umgekehrt $(\beta^* b, \beta'^* b') = s_j(c, c')$ vorausgesetzt wird, so schreiben wir c, c' gemäß dem Hilfssatz in 2.1 in der Form $c = \beta_1^* b_1$, $c' = \beta_1'^* b_1'$ mit nicht ausgearteten $b_1 \in K_{r_1}$, $b_1' \in K'_{s_1}$ und $\beta_1\colon [q-1] \xrightarrow{\text{auf}} [r_1]$, $\beta_1'\colon [q-1] \xrightarrow{\text{auf}} [s_1]$. Dann ist

$$\beta^* b = \eta_j^* \beta_1^* b_1 = (\beta_1 \circ \eta_j)^* b_1$$
$$\beta'^* b' = \eta_j^* \beta_1'^* b_1' = (\beta_1' \circ \eta_j)^* b_1',$$

und wegen der Eindeutigkeitsaussage des zitierten Hilfssatzes folgt $b_1 = b$, $b_1' = b'$ und $\beta = \beta_1 \circ \eta_j$, $\beta' = \beta_1' \circ \eta_j$, d. h. $(\beta, \beta') = s_j(\beta_1, \beta_1')$.]

Im nicht ausgearteten Fall ist $(\beta \times \beta') \circ \delta$ eine topologische Abbildung. Weil β, β' Abbildungen auf $[r]$ bzw. $[s]$ sein sollten, ist

$$(\beta \times \beta')\, \delta\left(\mathring{\Delta}_q\right) \subset \mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s = \Delta_r \times \Delta_s - \dot{\partial}(\Delta_r \times \Delta_s).$$

$\mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s$ wird aber durch $b \times b'$ topologisch auf die Zelle $e^r \times {}'e^s$ abgebildet; also gilt:

a) Für nicht ausgeartetes $(a, a') \in (K \times K')_q$ wird $\mathring{\Delta}_q$ durch $i(a, a')$ topologisch auf eine Teilmenge von $|K| \otimes |K'|$ abgebildet.

Durchlaufen β und β' alle monotonen Abbildungen auf $[r]$ bzw. $[s]$, für die (β, β') nicht ausgeartet ist, so durchläuft $(\beta \times \beta')\, \delta(\Delta_q)$ gerade die Simplexe von $\Delta_r \times \Delta_s$, die nicht ganz auf dem Rande $\dot{\partial}(\Delta_r \times \Delta_s)$ liegen. $\{(\beta \times \beta')\, \delta(\mathring{\Delta}_q)\}$ ist also eine Zerlegung von $\mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s$, die sich durch $b \times b'$ auf $e^r \times {}'e^s$ überträgt. Läßt man nun auch b, b' und entsprechend $e^r, {}'e^s$ variieren, so ergibt sich:

b) Die Zellen $i(a, a')(\mathring{\Delta}_q)$ bilden eine Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$, wenn (a, a') alle nicht ausgearteten Elemente von $K \times K'$ durchläuft.

Zugleich haben wir gesehen (wenn man noch bedenkt, daß $\Delta_r \times \Delta_s$ nur aus endlich vielen Simplexen besteht):

c) Jede Zelle $e^r \times {}'e^s \subset |K| \otimes |K'|$ ist Vereinigung von endlich vielen Zellen der Zerlegung b).

Aus a) – c) folgt nun leicht, daß die neue Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$ einen CW-Komplex bildet: Nach a) und b) ist es eine Zerlegung in Zellen; nach a) gibt es für jede Zelle eine charakteristische Abbildung, d.h. die Zerlegung bildet einen Zellenkomplex (vgl. WHITEHEAD [*13*] § 4). Er ist nach c) hüllenfinit und trägt die schwache Topologie (vgl. [*13*] § 5), weil die ursprüngliche Zerlegung $\{e^r \times {}'e^s\}$ diese Eigenschaften hat.

[Beweis. Ein Zellenkomplex heißt hüllenfinit, wenn jede Zelle in einem endlichen Teilkomplex liegt. Jede Zelle der Zerlegung b) liegt nach c) in einer Zelle $e^r \times {}'e^s$. Diese liegt in einem endlichen Teilkomplex Y von $|K| \otimes |K'|$ bezüglich der ursprünglichen CW-Zerlegung. Nach c) ist Y auch endlicher Teilkomplex bezüglich der Zerlegung b), also ist die Zellenzerlegung b) hüllenfinit.

Ein Zellenkomplex trägt die schwache Topologie, wenn eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle jeder Zelle abgeschlossen ist. Ist $A \subset |K| \otimes |K'|$ abgeschlossen, so offenbar auch $A \cap \overline{{}''e^q}$ für jede Zelle ${}''e^q$ der Zerlegung b). Ist umgekehrt $A \cap \overline{{}''e^q}$ für jedes ${}''e^q$ abgeschlossen, so ist auch

$$\bigcup_{{}''e^q \subset e^r \times {}'e^s} A \cap \overline{{}''e^q} = A \cap (\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s})$$

für jedes $e^r \times {}'e^s \subset |K| \otimes |K'|$ abgeschlossen, da $e^r \times {}'e^s$ nach c) nur endlich viele ${}''e^q$ enthält. Nach Definition der Topologie in $|K| \otimes |K'|$ (vgl. 2.4) folgt daraus, daß A abgeschlossen ist. Damit ist gezeigt, daß $|K| \otimes |K'|$ die schwache Topologie bezüglich der Zerlegung b) trägt.]

$|K| \otimes |K'|$ mit der Zerlegung b) besitzt also tatsächlich alle Eigenschaften eines CW-Komplexes. c) zeigt zugleich, daß dieser CW-Komplex eine Unterteilung der ursprünglichen CW-Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$ ist, und aus a) und b) geht hervor, daß er den CSS-Komplex $K \times K'$ vermöge der CSS-Abbildung i geometrisch realisiert. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Aus Satz 5 folgt für drei CSS-Komplexe K, K', K''

$$|K \times K' \times K''| = |K \times K'| \otimes |K''| = |K| \otimes |K'| \otimes |K''|,$$

und die Einbettung $K \times K' \times K'' \subset S(|K| \otimes |K'| \otimes |K''|)$ ist offenbar [vgl. (2)] durch

$$(a, a', a'')(t) = ((a, a')(t), a''(t)) = (a(t), a'(t), a''(t)),$$
$$t \in \Delta_q,\ (a, a', a'') \in K_q \times K'_q \times K''_q, \qquad q = 0, 1, \ldots$$

gegeben. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu

Folgerung A. *Sind* ${}^1K, {}^2K, \ldots, {}^nK$ *CSS-Komplexe, so läßt sich* ${}^1K \times \cdots \times {}^nK$ *so durch* $|{}^1K| \otimes \cdots \otimes |{}^nK|$ *(mit einer geeigneten CW-Zerlegung, die die ursprüng-*

liche von 2.4 unterteilt) geometrisch realisieren, daß für alle

$$(a_1, \dots, a_n) \in {}^1K_q \times \cdots \times {}^nK_q \subset S_q(|{}^1K| \otimes \cdots \otimes |{}^nK|), \qquad q = 0, 1, \dots$$

gilt

$$(a_1, \dots, a_n)(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)), \qquad t \in \Delta_q. \tag{4}$$

Um später darauf zurückgreifen zu können, heben wir noch hervor:

Folgerung B. *K sei ein CSS-Komplex. Zu jedem System $x_1, \dots, x_n \in |K|$ von endlich vielen Punkten gibt es ein System $a_1, \dots, a_n \in K_q \subset S_q(|K|)$ (für ein geeignetes q) und einen Punkt $t \in \Delta_q$ (der nicht von j abhängt), so daß $a_j(t) = x_j$ ist.*

Beweis. Wir fassen $(x_1, \dots, x_n)$ als Punkt von $|K| \otimes \cdots \otimes |K| = |K \times \cdots \times K|$ auf. Dann gibt es nach Definition des Begriffs der geometrischen Realisierung (s. 2.1) ein $(a_1, \dots, a_n) \in K_q \times \cdots \times K_q \subset S_q(|K| \otimes \cdots \otimes |K|)$ mit $(x_1, \dots, x_n) \in (a_1, \dots, a_n)(\Delta_q)$, also $x_j = a_j(t)$ für ein $t \in \Delta_q$ [vgl. (4)].

2.6. Geometrische Realisierung von CSS-Gruppen. Eine *mit der CSS-Struktur verträgliche Verknüpfung* in einem CSS-Komplex K ist eine CSS-Abbildung $v: K \times K \to K$. (Beispiel: Die Gruppenoperation in einer CSS-Gruppe K.) Sie induziert eine stetige Abbildung

$$|v|: |K| \otimes |K| = |K \times K| \to |K|$$

(vgl. 2.3 und 2.5 Satz 5). Das ist eine Verknüpfung in $|K|$, die zwar im allgemeinen als solche nicht stetig ist — dazu müßte $|v|: |K| \times |K| \to |K|$ stetig sein —, die aber wegen 2.4 B. auf kompakten Teilmengen von $|K| \times |K|$ stetig ist (vgl. 1.2 Beispiel 1). Falls K ein abzählbarer CSS-Komplex ist (d.h. abzählbar viele Elemente besitzt), ist sie dagegen wegen 2.4 A. sogar schlechthin stetig. Nach Definition von $|v|$ [vgl. 2.3 (4)] gilt für jedes

$$(a, a') \in K_q \times K_q \subset S_q(|K| \otimes |K|)$$

$$|v|((a, a')(t)) = v(a, a')(t), \qquad t \in \Delta_q$$

und unter Beachtung von 2.5 (2)

$$|v|(a(t), a'(t)) = v(a, a')(t), \qquad t \in \Delta_q. \tag{1}$$

Diese Gleichung charakterisiert die Verknüpfung in $|K|$, da sich jedes Punktepaar $x, x' \in |K|$ in der Form $x = a(t)$, $x' = a(t)$ mit dem gleichen $t \in \Delta_q$ schreiben läßt (s. 2.5 Folgerung B).

Die Verknüpfungen $v: K \times K \to K$, die im folgenden vorkommen, werden entweder multiplikativ: $v(a, a') = a \cdot a'$, oder additiv: $v(a, a') = a + a'$, geschrieben werden; entsprechend $|v|(x, x') = x \cdot x'$ bzw. $|v|(x, x') = x + x'$. Dann haben wir an Stelle von (1)

$$(a \cdot a')(t) = a(t) \cdot a'(t), \qquad t \in \Delta_q \tag{2}$$

bzw.

$$(a + a')(t) = a(t) + a'(t), \qquad t \in \Delta_q. \tag{3}$$

Für den Rest dieses Abschnitts benutzen wir die multiplikative Schreibweise.

9272-68

Viele Eigenschaften der Verknüpfung v in K übertragen sich auf die Verknüpfung $|v|$ in $|K|$:

A. *Ist v assoziativ, so auch $|v|$.*

Beweis. Für jedes Tripel $x, x', x'' \in |K|$ gibt es nach 2.5 Folgerung B ein Tripel $a, a', a'' \in K_q$ und ein $t \in \Delta_q$, so daß $x = a(t)$, $x' = a'(t)$, $x'' = a''(t)$ ist. Die Gleichung $(x \cdot x') \cdot x'' = x \cdot (x' \cdot x'')$ folgt nun unmittelbar aus (2) und der Assoziativität von v.

Ganz entsprechend ergibt sich:

B. *Ist v kommutativ, so auch $|v|$.*

Wir sagen, daß die Verknüpfung v ein *neutrales Element* besitzt, wenn es ein $e_0 \in K_0$ gibt, so daß für jedes q und jedes $a \in K_q$ gilt: $e_q \cdot a = a$ und $a \cdot e_q = a$ mit $e_q = (s_0)^q e_0$. $e \in |K|$ heißt neutrales Element für $|v|$, wenn $e \cdot x = x$ und $x \cdot e = x$ für jedes $x \in |K|$ gilt.

C. *Besitzt v ein neutrales Element, so auch $|v|$.*

Beweis. Wir setzen $e = e_0(\Delta_0)$; dann ist auch $e = e_q(t)$ für alle $t \in \Delta_q$, also ist für jedes $a \in K_q$

$$\begin{aligned} e \cdot a(t) &= e_q(t) \cdot a(t) = (e_q \cdot a)(t) \quad \text{nach (2)} \\ &= a(t) \quad \text{nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Da sich jedes $x \in |K|$ in der Form $x = a(t)$ schreiben läßt, folgt $e \cdot x = x$ für alle $x \in |K|$. Ebenso erhält man $x \cdot e = x$.

v sei eine Verknüpfung in K, die ein neutrales Element besitzt. $\bar{a} \in K_q$ heißt invers zu $a \in K_q$ bezüglich v, wenn $\bar{a} \cdot a = e_q$ und $a \cdot \bar{a} = e_q$ ist. Entsprechend ist der Begriff des inversen Elements bezüglich $|v|$ definiert.

D. *v sei eine Verknüpfung mit neutralem Element. Besitzt jedes Element von K ein Inverses bezüglich v, so besitzt auch jedes Element von $|K|$ ein Inverses bezüglich $|v|$.*

Beweis. Aus $\bar{a} \cdot a = e_q$ und $a \cdot \bar{a} = e_q$ folgt nach (2) $\bar{a}(t) \cdot a(t) = e_q(t) = e$ (vgl. den Beweis zu C.) und ebenso $a(t) \cdot \bar{a}(t) = e$, also ist $\bar{a}(t)$ invers zu $a(t)$. In der Form $x = a(t)$ läßt sich aber jeder Punkt $x \in |K|$ schreiben.

Ist K eine (abelsche) CSS-Gruppe, so sind die Voraussetzungen und daher auch die Behauptungen von A., (B.,) C. und D. erfüllt, wenn man für v die Gruppenoperation nimmt. Folglich ist $|K|$ eine (abelsche) Gruppe mit der Gruppenoperation $|v|$. In diesem Fall gibt es zu jedem $a \in K_q$, $q = 0, 1, \ldots$, sogar ein eindeutig bestimmtes Inverses a^{-1}, und die Festsetzung $ua = a^{-1}$ definiert eine CSS-Abbildung $u: K \to K$. Der Beweis von D. zeigt, daß $a^{-1}(t)$ für jedes $t \in \Delta_q$ in $|K|$ zu $a(t)$ invers ist, d.h.

$$a^{-1}(t) = (a(t))^{-1}. \tag{4}$$

Bei additiver Schreibweise würde die entsprechende Gleichung lauten:

$$(-a)(t) = -a(t). \tag{5}$$

Aus der Definition der induzierten Abbildung [vgl. 2.3 (4)] folgt $|u|(a(t)) = (ua)(t) = a^{-1}(t)$, also wegen (4): $|u|(a(t)) = (a(t))^{-1}$, d.h. der Übergang zum

Inversen in $|K|$ ist die stetige Abbildung $|u|$. Zusammenfassend können wir daher feststellen:

Satz 6. *Ist K eine (abelsche) CSS-Gruppe, so wird in $|K|$ eine (abelsche) Gruppenstruktur induziert. Der Übergang zum Inversen ist stetig; die Gruppenmultiplikation ist stetig auf kompakten Teilmengen von $|K|\times|K|$, d.h. $|K|$ ist eine (abelsche) C-Gruppe (vgl. 1.2 Beispiel 1). Ist K abzählbar, so ist $|K|$ sogar eine (abelsche) topologische Gruppe.*

2.7. Die Isomorphie der Homologiegruppen eines CSS-Komplexes und seiner geometrischen Realisierung. $L<K$ (L darf leer sein) sei ein Paar von CSS-Komplexen, $|L|<|K|$ das entsprechende Paar ihrer geometrischen Realisierungen (vgl. 2.3 D.). Nach 1.4 haben wir einerseits die Homologiegruppen

$$H_q(K,L)=\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L),$$

andererseits die singulären Homologiegruppen

$$H_q(|K|,|L|)=H_q\big(S(|K|),S(|L|)\big)=\mathfrak{H}_q\big(\Gamma S(|K|)/\Gamma S(|L|)\big)$$

Satz 7. *Der durch die natürliche Injektion $i\colon K\to S\big(|K|\big)$ induzierte Homomorphismus (vgl. 1.5)*

$$i_H\colon\ H_q(K,L)\to H_q\big(S(|K|),S(|L|)\big)=H_q(|K|,|L|)$$

ist ein Isomorphismus für alle q.

Wir benutzen zum Beweis dieses Satzes den Begriff des normalisierten Komplexes K_N einer abelschen CSS-Gruppe K im Sinne von Eilenberg-MacLane [5] § 4. (Wie schon in 1.2 bemerkt, ist eine abelsche CSS-Gruppe dasselbe wie ein FD-Komplex in [5].) $D_q(K)$ sei die von den ausgearteten Elementen von K_q erzeugte Untergruppe von K_q. Für jedes ausgeartete $a=s_ja'\in K_q$ gilt

$$\begin{aligned}
da&=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i d_i s_j a'\\
&=\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i s_{j-1}d_i a'+(-1)^j a'+(-1)^{j+1}a'+\\
&\qquad\qquad+\sum_{i=j+2}^{q}(-1)^i s_j d_{i-1}a' \qquad \text{nach 1.1 (Vt), S. 371}\\
&=s_{j-1}\Big(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i d_i a'\Big)+s_j\Big(\sum_{i=j+2}^{q}(-1)^i d_{i-1}a'\Big)\in D_{q-1}(K).
\end{aligned}$$

Die $D_q(K)$ bilden also einen Unterkomplex $D(K)$ des Kettenkomplexes (K,d). Folglich ist auch $K/D(K)$ ein Kettenkomplex. Man nennt ihn den *normalisierten Komplex* K_N von K.

Beweis von Satz 7. Wir bilden den normalisierten Komplex $(\Gamma K/\Gamma L)_N$ der abelschen CSS-Gruppe $\Gamma K/\Gamma L$. Nach Eilenberg-MacLane [5] Th. 4.1 induziert die natürliche Projektion $\Gamma K/\Gamma L\to(\Gamma K/\Gamma L)_N$ Isomorphismen der

Homologiegruppen $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) \to \mathfrak{H}_q((\Gamma K/\Gamma L)_N)$. Andererseits ist $(\Gamma K/\Gamma L)_N$ nichts anderes als der Komplex der Zellenketten von $|K| \bmod |L|$, dessen Homologiegruppen mit den singulären Homologiegruppen von $|K| \bmod |L|$ in natürlicher Weise isomorph sind. Obwohl letzteres bekannt ist, scheint keine ausführliche Darstellung in der Literatur zu existieren. Wir müssen daher noch etwas genauer darauf eingehen und folgen dabei im wesentlichen einer Vorlesung von SEIFERT:

X sei ein CW-Komplex. Mit $X^{(q)}$ bezeichnen wir das q-dimensionale Gerüst, d.h. die Vereinigung aller Zellen, deren Dimension $\leq q$ ist. Unter dem Träger $|\sigma|$ eines singulären Simplexes $\sigma: \Delta_q \to X$ versteht man die Punktmenge $\sigma(\Delta_q)$, unter dem Träger $|c|$ einer singulären Kette $c = \sum_i n_i \sigma_i$ die Vereinigung $\bigcup_{n_i \neq 0} |\sigma_i|$. $N_q \subset \Gamma_q S(X)$ sei die Menge derjenigen singulären Ketten c, die den Bedingungen

$$|c| \subset X^{(q)}, \quad |dc| \subset X^{(q-1)}$$

genügen. N_q ist eine Untergruppe von $\Gamma_q S(X)$, und alle N_q zusammen bilden offenbar einen Unterkomplex N des Kettenkomplexes $\Gamma S(X)$. Jedes $c \in N_q$ besitzt über jeder q-Zelle e^q von X einen Grad (dessen Vorzeichen nach Wahl einer Orientierung von e^q bestimmt ist), c repräsentiert nämlich ein Element von

$$H_q(X^{(q)}, X^{(q)} - e^q) \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q)} - x) \qquad (x \in e^q)$$
$$\cong H_q(e^q, e^q - x) \cong \Gamma \qquad (= \text{Gruppe der ganzen Zahlen}).$$

Hilfssatz (Ausfegungssatz). *Sei $X^{(n)}$ ein n-dimensionaler CW-Komplex $(n > 0)$, e^n eine seiner n-Zellen und $c \in \Gamma_q S(X^{(n)})$ eine q-Kette, deren Rand dc auf $X^{(n-1)}$ liegt (d. h. $|dc| \subset X^{(n-1)}$). Wenn $q \neq n$ ist, oder wenn $q = n$ und der Grad von c über e^n gleich 0 ist, so gibt es eine zu c homologe Kette c', die in $X^{(n)} - e^n$ liegt.*

Beweis. Die Behauptung besagt, daß c das Nullelement von $H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - e^n)$ repräsentiert. Für $q \neq n$ ist das klar, weil

$$H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - e^n) \cong H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - x) \qquad (x \in e^n)$$
$$\cong H_q(e^n, e^n - x) = 0$$

ist. Für $q = n$ ist es nach der obigen Definition mit dem vorausgesetzten Verschwinden des Grades von c über e^n äquivalent.

Aus dem Hilfssatz folgt leicht:

A. *Die Injektion $j: N \to \Gamma S(X)$ induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Beweis. Wir werden zeigen, daß es zu jedem $c \in \Gamma S(X)$ mit $dc \in N$ ein homologes $c' \in N$ gibt. Dann ist insbesondere jeder Zykel (d.h. Element aus Kern d) von $\Gamma S(X)$ einem Zykel aus N homolog [Epimorphie[2]]; und ist $c = d\tilde{c} \in N$, $\tilde{c} \in \Gamma S(X)$, so braucht man nur $\tilde{c}$ durch eine homologe Kette

$\tilde{c}' \in N$ zu ersetzen, um zu sehen, daß $c = d\tilde{c} = d\tilde{c}'$ auch in N nullhomolog ist [Monomorphie[2]].

Sei nun $c \in \Gamma_q S(X)$ und $dc \in N$, also $|dc| < X^{(q-1)}$. Weil $|c|$ kompakt ist, liegt es bereits in einem endlichen Teilkomplex Y von X (vgl. WHITEHEAD [13] § 5 (D)). Sei n die Dimension von Y und $e_1^n < Y$ eine n-Zelle. Ist $n > q$, so gibt es nach dem Hilfssatz eine Kette $c_1 \sim c$ ($\sim$ bedeutet: homolog) mit $|c_1| < Y - e_1^n$. Analog findet man für $e_2^n < Y - e_1^n$ eine Kette $c_2 \sim c_1$ mit $|c_2| < Y - e_1^n - e_2^n$. In dieser Weise fortfahrend, kann man c erst aus allen n-Zellen von Y, dann (falls auch $n-1 > q$ ist) aus allen $(n-1)$-Zellen usw. „ausfegen", bis man zu $c' \sim c$ gelangt mit $|c'| < Y^{(q)} < X^{(q)}$. Aus $c' \sim c$ folgt $dc' = dc$, also $|dc'| = |dc| < X^{(q-1)}$. Folglich ist $c' \in N$, und A. ist bewiesen.

$\overset{\circ}{N}_q < N_q$ sei die Menge derjenigen Ketten, deren Grad über allen q-Zellen von X verschwindet. $\overset{\circ}{N}_q$ ist offenbar eine Untergruppe von N_q. Wir wollen zeigen, daß die $\overset{\circ}{N}_q$ einen Unterkomplex $\overset{\circ}{N}$ des Kettenkomplexes N bilden: Sei $c \in \overset{\circ}{N}_q$. Wegen $c \in N$ liegt $|c|$ in $X^{(q)}$ und $|dc|$ in $X^{(q-1)}$. Als kompakte Menge liegt $|c|$ in einem endlichen Teilkomplex $Y^{(q)}$ von $X^{(q)}$ (vgl. [13] § 5 (D)). Weil der Grad von c über jeder q-Zelle von $Y^{(q)}$ nach Voraussetzung verschwindet, läßt sich c nach dem Hilfssatz sukzessiv aus allen diesen q-Zellen ausfegen, und man erhält eine Kette $c' \sim c$ mit $|c'| < Y^{(q-1)} < X^{(q-1)}$. Dann ist aber insbesondere $dc = dc'$, dc ist also in $X^{(q-1)}$ nullhomolog. Erst recht repräsentiert dc das Nullelement von $H_{q-1}(X^{(q-1)}, X^{(q-1)} - e^{q-1})$ für jede $(q-1)$-Zelle e^{q-1}, d.h. $dc \in \overset{\circ}{N}_{q-1}$.

B. *Alle Homologiegruppen von $\overset{\circ}{N}$ verschwinden.*

Beweis. Sei $q > 0$ und $c \in N_q$ ein Zykel. $|c|$ liegt in einem endlichen Teilkomplex $Y^{(q)} < X^{(q)}$. Ist e_1^q eine q-Zelle von $Y^{(q)}$, so gibt es nach dem Hilfssatz (weil der Grad von c über e_1^q verschwindet) ein $c_1 \sim c$ mit $|c_1| < Y^{(q)} - e_1^q$. Analog findet man für $e_2^q < Y^{(q)} - e_1^q$ ein $c_2 \sim c_1$ mit $|c_2| < Y^{(q)} - e_1^q - e_2^q$. In dieser Weise fortfahrend, kann man c erst aus allen q-Zellen von $Y^{(q)}$, dann (falls $q-1 > 0$ ist) aus allen $(q-1)$-Zellen usw. „ausfegen", bis man zu $c' \sim c$ gelangt mit $|c'| < Y^{(0)}$. Alle diese Homologien bestehen in $Y^{(q)}$. Wegen $q > 0$ ist $c' \sim 0$ in $Y^{(0)}$, also $c \sim 0$ in $Y^{(q)}$, d.h. es gibt eine $(q+1)$-Kette $\tilde{c}$ mit $|\tilde{c}| < Y^{(q)}$ und $d\tilde{c} = c$. Daraus folgt aber $\tilde{c} \in \overset{\circ}{N}_{q+1}$, d.h. c ist auch in $\overset{\circ}{N}$ nullhomotop.

Damit ist $\mathfrak{H}_q(\overset{\circ}{N}) = 0$ für $q > 0$ gezeigt. Für $q = 0$ ist sogar $\overset{\circ}{N}_0 = 0$.

Aus B. und der Exaktheit der Homologiefolge (vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V Th. 3.7)

$$\cdots \mathfrak{H}_q(\overset{\circ}{N}) \to \mathfrak{H}_q(N) \to \mathfrak{H}_q(N/\overset{\circ}{N}) \to \mathfrak{H}_{q-1}(\overset{\circ}{N}) \to \cdots$$

ergibt sich sofort:

C. *Die Projektion $p: N \to N/\overset{\circ}{N}$ induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Ordnet man einem $c \in N_q$ die „Zellenkette" $\sum_i n_i e_i^q$ zu, wobei e_i^q die q-Zellen von X durchläuft und n_i der Grad von c über e_i^q ist (nach Wahl einer Orientierung von e_i^q), so erhält man einen Epimorphismus von N_q auf die Gruppe der Zellenketten, dessen Kern gerade $\overset{\circ}{N}_q$ ist. Es ist daher gerechtfertigt, $N/\overset{\circ}{N}$ als Komplex der Zellenketten zu bezeichnen. Aus A. und C. geht hervor, daß man die Homologiegruppen von X aus diesen Zellenketten berechnen kann.

Nun kehren wir zum Beweis von Satz 7 zurück und setzen $X = |K|$. ΓK wird durch $\Gamma i: \Gamma K \to \Gamma S(|K|)$ in den Unterkomplex N abgebildet. Wir können daher Γi aus einer Kettenabbildung $f: \Gamma K \to N$ und der Injektion $j: N \to \Gamma S(|K|)$ zusammensetzen und erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{j}{\nearrow} & \Gamma S(|K|) \\ \Gamma K & \xrightarrow{f} & N & & \\ & & & \underset{p}{\searrow} & N/\overset{\circ}{N} \end{array}$$

Jedes nicht ausgeartete $b \in K_q$ hat, aufgefaßt als Element von $N_q \subset \Gamma_q S(|K|)$, den Grad ± 1 über der Zelle $b(\overset{\circ}{\Delta}_q)$ und den Grad 0 über allen anderen q-Zellen. Für jedes ausgeartete $a \in K_q$ ist $a(\Delta_q) \subset |K|^{(q-1)}$, also liegt a, aufgefaßt als Element von N_q, in $\overset{\circ}{N}$. Daraus entnimmt man leicht, daß $p \circ f$ eine Abbildung auf $N/\overset{\circ}{N}$ ist, bei der gerade die Elemente von ΓK in 0 übergehen, die sich als Summen von ausgearteten Elementen darstellen lassen, d. h. Kern $p \circ f = D(\Gamma K)$, also setzt sich $p \circ f$ aus der natürlichen Projektion

$$\Gamma K \to \Gamma K / D(\Gamma K) = (\Gamma K)_N$$

auf den normalisierten Komplex und einem Isomorphismus $(\Gamma K)_N \cong N/\overset{\circ}{N}$ zusammen. $p \circ f$ induziert daher Isomorphismen der Homologiegruppen (nach [5] Th. 4.1). Nach C. induziert p Isomorphismen und daher auch f. Schließlich induziert j Isomorphismen (vgl. A.) und folglich auch $j \circ f = \Gamma i$. Satz 7 ist damit für den Fall bewiesen, daß L leer ist. Der allgemeine Fall folgt nun aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(L) & \to & H_q(K) & \to & H_q(K, L) & \to & H_{q-1}(L) & \to & H_{q-1}(K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_q(|L|) & \to & H_q(|K|) & \to & H_q(|K|, |L|) & \to & H_{q-1}(|L|) & \to & H_{q-1}(|K|) \end{array}$$

durch Anwendung des Fünferlemmas (vgl. [6] Chapt. I Lemma 4.3), das besagt: Wenn in einem kommutativen Diagramm der obigen Art die Zeilen exakt sind, und wenn alle vertikalen Homomorphismen bis eventuell auf den mittleren Isomorphismen sind, so ist auch der mittlere ein Isomorphismus.

2.8. Die Isomorphie der Homotopiegruppen einer CSS-Gruppe und ihrer geometrischen Realisierung.

Satz 8. *Ist K eine abelsche CSS-Gruppe, so ist der durch die Injektion $i: K \to S(|K|)$ induzierte Homomorphismus*

$$i_\pi: \pi_q(K) \to \pi_q(S(|K|)) = \pi_q(|K|, e)$$

ein Isomorphismus für alle q.

[Dabei ist $|K|$ eine abelsche C-Gruppe gemäß 2.6 Satz 6, e ihr neutrales Element, und $S(|K|)$ ist eine abelsche CSS-Gruppe nach 1.2 Beispiel 1.]

Beweis. E sei wie in 1.6 der aus den neutralen Elementen $e_q \in K_q$ bestehende CSS-Unterkomplex von K. Offenbar ist $|E| = e \in |K|$ (vgl. 2.6 C.). Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{i_\pi} & \pi_q(S(|K|)) \\ {\scriptstyle g_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle h_*} & & {\scriptstyle g'_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle h'_*} \\ H_q(K, E) & \xrightarrow{i_H} & H_q(S(|K|), S(e)). \end{array}$$

h_*, h'_* sind dabei die Hurewiczschen Abbildungen (vgl. 1.6) und g_*, g'_* die natürlichen Homomorphismen der Homologie- in die Homotopiegruppen, wie sie in 1.7 für jede abelsche CSS-Gruppe definiert wurden. Das Diagramm ist kommutativ, sowohl wenn man h_*, h'_* als auch wenn man g_*, g'_* als „vertikale" Abbildungen benutzt. i_H ist nach 2.7 Satz 7 ein Isomorphismus. Nach 1.7 Satz 3 Folgerung A ist h_* monomorph (einwertig für $q = 0$) und g'_* epimorph, also ist auch

$h'_* \circ i_\pi = i_H \circ h_*$ monomorph (einwertig für $q = 0$) und $i_\pi \circ g_* = g'_* \circ i_H$ epimorph.

Daraus folgt, daß i_π monomorph und epimorph zugleich ist, d.h. es ist ein Isomorphismus.

Bemerkung. MILNOR hat die Isomorphie von Satz 8 für alle CSS-Komplexe K bewiesen, die der Kanschen Bedingung genügen (vgl. KAN [9] III 5.1), insbesondere also für alle (eventuell nicht abelschen) CSS-Gruppen (vgl. MOORE [11] Exp. 18 Th. 3). Abgesehen von einer Beweisskizze in den Princeton seminar notes [vgl. Fußnote [3]), S. 369] ist jedoch m.W. bisher kein Beweis veröffentlicht[7b].

2.9. Der Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|)$. Sei K ein CSS-Komplex und $L < K$ ein (eventuell leerer) CSS-Unterkomplex. Dann bestehen die Isomorphismen:

(1) $H_q(K, L) \cong H_q(|K|, |L|)$ nach 2.7 Satz 7,

(2) $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$ nach 2.8 Satz 8,

(3) $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$ nach 1.4 Satz 2 Folgerung A.

$\Gamma K = \bigcup_q \Gamma_q K$ ist dabei die von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe (vgl. 1.4); für leeres L ist $\Gamma_q L = 0$ für jedes q. Da $\Gamma K/\Gamma L$ immer additiv geschrieben wurde, bezeichnen wir das neutrale Element der abelschen C-Gruppe $|\Gamma K/\Gamma L|$ (vgl. 2.6 Satz 6) mit 0. Aus (1) bis (3) folgt

(4) $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$,

und da uns die Isomorphismen (1) bis (3) im einzelnen bekannt sind, kennen wir auch hier einen ganz bestimmten (natürlichen) Isomorphismus. Wir untersuchen ihn noch etwas genauer mit dem Ziel, ihn mehr geometrisch,

[7b]) *Zusatz bei der Korrektur:* Die Arbeit von MILNOR ist inzwischen erschienen: Ann. of Math. **65**, 357–362 (1957).

d.h. möglichst ohne Bezug auf die CSS-Komplexe sondern nur auf die Räume $|K|, |L|, |\Gamma K/\Gamma L|$ zu definieren:

Sei $f\colon K \to \Gamma K/\Gamma L$ die Zusammensetzung aus Injektion $K \to \Gamma K$ und Projektion $\Gamma K \to \Gamma K/\Gamma L$. $E \subset \Gamma K/\Gamma L$ sei der aus den neutralen Elementen $0_q \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$ bestehende CSS-Unterkomplex. Dann ist offenbar $|E| = 0 \in |\Gamma K/\Gamma L|$ (vgl. 2.6 C.). Wegen $f(L) \subset E$ induziert f (vgl. 1.5) einen Homomorphismus $f_H\colon H_q(K, L) \to H_q(\Gamma K/\Gamma L, E)$. Wir behaupten:

Die Zusammensetzung

$$H_q(K, L) \xrightarrow{f_H} H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) \xrightarrow{g_*} \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$$

von f_H mit dem natürlichen Homomorphismus g_* (vgl. 1.7) stimmt mit dem Isomorphismus (3) *überein.*

Beweis. Nach Definition ist $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$, $H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) = \mathfrak{H}_q\big(\Gamma(\Gamma K/\Gamma L)/\Gamma E\big)$ (vgl. 1.4). Die Elemente von $\Gamma_q K$ sind die formalen Summen $\sum_i n_i a_i$, $a_i \in K_q$; entsprechendes gilt für $\Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$, um aber Verwechslungen mit der Addition in $\Gamma K/\Gamma L$ zu vermeiden, versehen wir hier die formalen Summen mit einem Strich, d.h. die Elemente von $\Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$ sind $\sum_i' n_i \bar{c}_i$, $\bar{c}_i \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$. Nun sei $c = \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K$, $a_i \in K_q$, und die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$ von c repräsentiere $\alpha \in H_q(K, L)$. Nach 1.4 Satz 2 Folgerung D können wir annehmen, daß $d_j \bar{c} = 0$ ist für alle j. $f_H(\alpha) \in H_q(\Gamma K/\Gamma L, E)$ wird durch die Restklasse (mod $\Gamma_q E$) von $\sum_i' n_i \cdot f a_i \in \Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$ repräsentiert. Nach der in 1.7 gegebenen Vorschrift zur Bestimmung von g_* (S. 381) — hier werden lediglich die Gruppenoperationen etwas anders geschrieben — ist dann $\sum_i n_i \cdot f a_i$ (Summation in $\Gamma K/\Gamma L$) ein Repräsentant von $g_* f_H(\alpha)$. $f a_i$ ist nach Definition die Restklasse von $a_i \in K_q \subset \Gamma_q K$ in $\Gamma_q K/\Gamma_q L$, also ist $\sum_i n_i \cdot f a_i$ die Restklasse $\bar{c}$ von $c = \sum_i n_i a_i$. Wir haben damit gezeigt, daß $\bar{c}$ sowohl α als auch $g_* f_H(\alpha)$ repräsentiert, und das beweist die Behauptung.

Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(K, L) & \xrightarrow{f_H} & H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) & \xrightarrow{g_*} & \pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \\ \downarrow{\scriptstyle i_H} & & \downarrow{\scriptstyle i'_H} & & \downarrow{\scriptstyle i'_\pi} \\ H_q(|K|, |L|) & \xrightarrow{|f|_H} & H_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0) & \xrightarrow{g'_*} & \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0), \end{array}$$

worin g'_* analog zu g_* der natürliche Homomorphismus von 1.7 ist und $i\colon K \to S(|K|)$, $i'\colon \Gamma K/\Gamma L \to S(|\Gamma K/\Gamma L|)$ die Injektionen sind. Die senkrechten Abbildungen des Diagramms sind also die Isomorphismen von 2.7 Satz 7 und 2.8 Satz 8. Das Diagramm ist kommutativ: Das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von g_* (vgl. 1.7) und das linke wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \Gamma K/\Gamma L \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ S(|K|) & \xrightarrow{|f|} & S(|\Gamma K/\Gamma L|) \end{array}$$

(Natürlichkeit von i), die sich unmittelbar aus der Definition von $|f|$ ergibt [vgl. 2.3 (4)]. Folglich gilt:

$$g'_* \circ |f|_H = i'_\pi \circ (g_* \circ f_H) \circ i_H^{-1},$$

und rechts stehen gerade die Isomorphismen (2), (3) und (1). Damit haben wir bewiesen:

Satz 9. *Zu jedem Paar von CSS-Komplexen $L \subset K$ gibt es eine abelsche C-Gruppe — nämlich $|\Gamma K/\Gamma L|$ — und eine (natürliche) stetige Abbildung $|K| \to |\Gamma K/\Gamma L|$ — nämlich $|f|$ —, so daß die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|, |L|) \xrightarrow{|f|_H} H_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$$

von $|f|_H$ mit dem in 1.7 für jede abelsche C-Gruppe definierten Homomorphismus g_* ein Isomorphismus ist (für alle q).

Das Ziel, den Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$ „geometrisch" zu definieren, ist damit noch nicht ganz erreicht, denn bei der Definition von $|f|$ haben wir die CSS-Komplexe benutzt. Im nächsten Abschnitt werden wir uns davon noch befreien und auch für $|\Gamma K/\Gamma L|$ eine geometrische Interpretation geben (wenigstens für abzählbares K).

Bemerkung. In naheliegender Weise definiert man für eine abelsche CSS-Gruppe K und eine beliebige abelsche Gruppe G das tensorielle Produkt $K \otimes G = \bigcup_q K_q \otimes G$. Die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G sind dann durch

$$H_q(K, L; G) = \mathfrak{H}_q((\Gamma K/\Gamma L) \otimes G)$$

gegeben. Die Isomorphie (1) läßt sich leicht auf den Fall beliebiger Koeffizientengruppen verallgemeinern. Ersetzt man ferner in (2) und (3) $\Gamma K/\Gamma L$ durch $(\Gamma K/\Gamma L) \otimes G$, so folgt daraus die Verallgemeinerung von (4):

$$H_q(|K|, |L|; G) \cong \pi_q(|(\Gamma K/\Gamma L) \otimes G|, 0).$$

2.10. Vergleich mit Ergebnissen von Dold und Thom. Mit $|\Gamma K/\Gamma L|$ haben wir im vorigen Abschnitt zu jedem Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen einen Raum gefunden, dessen Homotopiegruppen die Homologiegruppen von $|K| \bmod |L|$ sind. Etwas Ähnliches haben auch Dold und Thom in [3], [4] durchgeführt. Für einen Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt l, dem sog. Grundpunkt, definieren sie erstens das unendliche symmetrische Produkt $SP(X)$, das algebraisch als das von der Menge $X - l$ erzeugte freie abelsche Monoid (Halbgruppe) mit neutralem Element (vgl. Bourbaki [1] §§ 1 und 2) aufgefaßt werden kann (vgl. Dold-Thom [3], [4]), und zweitens die von $X - l$ erzeugte freie abelsche Gruppe $AG(X)$ $(\supset SP(X))$ mit einer gewissen Topologie (vgl. Dold-Thom [4]). Ist X ein simplizialer Komplex, so gelten die Isomorphien

$$H_q(X, l) \cong \pi_q(AG(X), 0) \quad \text{für alle } q \geq 0, \tag{1}$$

und, wenn X außerdem zusammenhängend ist,

$$H_q(X) = H_q(X, l) \cong \pi_q(SP(X), 0) \quad \text{für } q > 0. \tag{2}$$

DOLD und THOM führen den Beweis, indem sie die Axiome eines gewissen Axiomensystems der Homologietheorie (einer Abwandlung des Axiomensystems von EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. I) für die Gruppen $\pi_q(AG(X), 0)$ bzw. $\pi_q(SP(X), 0)$ verifizieren (und zwar mit Hilfe der Theorie der Faserungen und Quasifaserungen). Bei diesem Verfahren werden die Isomorphismen (1) und (2) durch den Eindeutigkeitssatz für Homologietheorie zwar festgelegt, sie sind aber nicht ohne weiteres (etwa unter Verwendung singulärer Ketten in X) explizit angebbar.

Wir werden nun CSS-Komplexe K *mit Grundpunkt* betrachten, d. h. wir zeichnen in K_0 ein Element l_0 aus und setzen $l_q = (s_0)^q l_0$. Dann bilden die Elemente l_q, $q = 0, 1, 2, \ldots$, einen CSS-Unterkomplex L von K, dessen geometrische Realisierung $|L|$ nur aus dem Punkt $l = l_0(\Delta_0) = l_q(\Delta_q) \in |K|$ (vgl. 2.3 D.) besteht. Wir betrachten ihn als den Grundpunkt von $|K|$. Man kann wie für topologische Räume ein unendliches symmetrisches Produkt $SP(K)$ definieren. Der freien abelschen Gruppe $AG(X)$ zu einem topologischen Raum X entspricht hier die abelsche CSS-Gruppe $\Gamma K/\Gamma L$, die wir zur Abkürzung mit $\bar{\Gamma} K$ bezeichnen. Es stellt sich heraus, daß $SP(|K|)$ und $AG(|K|)$ für abzählbares K geometrische Realisierungen von $SP(K)$ bzw. $\bar{\Gamma} K$ sind [s. (11), (12)]. Nach 2.9 (4) ist aber

$$H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma} K|, 0), \tag{3}$$

also haben wir damit die obige Isomorphie (1) für geometrische Realisierungen abzählbarer CSS-Komplexe, insbesondere für abzählbare simpliziale Komplexe (vgl. 2.1, Beispiel 1) neu bewiesen. Außerdem aber liefert 2.9 Satz 9 einen expliziten Isomorphismus $H_q(|K|, l) \to \pi_q(AG(|K|), 0)$ (vgl. Satz 10, S. 405). Im nächsten Paragraphen[8]) werden wir einen allgemeinen Satz über „CSS-Monoidkomplexe" bringen (3.6 Satz 13), aus dem speziell

$$\pi_q(|SP(K)|, 0) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma} K|, 0)$$

folgt, falls $|K|$ zusammenhängend ist. Auf diese Weise ergibt sich aus (3)

$$H_q(|K|) = H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|SP(K)|, 0), \quad q > 0. \tag{4}$$

Für abzählbares K ist das die Dold-Thomsche Isomorphie (2), die damit ebenfalls neu bewiesen ist. Auch bei (4) werden wir einen expliziten Isomorphismus angeben (3.7 Satz 15).

Zur Durchführung dieses Programms definieren wir zunächst $SP(K)$ für irgendeinen CSS-Komplex K mit Grundpunkt: In dem Produkt $(K)^n = K \times \cdots \times K$ (vgl. 2.5) operiert die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Permutationen von n Elementen durch Vertauschung der Faktoren. Identifizieren der bezüglich $\mathfrak{S}_n$ äquivalenten Elemente von $(K)^n$ ergibt das *n-fache symmetrische Produkt* $SP^n(K) = \bigcup_q SP^n_q(K)$. Die Elemente von $SP^n_q(K)$ sind die ungeordneten n-tupel $[a_1, \ldots, a_n]$, $a_i \in K_q$. Durch die Identifizierung

$$[a_1, \ldots, a] = [l_q, a_1, \ldots, a_n] \tag{5}$$

[8]) § 3 erscheint als Teil II im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

[$l_q = (s_0)^q l_0$, $l_0 =$ „Grundpunkt" von K_0] erhält man eine Einbettung

$$SP^n(K) \subset SP^{n+1}(K). \tag{6}$$

Das *unendliche symmetrische Produkt* $SP(K)$ wird nun als der direkte Limes $\lim_{n\to\infty} SP^n(K)$ definiert. Darunter ist die Menge $\bigcup_n SP^n(K)$ zu verstehen zusammen mit derjenigen CSS-Struktur, die in $SP^m(K) \subset \bigcup_n SP^n(K)$ für jedes m mit der bereits definierten übereinstimmt.

$SP_q(K)$ sei der Bestandteil der Dimension q von $SP(K)$. Seine Elemente sind nach Konstruktion die ungeordneten unendlichen Folgen $[a_1, a_2, \ldots]$, $a_i \in K_q$, in denen nur endlich viele a_i von l_q verschieden sind. Eine solche ungeordnete Folge ist durch die in ihr vorkommenden Elemente aus $K_q - l_q$ mit den zugehörigen Vielfachheiten eindeutig bestimmt. Also kann man die Elemente von $SP_q(K)$ auch als formale Summen $\sum_j n_j b_j$, $b_j \in K_q - l_q$, $n_j \geq 0$, schreiben, indem man

$$\sum_j n_j b_j = [\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{n_1 \text{ mal}}, \underbrace{b_2, \ldots, b_2}_{n_2 \text{ mal}}, \ldots, l_q, l_q, \ldots]$$

setzt. Man entnimmt daraus, daß $SP_q(K)$ *das von* $K_q - l_q$ *erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element* ist. (Offenbar könnte man in $\sum_j n_j b_j$ auch $b_j = l_q$ zulassen, wenn man die Relation $l_q = 0$ einführt.) $\bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q L$ ($L = \{l_q\}$) ist die von $K_q - l_q$ erzeugte freie abelsche Gruppe mit den Elementen $\sum_j n_j b_j$, n_j beliebige ganze Zahl, $b_j \in K_q - l_q$ (oder $b_j \in K_q$ mit der Relation $l_q = 0$). Also gilt

$$SP(K) \subset \bar{\Gamma} K, \tag{7}$$

und man bestätigt leicht, *daß diese Inklusion mit den CSS-Strukturen verträglich ist.*

Bei der Untersuchung der geometrischen Realisierung von $SP(K)$, zu der wir nun kommen, setzen wir voraus, daß K abzählbar ist. $\mathfrak{p}_n : (K)^n \to SP^n(K)$ sei die natürliche Projektion, d.h.

$$\mathfrak{p}_n(a_1, \ldots, a_n) = [a_1, \ldots, a_n], \quad a_i \in K_q.$$

$\mathfrak{p}_n$ induziert nach 2.3 eine stetige Abbildung $|\mathfrak{p}_n| : |(K)^n| \to |SP^n(K)|$. Nach 2.5 Folgerung A ist $|(K)^n| = |K| \otimes \cdots \otimes |K|$, und weil K abzählbar ist, nach 2.4 A. $|(K)^n| = |K| \times \cdots \times |K| = |K|^n$. Auch in $|K|^n$ operiert $\mathfrak{S}_n$ durch Vertauschung der Faktoren. Zwei Punkte von $|K|^n$ haben genau dann denselben Bildpunkt bei $|\mathfrak{p}_n|$, wenn sie durch eine geeignete Vertauschung der Faktoren von $|K|^n$ ineinander übergeführt werden können.

[Beweis. Nach Definition der geometrischen Realisierung (2.1) läßt sich jeder Punkt von $|(K)^n|$ eindeutig in der Form $b(t)$ schreiben, wobei b ein nicht ausgeartetes Element von $(K_q)^n$ und $t \in \mathring{\Delta}_q$ ist (mit geeignetem q). Entsprechend sei $b' \in (K_{q'})^n$ nicht ausgeartet und $t' \in \mathring{\Delta}_{q'}$. Nach Definition der induzierten

Abbildung (2.3) ist $|p_n|(b(t)) = |p_n|(b'(t'))$ mit $p_n b(t) = p_n b'(t')$ äquivalent. Sei $b = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in K_q$ und $b' = (a'_1, \ldots, a'_n)$, $a'_i \in K_{q'}$. Mit b und b' sind dann auch $p_n b = [a_1, \ldots, a_n]$ und $p_n b' = [a'_1, \ldots, a'_n]$ nicht ausgeartet; denn aus $[a_1, \ldots, a_n] = s_j[c_1, \ldots, c_n]$ würde folgen, daß die a_i bis auf die Reihenfolge mit den $s_j c_i$ übereinstimmen, d.h. $(a_1, \ldots, a_n) = s_j(c_{\varkappa(1)}, \ldots, c_{\varkappa(n)})$ für eine geeignete Permutation $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$. Also folgt aus $|p_n|(b(t)) = |p_n|(b'(t'))$: $q = q'$, $t = t'$ und $p_n b = p_n b'$, d.h. $[a_1, \ldots, a_n] = [a'_1, \ldots, a'_n]$, d.h. es gibt eine Permutation $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$, so daß $a'_i = a_{\varkappa(i)}$. In $|(K)^n| = |K|^n$ ist aber [vgl. 2.5 (4)]

$$b(t) = (a_1, \ldots, a_n)(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)),$$

also folgt: Der Punkt $b(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in |K|^n$ geht bei der Vertauschung $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$ in $b'(t') = (a'_1(t'), \ldots, a'_n(t'))$ über.

Umgekehrt ist für jeden Punkt

$$b(t) = (a_1, \ldots, a_n)(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in |(K)^n| = |K|^n$$

und jedes $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$:

$$|p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = |p_n|(a_{\varkappa(1)}(t), \ldots, a_{\varkappa(n)}(t)),$$

denn

$$|p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = |p_n|(b(t)) = p_n b(t) = [a_1, \ldots, a_n](t)$$

und

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_{\varkappa(1)}, \ldots, a_{\varkappa(n)}].$$

Weil p_n eine CSS-Abbildung auf $SP^n(K)$ ist, ist $|p_n|$ nach 2.3 E. eine Identifizierungsabbildung, d.h. man erhält $|SP^n(K)|$ aus $|K|^n$ durch Identifizieren der bezüglich $\mathfrak{S}_n$ äquivalenten Punkte. So wird aber gerade das n-fache symmetrische Produkt $SP^n(|K|)$ bei DOLD-THOM definiert, also gilt

$$|SP^n(K)| = SP^n(|K|) \tag{8}$$

und

$$|p_n|(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n], \qquad x_i \in |K|,$$

wenn $[x_1, \ldots, x_n]$ das ungeordnete n-tupel der x_i bezeichnet.

Für alle $[a_1, \ldots, a_n] \in SP^n_q(K) \subset S_q(SP^n(|K|))$, $q = 0, 1, \ldots$ gilt

$$[a_1, \ldots, a_n](t) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)], \qquad t \in \Delta_q, \tag{9}$$

denn es ist [vgl. 2.3 (4) und 2.5 (4)]

$$\begin{aligned}[a_1, \ldots, a_n](t) &= p_n(a_1, \ldots, a_n)(t) = |p_n|((a_1, \ldots, a_n)(t)) \\ &= |p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)].\end{aligned}$$

Der Einbettung (6) entspricht eine Einbettung $|SP^n(K)| \subset |SP^{n+1}(K)|$ (vgl. 2.3 D.) und wegen (8) also

$$SP^n(|K|) \subset SP^{n+1}(|K|). \tag{10}$$

Dabei ist

$$[x_1, \ldots, x_n] = [l, x_1, \ldots, x_n]$$

mit $l = l_0(\Delta_0) = l_q(\Delta_q) = |L|$, denn das n-tupel $x_1, \ldots, x_n$ läßt sich in der Form $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $a_i \in K_q$, $t \in \Delta_q$, schreiben (vgl. 2.5 Folgerung B), und dann gilt wegen (5) und (9)

$$[a_1(t), \ldots, a_n(t)] = [a_1, \ldots, a_n](t) = [l_q, a_1, \ldots, a_n](t) = [l, a_1(t), \ldots, a_n(t)].$$

(10) ist demnach die gleiche Einbettung, die auch DOLD und THOM benutzen. Sie definieren das unendliche symmetrische Produkt als

$$SP(|K|) = \lim_{n \to \infty} SP^n(|K|)^{9}).$$

Wegen (8) und weil die Einbettungen (6) und (10) einander entsprechen, stimmt das mit $\lim_{n \to \infty} |SP^n(K)|$ überein, was offenbar eine geometrische Realisierung von $\lim_{n \to \infty} SP^n(K) = SP(K)$ ist. Also gilt für jeden abzählbaren CSS-Komplex K

$$|SP(K)| = SP(|K|). \tag{11}$$

Analog wie bei $SP_q(K)$ kann man die Elemente von $SP(|K|)$ entweder als ungeordnete unendliche Folgen $[x_1, x_2, \ldots]$, $x_i \in |K|$, auffassen, in denen nur endlich viele x_i von l verschieden sind, oder als formale Summen $\sum_j n_j y_j$, $y_j \in |K| - l$, $n_j \geq 0$, wobei

$$\sum_j n_j y_j = [\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{n_1 \text{ mal}}, \underbrace{y_2, \ldots, y_2}_{n_2 \text{ mal}}, \ldots, l, l, \ldots]$$

ist (oder schließlich als formale Summen $\sum_j n_j y_j$, $y_j \in |K|$, $n_j \geq 0$, mit der Relation $l = 0$). Die zweite Auffassung zeigt, *daß $SP(|K|)$ das von $|K| - l$ erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element ist.* Dem Übergang von (8) zu (11) entsprechend folgt aus (9)

$$[a_1, a_2, \ldots](t) = [a_1(t), a_2(t), \ldots], \qquad a_i \in K_q,\ t \in \Delta_q$$

oder in der Summenschreibweise

$$\left(\sum_j n_j b_j\right)(t) = \sum_j n_j \cdot b_j(t), \qquad b_j \in K_q - l_q \text{ (bzw. } b_j \in K_q),\ n_j \geq 0,\ t \in \Delta_q.$$

Daraus entnimmt man, daß die formale Addition in $SP(|K|)$ gemäß 2.6 durch die Addition in $SP(K) < \overline{\Gamma} K$ induziert wird.

Der Inklusion (7) entspricht (vgl. 2.3 D.)

$$SP(|K|) = |SP(K)| < |\overline{\Gamma} K|.$$

Weil die Additionen in $|SP(K)|$ und $|\overline{\Gamma} K|$ durch dieselbe Formel 2.6 (3) charakterisiert sind, ist diese Inklusion mit den Additionen verträglich, d.h. *$SP(|K|)$ ist Untermonoid der Gruppe $|\overline{\Gamma} K|$.* Jedes $x \in |\overline{\Gamma} K|$ läßt sich in der Form $x = a(t)$, $a \in \overline{\Gamma}_q K$, $t \in \Delta_q$ schreiben. Zu a gibt es $a_+, a_- \in SP_q(K)$ mit

---

[9]) Zur Definition des direkten Limes von topologischen Räumen s. Fußnote [7]) S. 385.

$a = a_+ - a_-$ (z.B. $a_+ = \sum_{n_j > 0} n_j b_j$, $a_- = \sum_{n_j < 0} (-n_j) b_j$, wenn $a = \sum_j n_j b_j$). Nach 2.6 (3), (5) folgt

$$x = (a_+ - a_-)(t) = a_+(t) - a_-(t).$$

$a_+(t)$ und $a_-(t)$ liegen aber in $|SP(K)| = SP(|K|)$, *also wird die Gruppe* $|\bar{\Gamma}K|$ *von dem Untermonoid* $SP(|K|)$ *erzeugt.*

Ein bekannter Satz der Algebra besagt, daß es zu jedem abelschen Monoid (bis auf Isomorphie) höchstens eine abelsche Gruppe gibt, die das Monoid enthält und von ihm erzeugt wird (vgl. BOURBAKI [1] § 2 No. 4). Weil $SP(|K|)$ das von $|K| - l$ erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element ist, folgt: $|\bar{\Gamma}K|$ *ist die von* $|K| - l$ *erzeugte freie abelsche Gruppe.*

Auch der von DOLD und THOM betrachtete Raum $AG(|K|)$ ist algebraisch die von $|K| - l$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Für abzählbares K ist die Topologie von $AG(|K|)$ die Identifizierungstopologie der Abbildung

$$\pi\colon SP(|K|) \times SP(|K|) \to AG(|K|),$$

die durch $\pi(x, x') = x - x'$, $x, x' \in SP(|K|)$ gegeben ist. (Die Definition der Topologie von $AG(X)$ für beliebiges X lautet etwas anders, vgl. [4].) Um nun $|\bar{\Gamma}K| = AG(|K|)$ zu zeigen, betrachten wir die CSS-Abbildung

$$p\colon SP(K) \times SP(K) \to \bar{\Gamma}K$$

definiert durch $p(a, a') = a - a'$, $a, a' \in SP_q(K)$. Es ist

$$\begin{aligned} |SP(K) \times SP(K)| &= |SP(K)| \otimes |SP(K)| \quad \text{nach 2.5 Satz 5} \\ &= |SP(K)| \times |SP(K)| \quad \text{nach 2.4 A.} \\ &\quad [K \text{ ist abzählbar, also auch } SP(K)] \\ &= SP(|K|) \times SP(|K|) \quad \text{wegen (11).} \end{aligned}$$

Für die induzierte Abbildung

$$|p|\colon SP(|K|) \times SP(|K|) \to |\bar{\Gamma}K|$$

gilt nach Definition [2.3 (4)]

$$|p|((a, a')(t)) = (a - a')(t), \qquad a, a' \in SP_q(K),\ t \in \Delta_q.$$

Nach 2.5 (2) ist $(a, a')(t) = (a(t), a'(t))$ und nach 2.6 (3), (5) $(a - a')(t) = a(t) - a'(t)$, also gilt

$$|p|(a(t), a'(t)) = a(t) - a'(t).$$

Da sich jedes Paar $x, x' \in SP(|K|)$ in der Form $a(t), a'(t)$ schreiben läßt, folgt $|p|(x, x') = x - x'$ für alle $x, x' \in SP(|K|)$, d.h. $|p| = \pi$ [wenn man die isomorphen Gruppen $|\bar{\Gamma}K|$ und $AG(|K|)$ als gleich betrachtet]. Weil p eine CSS-Abbildung auf $SP(K)$ ist, ist $|p|$ nach 2.3 E. eine Identifizierungsabbildung. Also tragen sowohl $|\bar{\Gamma}K|$ als auch $AG(|K|)$ die Identifizierungs-

topologie bezüglich $|p| = \pi$. Folglich gilt für jeden abzählbaren CSS-Komplex K

$$|\bar{\Gamma}K| = AG(|K|). \tag{12}$$

Für jeden topologischen Raum X (mit Grundpunkt) ist

$$X = SP^1(X) < SP(X) < AG(X), \tag{13}$$

entsprechend für jeden CSS-Komplex K (mit Grundpunkt)

$$K = SP^1(K) < SP(K) < \bar{\Gamma}K. \tag{14}$$

Die CSS-Abbildung $f: K \to \Gamma K/\Gamma L$ von 2.9 (S. 398) ist im vorliegenden Fall $L = \{l_q\}$ die natürliche Injektion (14). Demnach ist $|f|$ die natürliche Injektion $|K| < |\bar{\Gamma}K|$ (vgl. 2.3 D.), die für abzählbares K auch durch $|K| < AG(|K|)$ ersetzt werden kann [vgl. (12), (13)]. Aus Satz 9 ergibt sich nun als Spezialfall:

Satz 10. *K sei ein abzählbarer CSS-Komplex mit Grundpunkt, l sei der zugehörige Grundpunkt der geometrischen Realisierung $|K|$. Dann ist die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|, l) \longrightarrow H_q(AG(|K|), 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(AG(|K|), 0)$$

des durch die Injektion $|K| < AG(|K|)$ induzierten Homomorphismus' mit dem natürlichen Homomorphismus g_* von 1.7 ein Isomorphismus für alle q.

Ein Vorteil dieser Formulierung gegenüber Satz 9 ist, daß $AG(|K|)$ und die benutzten Homomorphismen schon ihrer Definition nach nur von dem topologischen Raum $|K|$ und seinem Grundpunkt l abhängen, nicht aber von dem CSS-Komplex K. Das ist für $|\bar{\Gamma}K|$ und $|f|$ in Satz 9 nicht so klar.

Bemerkung 1. Daß wir in diesem Abschnitt immer nur CSS-Komplexe bzw. Räume mit Grundpunkt und nicht beliebige Paare von CSS-Komplexen bzw. Räumen betrachtet haben, ist keine wesentliche Einschränkung. Ist nämlich $L < K$ ein beliebiges Paar von CSS-Komplexen mit nicht leerem L, so identifiziere man in K_q alle Elemente von L_q zu einem einzigen l_q. $\bar{K}_q$ sei die aus K_q entstehende Menge. Die CSS-Struktur von K induziert eine CSS-Struktur in $\bar{K} = \bigcup_q \bar{K}_q$, die $\bar{K}$ zu einem CSS-Komplex mit Grundpunkt macht [$l_q = (s_0)^q l_0$ ist das ausgezeichnete Element von $\bar{K}_q$]. Offenbar ist $\Gamma K/\Gamma L \cong \bar{\Gamma}\bar{K} = \Gamma\bar{K}/\Gamma\bar{L}$ mit $\bar{L} = \{l_q\}$, also (vgl. 1.4 und 2.7 Satz 7)

$$H_q(|K|, |L|) \cong H_q(K, L) \cong H_q(\bar{K}, \bar{L}) \cong H_q(|\bar{K}|, l)$$

mit $l = |\bar{L}|$. Andererseits sieht man leicht, daß man eine geometrische Realisierung $|\bar{K}|$ von $\bar{K}$ erhält, wenn man $|L|$ in $|K|$ zu einem Punkt identifiziert, und dieser Punkt ist dann gerade $|\bar{L}| = l$; wir schreiben dafür $|\bar{K}| = |K|/|L|$. Folglich erhält man aus der Isomorphie $H_q(|\bar{K}|, l) \cong \pi_q(AG(|\bar{K}|), 0)$ von Satz 10 auch eine Isomorphie

$$H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(AG(|K|/|L|), 0).$$

Bemerkung 2. Auch für überabzählbares K ist $|SP(K)|$ als Monoid mit $SP(|K|)$ isomorph und $|\bar{\Gamma}K|$ als Gruppe mit $AG(|K|)$. Die Topologien werden im allgemeinen nicht gleich sein, da schon $|(K)^n|$ und $|K|^n$ verschiedene Topologien haben können. Aber die kompakten Teilmengen von $|(K)^n|$ sind dieselben wie die von $|K|^n$ und tragen die gleiche Topologie (vgl. 2.5 Folgerung A. und 2.4 B.). Wie man leicht bestätigt, überträgt sich das auf die n-fachen symmetrischen Produkte $|SP^n(K)|$ und $SP^n(|K|)$ und von daher auf die unendlichen symmetrischen Produkte $|SP(K)|$ und $SP(|K|)$ [jede kompakte Teilmenge dieser Räume liegt schon in $|SP^n(K)|$ bzw. $SP^n(|K|)$ für genügend großes n]. Daraus folgt $\pi_q(|SP(K)|, 0) \cong \pi_q(SP(|K|), 0)$, da Sphärenabbildungen und ihre Homotopien kompakte Bilder haben. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn DOLD haben auch $|\bar{\Gamma}K|$ und $AG(|K|)$ die gleichen kompakten Teilmengen — der Beweis ist jedoch weniger direkt als der für die symmetrischen Produkte —, und es folgt $\pi_q(|\bar{\Gamma}K), 0) \cong \pi_q(AG(|K|), 0)$. Daher ließe sich die Dold-Thomsche Isomorphie $H_q(|K|, I) \cong \pi_q(AG(|K|), 0)$ auch für überabzählbares K aus (3) (S. 400) bzw. 2.9 Satz 9 gewinnen.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Algèbre, Chap. I, 2. Aufl. Paris 1951. — [2] CARTAN, H.: Séminaire de Topologie algébrique. Paris 1948/49. — [3] DOLD, A., et R. THOM: Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinie. C. R. Acad. Sci. Paris **242**, 1680—1682 (1956). — [4] DOLD, A., and R. THOM: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Erscheint demnächst in Ann. of Math. — [5] EILENBERG, S., and S. MACLANE: On the groups $H(\pi, n)$ I. Ann. of Math. **58**, 55—106 (1953). — [6] EILENBERG, S., and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952. — [7] EILENBERG, S., and J. A. ZILBER: Semisimplicial complexes and singular homology. Ann. of Math. **51**, 499—513 (1950). — [8] EILENBERG, S., and J. A. ZILBER: On products of complexes. Amer. Journ. of Math. **75**, 200—204 (1953). — [9] KAN, D. M.: Abstract homotopy. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, I: **41**, 1092—1096 (1955); II: **42**, 255—258 (1956); III: **42**, 419—421 (1956); IV: **42**, 542—544 (1956). — [10] MILNOR, J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. **63**, 272—284 (1956). — [11] MOORE, J. C.: Homotopie des complexes monoidaux I, II. Seminaire H. CARTAN 7, Exp. 18, 19 (1954/55). — [12] STEENROD, N. E.: On the topology of fibre-bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [13] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1957)

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 407–421 (1958)

Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. II[10])

Von
DIETER PUPPE

§ 3. Abelsche CSS-Monoide und abelsche topologische Monoide

3.1. CSS-Monoide und topologische Monoide. Ein *Monoid* (Halbgruppe) M ist eine Menge M zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $M \times M \to M$, die wir für den Augenblick als Multiplikation schreiben (vgl. BOURBAKI [*1*] § 1 No. 3). $e \in M$ heißt *neutrales Element*, wenn für jedes $x \in M$ gilt: $e \cdot x = x$ und $x \cdot e = x$ (vgl. [*1*] § 2 No. 1). Es ist klar, was unter einem *abelschen* Monoid zu verstehen ist.

Ein CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ (vgl. 1.1), in dem alle K_q Monoide und die durch monotone Abbildungen $\beta\colon [p] \to [q]$ induzierten Abbildungen $\beta^*\colon K_q \to K_p$ Monoidhomomorphismen sind, heißt *CSS-Monoidkomplex* oder kürzer *CSS-Monoid*. Anders ausgedrückt: Ein CSS-Monoid ist ein CSS-Komplex zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $v\colon K \times K \to K$, die mit der CSS-Struktur verträglich ist (vgl. 2.6). Wir sagen, daß das CSS-Monoid K ein neutrales Element besitzt, wenn die Verknüpfung v ein neutrales Element im Sinne von 2.6 besitzt, d.h. wenn es ein $e_0 \in K_0$ gibt, so daß $(s_0)^q e_0$ für jedes q ein neutrales Element des Monoids K_q ist. Offenbar ist jede CSS-Gruppe auch ein CSS-Monoid. $SP(K)$ in 2.10 ist ein Beispiel eines abelschen CSS-Monoids mit neutralem Element, das keine CSS-Gruppe ist.

Einen topologischen Raum X mit einer Monoidstruktur, deren Multiplikation $X \times X \to X$ stetig ist, nennen wir ein *topologisches Monoid*[11]). Ist die Multiplikation eventuell nicht stetig, aber stetig auf allen kompakten Teilmengen von $X \times X$, so sprechen wir von einem *C-Monoid* (analog zur C-Gruppe, vgl. 1.2 Beispiel 1). Aus 2.6 folgt sofort (vgl. insbesondere 2.6 A. bis C.):

Satz 11. *Ist K ein (abelsches) CSS-Monoid (mit neutralem Element), so wird in $|K|$ eine Verknüpfung induziert, die $|K|$ zu einem (abelschen) C-Monoid*

[10]) Teil I dieser Arbeit ist im vorangehenden Heft dieser Zeitschrift (S. 367–406) erschienen. Beide Teile bilden sachlich eine Einheit. Die Ergebnisse von Teil II sind schon in der Einleitung zu Teil I mit erwähnt. Die Paragraphen, Abschnitte und Fußnoten werden fortlaufend weiternumeriert. Verweise auf § 1 oder § 2 beziehen sich immer auf Teil I. Das Literaturverzeichnis für beide Teile befindet sich am Ende, das Inhaltsverzeichnis am Anfang von Teil I.

[11]) Ein topologisches Monoid mit neutralem Element ist demnach ein spezieller H-Raum; vgl. J. P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math. **54**, 425–505 (1951), Chapt. IV § 1.

(mit neutralem Element) macht. Für abzählbares K ist $|K|$ sogar ein topologisches Monoid.

Wir werden in diesem Paragraphen das Resultat von 1.7 über abelsche C-Gruppen (Folgerung B aus Satz 3) auf bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoide mit neutralem Element übertragen (vgl. 3.5 Satz 12). Ferner werden wir den in 2.10 angekündigten Satz über CSS-Monoide (vgl. 3.6 Satz 13) beweisen, der als Spezialfall die Zurückführung der Dold-Thomschen Isomorphie 2.10 (2) auf 2.10 (1) enthält (vgl. die Folgerung aus Satz 14 und 15 in 3.7). Das entscheidende Hilfsmittel ist in beiden Fällen der Hilfssatz in 3.3.

3.2. Bemerkungen über die Homotopiegruppen topologischer Monoide. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fester Punkt. Ist S^q die q-Sphäre und $y_0 \in S^q$, so kann man die Homotopiegruppe $\pi_q(X, x_0)$ bekanntlich (s. z. B. STEENROD [12] 15.11) auch als die Menge der Homotopieklassen rel. y_0 von stetigen Abbildungen $\varphi\colon (S^q, y_0) \to (X, x_0)$ [an Stelle der Abbildungen $\sigma\colon (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, x_0)$, vgl. 1.3] auffassen. Die Beziehung zwischen φ und σ wird durch eine Orientierung von S^q, d. h. durch die Auswahl eines der beiden erzeugenden Elemente von $\pi_q(S^q, y_0) \cong H_q(S^q) \cong \Gamma$ bestimmt: Repräsentiert $\chi\colon (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (S^q, y_0)$ die Orientierung, d. h. das ausgewählte erzeugende Element von $\pi_q(S^q, y_0)$, so betrachtet man die Homotopieklassen (rel. y_0 bzw. rel. $\partial\Delta_q$) von φ und $\sigma = \varphi \circ \chi$ als das gleiche Element von $\pi_q(X, x_0)$.

Ist X eine topologische Gruppe mit dem neutralen Element e, so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, e)$ trivial in $\pi_q(X, e)$ für jedes $q > 0$ (vgl. [12] 16.8, 16.9). Bei dem Beweis in [12] wird die Existenz des Inversen in X nicht benutzt, und es handelt sich immer um Abbildungen kompakter Räume in X. Wörtlich der gleiche Beweis liefert also:

A. *Ist X ein C-Monoid mit dem neutralen Element e, so operiert $\pi_1(X, e)$ trivial in $\pi_q(X, e)$ für jedes $q > 0$.*

In einem beliebigen topologischen Raum X gehört zu einem Weg w von $x_1 \in X$ nach $x_2 \in X$ ein bestimmter Isomorphismus $\pi_q(X, x_2) \cong \pi_q(X, x_1)$ (vgl. [12] 16.1 bis 16.3). X heißt q-einfach (vgl. [12] 16.5), wenn X bogenweise zusammenhängend ist und der genannte Isomorphismus für jedes Punktepaar $x_1, x_2 \in X$ nicht von der Wahl des Weges w abhängt. In [12] 16.5 wird gezeigt, daß X schon dann q-einfach ist, wenn es bogenweise zusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ für ein geeignetes x_0 trivial in $\pi_q(X, x_0)$ operiert. Ferner wird dort gezeigt, daß in einem q-einfachen Raum X jede stetige Abbildung $\varphi\colon S^q \to X$ einer orientierten q-Sphäre S^q eindeutig ein Element α von $\pi_q(X, x_0)$ für beliebiges $x_0 \in X$ bestimmt. Die Bestimmung von α kann dabei folgendermaßen beschrieben werden: Man wähle ein $y_0 \in S_q$ und eine zu φ homotope Abbildung $\varphi'\colon S^q \to X$ mit $\varphi'(y_0) = x_0$. (Letzteres kann man etwa dadurch erreichen, daß man zuerst $\varphi(y_0)$ mit x_0 durch einen Weg verbindet und diese Homotopie von $\varphi|\{y_0\}$ auf ganz S^q erweitert. Die Möglichkeit dieser Erweiterung ist ein sehr einfacher Fall des Homotopie-Erweiterungssatzes für CW-Komplexe, vgl. WHITEHEAD [13] § 5 (J).) Dann ist α die Homotopieklasse von $\varphi'\colon (S^q, y_0) \to (X, x_0)$ rel. y_0. Aus A. folgt also:

B. *Jedes bogenweise zusammenhängende C-Monoid X mit neutralem Element e ist q-einfach für alle $q>0$; jede stetige Abbildung $S^q \to X$ einer orientierten q-Sphäre S^q bestimmt daher eindeutig ein Element von $\pi_q(X, e)$.*

Ist X eine topologische Gruppe mit dem neutralen Element e, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen induziert (vgl. [*12*] 16.7). Wir bemerkten schon in 1.3, daß das auch für C-Gruppen gilt. Da die Existenz des Inversen in X in dem Beweis in [*12*] nicht benutzt wird, folgt sogar:

C. *Ist X ein C-Monoid mit dem neutralen Element e, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen induziert.*

Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob Abbildungen $(\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, e)$ oder $(S^q, y_0) \to (X, e)$ als Repräsentanten benutzt werden. Ist X bogenweise zusammenhängend, so kann man nach B. beliebige stetige Abbildungen $S^q \to X$ als Repräsentanten für die Elemente von $\pi_q(X, e)$ benutzen. *Auch die Multiplikation dieser Abbildungen induziert die richtige Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$.* Seien nämlich $\varphi, \psi\colon S^q \to X$ beliebige stetige Abbildungen. Wir wählen ein $y_0 \in S^q$ und deformieren φ, ψ in φ' bzw. ψ', so daß $\varphi'(y_0) = \psi'(y_0) = e$ ist. Dann sind die Homotopieklassen von $\varphi', \psi'\colon (S^q, y_0) \to (X, e)$ die nach B. durch φ bzw. ψ bestimmten Elemente α bzw. β von $\pi_q(X, e)$. Aus $\varphi \simeq \varphi', \psi \simeq \psi'$ folgt $\varphi \cdot \psi \simeq \varphi' \cdot \psi'$ ($\simeq$ bedeutet: homotop). Durch $\varphi' \cdot \psi'$ wird nach C. die Summe $\alpha + \beta$ repräsentiert, also auch durch $\varphi \cdot \psi$.

3.3. Ein Hilfssatz. Sei X ein bogenweise zusammenhängendes abelsches C-Monoid mit dem neutralen Element e. Die Multiplikation in X induziert eine Multiplikation im singulären CSS-Komplex $S(X)$, die $S(X)$ zu einem CSS-Monoid macht (analog zu 1.2 Beispiel 1). K sei eine abelsche CSS-Gruppe und $f\colon L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus eines CSS-Untermonoids L von K.

Jedem Paar $a, b \in L_q$ mit $a \cdot b^{-1} \in K_q^q = K_q \cap \bigcap_i \operatorname{Kern} d_i$ (vgl. 1.3), $q>0$, ordnen wir auf folgende Weise ein Element von $\pi_q(X, e)$ zu: fa, fb sind nach Voraussetzung stetige Abbildungen $\Delta_q \to X$, die wegen

$$d_i(a \cdot b^{-1}) = e_{q-1} \quad (= \text{neutrales Element von } K_{q-1}),$$

$$\text{also} \qquad d_i a = d_i b,$$

$$\text{also} \qquad d_i f a = d_i f b$$

auf dem Rande $\partial\Delta_q$ übereinstimmen. Identifiziert man zwei Exemplare Δ_q, Δ_q' von Δ_q längs ihrer Ränder, so entsteht eine q-Sphäre S^q. Zwei stetige Abbildungen $\sigma\colon \Delta_q \to X$, $\sigma'\colon \Delta_q (= \Delta_q') \to X$, die auf dem Rande $\partial\Delta_q$ übereinstimmen, definieren eine stetige Abbildung $(\sigma, \sigma')\colon S^q \to X$ durch die Festsetzung $(\sigma, \sigma')|\Delta_q = \sigma$, $(\sigma, \sigma')|\Delta_q' = \sigma'$. Nach 3.2 B. bestimmt (σ, σ') ein Element $[\sigma, \sigma']$ von $\pi_q(X, e)$. So erhalten wir speziell $(fa, fb)\colon S^q \to X$ und $[fa, fb] \in \pi_q(X, e)$. Um diese Definition völlig eindeutig zu machen, müssen wir noch

über die Orientierung von $S^q = \Delta_q \cup \Delta_q'$ verfügen (vgl. 3.2). Ist $\sigma(\partial \Delta_q) = e$ und $\varrho_q: \Delta_q \to e \in X$ die konstante Abbildung, so sieht man leicht, daß je nach der Orientierung von S^q entweder (σ, ϱ_q) oder (ϱ_q, σ) (im Sinne von 3.2) dasselbe Element von $\pi_q(X, e)$ wie $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, e)$ repräsentiert. Wir orientieren S^q so, daß das erstere der Fall ist.

Hilfssatz. *X sei ein bogenweise zusammenhängendes abelsches C-Monoid mit dem neutralen Element e, K eine abelsche CSS-Gruppe, L ein CSS-Untermonoid von K und $f: L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus. Wird die Gruppe K_q für jedes q von L_q erzeugt, so definiert die Zuordnung*

$$K_q^q \ni a \cdot b^{-1} \to [fa, fb] \in \pi_q(X, e)$$

eine (eindeutige) Abbildung $\hat{f}: K_q^q \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$. Diese ist ein Homomorphismus und bildet $d_{q+1} K_{q+1}^q \subset K_q^q$ in $0 \in \pi_q(X, e)$ ab, induziert also einen Homomorphismus $f_{\overline{\pi}}: \pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$.

Beweis. Um zu zeigen, daß $[fa, fb]$ nur von $a \cdot b^{-1}$ (und nicht von a, b einzeln) abhängt, bemerken wir zunächst, daß $(\sigma, \sigma): S^q \to X$ für jedes $\sigma: \Delta_q \to X$ nullhomotop ist. [(σ_t, σ_t), $0 \leq t \leq 1$, ist eine Nullhomotopie von (σ, σ), wenn σ_t eine Nullhomotopie von σ ist.] Nun sei $a \cdot b^{-1} = a' \cdot b'^{-1} \in K_q^q$ $(a, a', b, b' \in L_q)$, folglich $a \cdot b' = a' \cdot b$. Dann ist

$$\begin{aligned}(fa, fb) &\simeq (fa, fb) \cdot (fb', fb') = \big(f(a \cdot b'), f(b \cdot b')\big) \\ &= \big(f(a' \cdot b), f(b \cdot b')\big) = (fa', fb') \cdot (fb, fb) \simeq (fa', fb').\end{aligned}$$

[Abbildungen in X werden im Sinne der Monoidstruktur von X miteinander multipliziert, d.h. für $\varphi, \psi: T \to X$ ist $(\varphi \cdot \psi)(t) = \varphi(t) \cdot \psi(t)$ für alle $t \in T$, T beliebig.] Daraus folgt $[fa, fb] = [fa', fb']$, und $\hat{f}$ ist demnach wirklich eindeutig definiert. $\hat{f}$ ist auch für jedes $c \in K_q^q$ erklärt, denn c läßt sich sicher in der Form $c = a \cdot b^{-1}$ mit $a, b \in L_q$ schreiben, weil K_q von L_q erzeugt wird und L_q ein Untermonoid ist.

Daß $\hat{f}: K_q^q \to \pi_q(X, e)$ ein Homomorphismus ist, folgt aus

$$(fa, fb) \cdot (fa', fb') = \big(f(a \cdot a'), f(b \cdot b')\big)$$

$(a, a', b, b' \in L_q;\ a \cdot b^{-1},\ a' \cdot b'^{-1} \in K_q^q)$, wenn man beachtet, daß die Addition in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von Repräsentanten induziert wird (vgl. 3.2 C. und die anschließende Bemerkung).

Es bleibt $\hat{f}(d_{q+1} K_{q+1}^q) = 0$ zu zeigen: Sei $c = d_{q+1} \tilde{c}$, $\tilde{c} \in K_{q+1}^q$. $\tilde{c}$ können wir in der Form $\tilde{c} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1}$ mit $\tilde{a}, \tilde{b} \in L_{q+1}$ schreiben, weil K_{q+1} von L_{q+1} erzeugt wird. $f\tilde{a}$ und $f\tilde{b}$ sind stetige Abbildungen $\Delta_{q+1} \to X$. Definieren wir $\varphi_i: \Delta_q \to \Delta_{q+1}$ durch die Bedingungen (vgl. Fig. 1)

a) $\varphi_0 = \varepsilon_{q+1}: \Delta_q \to \Delta_{q+1}$ (vgl. 1.1),

b) φ_1 bildet ganz Δ_q in die letzte Ecke $q+1$ von Δ_{q+1} ab,

c) die durch $t \to \varphi_t(x)$ definierte Abbildung $I = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\} \to \Delta_{q+1}$ ist affin für jedes $x \in \Delta_q$,

so stimmen $f\tilde{a} \circ \varphi_t$ und $f\tilde{b} \circ \varphi_t$ auf dem Rand $\partial \Delta_q$ überein, weil aus $\tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1} \in K_{q+1}^q = K_{q+1} \cap \bigcap_{i \leq q} \operatorname{Kern} d_i$ folgt

$$d_i \tilde{a} = d_i \tilde{b} \quad \text{für } i \leq q$$

und damit

$$d_i f\tilde{a} = d_i f\tilde{b} \quad \text{für } i \leq q.$$

$(f\tilde{a} \circ \varphi_t, f\tilde{b} \circ \varphi_t)\colon S^q \to X$ ist also definiert und liefert eine Nullhomotopie von

$$(f\tilde{a} \circ \varphi_0, f\tilde{b} \circ \varphi_0) = (f\tilde{a} \circ \varepsilon_{q+1}, f\tilde{b} \circ \varepsilon_{q+1}) = (f d_{q+1}\tilde{a}, f d_{q+1}\tilde{b}).$$

Letzteres ist aber ein Repräsentant von $\hat{f}\left(d_{q+1}(\tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1})\right) = \hat{f}(c)$.

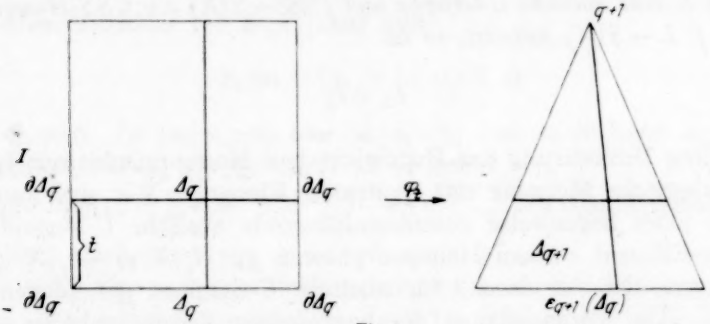

Fig. 1

3.4. Ergänzungen zu 3.3. X, X' seien bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoide mit den neutralen Elementen e, e', und $\varphi\colon X \to X'$ sei ein stetiger Monoidhomomorphismus mit $\varphi(e) = e'$. φ induziert einen CSS-Monoidhomomorphismus $\varphi\colon S(X) \to S(X')$ und Homomorphismen

$$\varphi_\pi\colon \pi_q(X, e) \to \pi_q(X', e') \quad \text{für } q > 0.$$

Wie in 3.3 sei ferner K eine abelsche CSS-Gruppe, $L \subset K$ ein CSS-Untermonoid, so daß K_q für jedes q von L_q erzeugt wird, und $f\colon L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus.

A. *Für die durch f und $\varphi \circ f$ nach dem Hilfssatz in 3.3 induzierten Homomorphismen $f_{\bar{\pi}}\colon \pi_q(K) \to \pi_q(X, e)$ bzw. $(\varphi \circ f)_{\bar{\pi}}\colon \pi_q(K) \to \pi_q(X', e')$ gilt*

$$(\varphi \circ f)_{\bar{\pi}} = \varphi_\pi \circ f_{\bar{\pi}}.$$

Beweis. Repräsentiert $a \cdot b^{-1} \in K_q^q$ $(a, b \in L_q)$ das Element $\alpha \in \pi_q(K)$, so ist $(\varphi \circ f)_{\bar{\pi}}(\alpha) = [(\varphi \circ f)a, (\varphi \circ f)b] = [\varphi \circ fa, \varphi \circ fb]$. Ferner ist $(\varphi \circ fa, \varphi \circ fb) = \varphi \circ (fa, fb)$, also $[\varphi \circ fa, \varphi \circ fb] = \varphi_\pi [fa, fb] = \varphi_\pi f_{\bar{\pi}}(\alpha)$.

Zweitens zeigen wir, daß die Definition von $f_{\bar{\pi}}$ verträglich ist mit der in 1.5 getroffenen Definition der Homomorphismen zwischen Homotopiegruppen, die durch CSS-Homomorphismen zwischen CSS-Gruppen induziert werden. Ist nämlich X sogar eine abelsche C-Gruppe, $S(X)$ also eine abelsche CSS-Gruppe, und läßt sich $f\colon L \to S(X)$ zu einem CSS-Homomorphismus $\bar{f}\colon K \to S(X)$

fortsetzen, so ist sowohl $\bar{f}_\pi$ (nach 1.5) als auch $f_{\bar{\pi}}$ und $\bar{f}_{\bar{\pi}}$ (nach 3.3) definiert. Ist $c = a \cdot b^{-1} \in K_q^q$ $(a, b \in L_q)$ ein Repräsentant von $\alpha \in \pi_q(K)$, so ist nach Definition

$$f_{\bar{\pi}}(\alpha) = [fa, fb] = [\bar{f}a, \bar{f}b] = \bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha).$$

Andererseits können wir $\bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha)$ durch $(\bar{f}c, \bar{f}e_q)\colon S^q \to X$ repräsentieren, wobei e_q das neutrale Element von K_q ist. $\bar{f}e_q$ ist das neutrale Element von $S_q(X)$, also die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$; folglich repräsentiert $(\bar{f}c, \bar{f}e_q)$ dasselbe Element von $\pi_q(X, e)$ wie $\bar{f}c\colon (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, e)$ (vgl. 3.3). Da $\bar{f}_\pi(\alpha)$ nach Definition durch $\bar{f}c \in S_q^q(X)$ repräsentiert wird, folgt $\bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha) = \bar{f}_\pi(\alpha)$, und wir können feststellen:

B. *Ist X eine abelsche C-Gruppe und $\bar{f}\colon K \to S(X)$ ein CSS-Homomorphismus, der $f\colon L \to S(X)$ fortsetzt, so ist*

$$f_{\bar{\pi}} = \bar{f}_\pi.$$

3.5. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus für abelsche topologische Monoide mit neutralem Element. Wir sind nun in der Lage, für jedes bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoid X mit neutralem Element e einen Homomorphismus $g_*\colon H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$, $q > 0$, zu definieren, der den in 1.7 für abelsche C-Gruppen gefundenen verallgemeinert. (Die Voraussetzung des bogenweisen Zusammenhangs ist zwar einschränkend hinzugetreten; sie spielt aber für $q > 0$ offenbar keine wesentliche Rolle.)

Sei $K = \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$. Die Elemente von K_q sind also Restklassen von formalen Summen $\sum_i n_i \sigma_i$, $\sigma_i \in S_q(X)$. Wir setzen

$$\tilde{L}_q = \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \,\middle|\, \sigma_i \in S_q(X),\ n_i \geq 0 \right\} \subset \Gamma_q S(X)$$

und bezeichnen das natürliche Bild von $\tilde{L}_q$ in K_q mit L_q. $\tilde{L} = \bigcup_q \tilde{L}_q$, $L = \bigcup_q L_q$ sind CSS-Untermonoide von $\Gamma S(X)$ bzw. K. Analog zu 1.7 sei $\tilde{g}\colon \tilde{L} \to S(X)$ derjenige CSS-Monoidhomomorphismus, der in $S(X) \subset \tilde{L} \subset \Gamma S(X)$ die Identität ist und die neutralen Elemente in die neutralen Elemente überführt, d.h. es gilt

$$\tilde{g}\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \prod_i \sigma_i^{n_i}, \qquad \sigma_i \in S_q(X),\ n_i \geq 0$$

$$\tilde{g}(0_q) = \varrho_q,$$

wobei $\varrho_q\colon \Delta_q \to e \in X$ die konstante Abbildung ist und die Multiplikation auf der rechten Seite im Sinne der CSS-Monoidstruktur von $S(X)$ zu verstehen ist. Wegen $\tilde{g}(\Gamma S(e)) \subset S(e) = \{\varrho_q\}$ induziert $\tilde{g}$ einen CSS-Monoidhomomorphismus $g\colon L \to S(X)$. Da K_q von L_q erzeugt wird, ist der Hilfssatz von 3.3 anwendbar und liefert die Homomorphismen $g_{\bar{\pi}}\colon \pi_q(K) \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$.

Zusammen mit dem nach 1.4 Satz 2 bestehenden Isomorphismus $\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) = H_q(X, e)$ ergibt sich schließlich:

$$g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e), \qquad q > 0.$$

Explizit erhält man $g_*(\alpha)$ für jedes $\alpha \in H_q(X, e)$ nach folgender Vorschrift:

Man wähle ein $c = \sum_i n_i \sigma_i \in \Gamma_q S(X)$, *dessen Restklasse* $\bar{c} \in K_q = \Gamma_q S(X)/\Gamma_q S(e)$ *die Homologieklasse* $\alpha \in H_q(X, e) = \mathfrak{H}_q(K)$ *repräsentiert, und zwar so, daß* $d_j \bar{c} = 0$ *ist für alle* j. [Daß das möglich ist, folgt aus der Isomorphie $\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K)$, vgl. 1.4 Satz 2 Folgerung D. $\bar{c}$ repräsentiert gleichzeitig das Urbild von α in $\pi_q(K)$.] *Dann bilde man* $\sigma_+ = \prod_{n_i > 0} \sigma_i^{n_i}$, $\sigma_- = \prod_{n_i < 0} \sigma_i^{-n_i}$ [*Multiplikation im Sinne der CSS-Monoidstruktur von* $S(X)$] *und setze*

$$g_*(\alpha) = [\sigma_+, \sigma_-] \in \pi_q(X, e)$$

(vgl. 3.3, S. 409). *Ist* $\{n_i \mid n_i > 0\}$ *oder* $\{n_i \mid n_i < 0\}$ *leer, so ist unter* σ_+ *bzw.* σ_- *die konstante Abbildung* $\varrho_q: \Delta_q \to e \in X$ *zu verstehen.*

Beweis. Sei $c_+ = \sum_{n_i > 0} n_i \sigma_i$, $c_- = \sum_{n_i < 0} (-n_i)\, \sigma_i \in \tilde{L}_q$ mit den Restklassen $\bar{c}_+$, $\bar{c}_- \in L_q$. Nach Definition von g ist $g\bar{c}_+ = \sigma_+$, $g\bar{c}_- = \sigma_-$. Andererseits ist $\bar{c} = \bar{c}_+ - \bar{c}_- \in K_q^q$, also nach 3.3 (die Gruppenoperation in K wird hier im Unterschied zu 3.3 additiv geschrieben): $g_{\bar{\pi}}(\alpha') = [g\bar{c}_+, g\bar{c}_-] = [\sigma_+, \sigma_-]$, wenn $\alpha' \in \pi_q(K)$ das durch $\bar{c}$ repräsentierte Element bezeichnet. Nach Definition von g_* ist aber $g_*(\alpha) = g_{\bar{\pi}}(\alpha')$.

Im Fall, daß X sogar eine abelsche C-Gruppe, $S(X)$ also eine CSS-Gruppe ist, läßt sich $g: L \to S(X)$ zu einem CSS-Homomorphismus $\bar{g}: K \to S(X)$ fortsetzen, der mit dem in 1.7 eingeführten (und dort mit g bezeichneten) übereinstimmt. Nach 3.4 B. ist $g_{\bar{\pi}} = \bar{g}_\pi$, d.h. die hier gegebene Definition von g_* ist mit der in 1.7 verträglich. Ebenso wie in 1.7 gilt hier:

$g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$ *ist natürlich, d.h. für jeden stetigen Monoidhomomorphismus* $\varphi: X \to X'$ *zwischen den abelschen C-Monoiden* X, X' *mit den neutralen Elementen* e, $e' = \varphi(e)$ *ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, e) & \xrightarrow{\varphi_H} & H_q(X', e') \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g'_*} \\ \pi_q(X, e) & \xrightarrow{\varphi_\pi} & \pi_q(X', e') \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Wie in der obigen Vorschrift zur Bestimmung von g_* sei $c = \sum_i n_i \sigma_i$, $\sigma_i \in S_q(X)$; die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$ repräsentiere $\alpha \in H_q(X, e)$, und es sei $d_j \bar{c} = 0$ für alle j. Dann wird $\varphi_\pi g_*(\alpha)$ durch $\varphi \circ \left(\prod_{n_i > 0} \sigma_i^{n_i}, \prod_{n_i < 0} \sigma_i^{-n_i} \right)$ und $g'_* \varphi_H(\alpha)$ durch $\left(\prod_{n_i > 0} (\varphi \circ \sigma_i)^{n_i}, \prod_{n_i < 0} (\varphi \circ \sigma)^{-n_i} \right)$ repräsentiert. Da diese beiden Abbildungen gleich sind, folgt die Behauptung.

Der Hurewiczsche Homomorphismus $h_*: \pi_q(X, e) \to H_q(X, e)$, $q > 0$, ist für das C-Monoid X mit dem neutralen Element e wie für jeden topologischen Raum X definiert (vgl. 1.6). In Verallgemeinerung der Folgerung B aus Satz 3 in 1.7 zeigen wir:

Satz 12. *Für jedes bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoid X mit dem neutralen Element e ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(X, e) \xrightarrow{h_*} H_q(X, e) \xrightarrow{g_*} \pi_q(X, e), \qquad q > 0$$

des Hurewiczschen Homomorphismus h_* mit dem oben definierten Homomorphismus g_* die Identität. Daher ist h_* monomorph[12]), g_* epimorph[12]) und $h_* \pi_q(X, e)$ direkter Summand in $H_q(X, e) \cong H_q(X)$ $(q > 0)$.

Beweis. Sei $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, e)$ ein Repräsentant von $\alpha \in \pi_q(X, e)$. Faßt man σ als Element von $\Gamma S(X)$ auf, so repräsentiert die Restklasse $\bar{\sigma} \in \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$ das Element $h_*(\alpha) \in H_q(X, e)$ (vgl. 1.6). $d_j \sigma$ ist für jedes j die konstante Abbildung $\varrho_{q-1}: \Delta_{q-1} \to e \in X$, also ist $d_j \bar{\sigma} = 0$ in $\Gamma S(X)/\Gamma S(e)$. Nach der oben angegebenen Vorschrift zur Bestimmung von g_* ist also $g_* h_*(\alpha) = [\sigma, \varrho_q]$. Da σ und (σ, ϱ_q) das gleiche Element von $\pi_q(X, e)$ repräsentieren (vgl. 3.3, S. 410), ist schließlich $g_* h_*(\alpha) = \alpha$.

3.6. Die Homotopieäquivalenz zwischen abelschen topologischen Gruppen und erzeugenden Untermonoiden. Wir kommen nun zu dem wichtigsten Satz dieses Paragraphen:

Satz 13. *K sei eine abelsche CSS-Gruppe, $L < K$ ein CSS-Untermonoid, so daß L_q für jedes q das neutrale Element von K_q enthält und die Gruppe K_q erzeugt. Das abelsche C-Monoid $|L|$ mit dem neutralen Element e (vgl. 3.1 Satz 11) sei zusammenhängend. Dann induziert die natürliche Injektion (vgl. 2.1)*

$$K > L \xrightarrow{i} S(|L|)$$

(gemäß 3.3 Hilfssatz) die Homomorphismen

$$i_{\bar{\pi}}: \pi_q(K) \longrightarrow \pi_q(|L|, e), \qquad q > 0.$$

$i_{\bar{\pi}}$ ist ein Isomorphismus auf $\pi_q(|L|, e)$ und seine Zusammensetzung

$$\pi_q(K) \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} \pi_q(|L|, e) \xrightarrow{|j|_\pi} \pi_q(|K|, e)$$

mit $|j|_\pi$, induziert durch die Injektion $|j|: |L| \to |K|$, ist der natürliche Isomorphismus $\pi_q(K) \cong \pi_q(|K|, e)$ von 2.8 Satz 8; d.h. etwas ungenauer: $i_{\bar{\pi}}$ und $|j|_\pi$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Beweis. $|L|$ ist bogenweise zusammenhängend, weil es ein CW-Komplex und nach Voraussetzung zusammenhängend ist [vgl. WHITEHEAD [13] § 5 (M)]. Also ist der Hilfssatz in 3.3 anwendbar und liefert

$$i_{\bar{\pi}}: \pi_q(K) \to \pi_q(|L|, e) \qquad q > 0.$$

[12]) Zur Definition von „monomorph" und „epimorph" s. Fußnote [2]) S. 368.

Die Injektion $j: L \to K$ induziert die Injektion $|j|: |L| \to |K|$ (vgl. 2.3 D.). Die Injektion $|j|$ ist mit den Multiplikationen in $|L|$ und $|K|$ verträglich, wie man unmittelbar aus der charakterisierenden Gleichung 2.6 (2) (S. 391) entnimmt, d.h. $|j|$ ist ein Monoidhomomorphismus. Nach 3.4 A. ist daher

$$(|j| \circ i)_{\bar{\pi}} = |j|_{\pi} \circ i_{\bar{\pi}}.$$

Andererseits ist die natürliche Injektion $\bar{i}: K \to S(|K|)$ eine Fortsetzung von $|j| \circ i: L \to S(|K|)$, also ist nach 3.4 B.

$$(|j| \circ i)_{\bar{\pi}} = \bar{i}_{\pi}.$$

$\bar{i}_{\pi}: \pi_q(K) \to \pi_q(|K|, e)$ ist aber gerade der natürliche Isomorphismus von 2.8 Satz 8, d.h. wir haben gezeigt: Die Zusammensetzung

$$\pi_q(K) \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} \pi_q(|L|, e) \xrightarrow{|j|_{\pi}} \pi_q(|K|, e)$$

ist der natürliche Isomorphismus.

Daraus folgt bereits, daß $i_{\bar{\pi}}$ monomorph ist; zu zeigen bleibt nur noch die Epimorphie. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} & \pi_q(|L|, e) \\ \uparrow \bar{g}_* & & \uparrow g_* \\ H_q(L, E) & \xrightarrow{i_H} & H_q(|L|, e) \end{array} \tag{1}$$

Darin ist $E = \{e_q\}$ der von den neutralen Elementen $e_q \in K_q$ gebildete CSS-Unterkomplex von $L < K$. Offenbar ist $|E| = e$ das neutrale Element von $|L| < |K|$ (vgl. 2.6 C.). i_H ist der natürliche Isomorphismus (vgl. 2.7 Satz 7). g_* ist der in 3.5 definierte natürliche Homomorphismus, und $\bar{g}_*$ setzt sich zusammen aus $j_H: H_q(L, E) \to H_q(K, E)$, induziert durch die Injektion $j: L \to K$, und dem natürlichen Homomorphismus $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ von 1.7. Wir zeigen, daß das Diagramm (1) kommutativ ist:

Sei $\alpha \in H_q(L, E)$, repräsentiert durch die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma_q L / \Gamma_q E$ von $c = \sum_{\nu} n_\nu a_\nu \in \Gamma_q L$, $a_\nu \in L_q$. Nach 1.4 Folgerung D können wir c so wählen, daß $d_\mu \bar{c} = 0$ ist für alle μ. Auch $j_H(\alpha)$ wird durch $\bar{c}$ repräsentiert, und nach Definition von $\bar{g}_*$ (vgl. 1.7) ist $a = \prod_{\nu} a_\nu^{n_\nu} \in K_q^q = K_q \cap \bigcap_{\mu} \operatorname{Kern} d_\mu$ ein Repräsentant von $\bar{g}_*(\alpha)$. Mit

$$a_+ = \prod_{n_\nu > 0} a_\nu^{n_\nu} \qquad (= e_q, \text{ falls } n_\nu \leqq 0 \text{ für alle } \nu)$$

$$a_- = \prod_{n_\nu < 0} a_\nu^{-n_\nu} \qquad (= e_q, \text{ falls } n_\nu \geqq 0 \text{ für alle } \nu)$$

ist $a = a_+ \cdot a_-^{-1}$, $a_+, a_- \in L_q$. Nach Definition von $i_{\bar{\pi}}$ (vgl. den Hilfssatz in 3.3) ist also

$$i_{\bar{\pi}} \bar{g}_*(\alpha) = [i a_+, i a_-] = \Big[i\Big(\prod_{n_\nu > 0} a_\nu^{n_\nu}\Big),\ i\Big(\prod_{n_\nu < 0} a_\nu^{-n_\nu}\Big) \Big]. \tag{2}$$

Andererseits wird $i_H(\alpha)$ durch die Restklasse von $\sum_\nu n_\nu \cdot i a_\nu$ in $\Gamma S(|L|)/\Gamma S(e)$ repräsentiert, und nach 3.5 (S. 413) ist

$$(3) \qquad g_* i_H(\alpha) = \Big[\prod_{n_\nu > 0} (i a_\nu)^{n_\nu}, \prod_{n_\nu < 0} (i a_\nu)^{-n_\nu} \Big].$$

Die Gleichung 2.6 (2), die die Multiplikation in $|L|$ charakterisiert, besagt, daß $i: L \to S(|L|)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus ist. Daraus folgt, daß die rechten Seiten von (2) und (3) gleich sind, also gilt $i_{\bar\pi} \circ \bar g_* = g_* \circ i_H$, d.h. das Diagramm (1) ist kommutativ.

Nun ist i_H isomorph nach 2.7 Satz 7, g_* epimorph nach 3.5 Satz 12, folglich ist $i_{\bar\pi} \circ \bar g_* = g_* \circ i_H$ und schließlich auch $i_{\bar\pi}$ epimorph. Das beendet den Beweis von Satz 13.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 13 (K = abelsche CSS-Gruppe, L = CSS-Untermonoid von K, L_q erzeugt K_q und enthält das neutrale Element $e_q \in K_q$ für alle q, $|L|$ ist zusammenhängend) ist $|L|$ Deformationsretrakt von $|K|$.*

Beweis. $|L|$ ist nach Voraussetzung (und weil es ein CW-Komplex ist) bogenweise zusammenhängend. Wir wollen zunächst das gleiche für $|K|$ beweisen: Sei $z \in |K|$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es ein $c \in K_q$ (für geeignetes q) und ein $t \in \Delta_q$, so daß $z = c(t)$ ist. Weil L_q ein Untermonoid von K_q ist und K_q erzeugt, gibt es $a, b \in L_q$ mit $c = a \cdot b^{-1}$. Nach Definition der Multiplikation in $|K|$ [vgl. 2.6 (2), (4)] folgt $z = c(t) = (a \cdot b^{-1})(t) = a(t) \cdot (b(t))^{-1}$, und $x = a(t)$, $y = b(t)$ sind Elemente von $|L|$. Aus einem Weg, der y in $|L|$ mit dem neutralen Element e verbindet, erhält man durch Übergang zum Inversen und Multiplikation mit x einen Weg, der $z = x \cdot y^{-1}$ in $|K|$ mit x verbindet; x läßt sich in $|L| \subset |K|$ weiter mit e verbinden.

Satz 13 besagt insbesondere, daß die Injektion $|j|: |L| \to |K|$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Aus dem Satz von WHITEHEAD [*13*] § 1 Th. 1 folgt daher, daß $|j|$ eine Homotopieäquivalenz ist. Sei $\psi: |K| \to |L|$ homotopieinvers zu $|j|$, d.h. $\psi \circ |j| \simeq$ Identität, $|j| \circ \psi \simeq$ Identität. Weil $\psi | |L| = \psi \circ |j|$ zur Identität von $|L|$ homotop ist, gibt es nach dem Homotopieerweiterungssatz für CW-Komplexe (vgl. [*13*] § 5 (J)) eine Abbildung $\psi': |K| \to |L|$ mit $\psi' \simeq \psi$ und $\psi' | |L| =$ Identität. ψ' ist also eine Retraktion von $|K|$ auf $|L|$. Wegen $|j| \circ \psi' \simeq |j| \circ \psi \simeq$ Identität von $|K|$ ist es eine Deformationsretraktion.

Bemerkung. Im Hinblick auf die Voraussetzungen von Satz 13 stellen wir noch folgendes fest: Ist $K = \bigcup_q K_q$ eine CSS-Gruppe und $L = \bigcup_q L_q$ ein CSS-Unterkomplex von K, so gilt:

A. *L ist genau dann ein CSS-Untermonoid von K, wenn $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist.*

B. *Die Aussagen*

a) *L_0 enthält das neutrale Element $e_0 \in K_0$,*

b) *L_q enthält das neutrale Element $e_q \in K_q$ für alle q,*

c) *$|L|$ enthält das neutrale Element $e \in |K|$*

sind äquivalent.

C. *Die Gruppe K_q wird genau dann für alle q von L_q erzeugt, wenn die Gruppe $|K|$ von $|L|$ erzeugt wird.*

Demnach könnte man die Voraussetzungen von Satz 13 auch so formulieren:

$|K|$ sei die geometrische Realisierung einer abelschen CSS-Gruppe K, und L sei ein CSS-Unterkomplex von K, so daß $|L|$ ein zusammenhängendes Untermonoid von $|K|$ ist, das das neutrale Element enthält und die Gruppe $|K|$ erzeugt.

Beweis von A. Wenn L ein CSS-Untermonoid von K ist, so folgt aus der charakterisierenden Gleichung 2.6 (2) für die Multiplikation in $|K|$, daß $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist, und wollen zeigen: $a, a' \in L_p$ impliziert $a \cdot a' \in L_p$ für jedes p. Nach 2.6 (2) ist $(a \cdot a')(t) = a(t) \cdot a'(t)$ für alle $t \in \Delta_p$; wegen $a(t), a'(t) \in |L|$ und weil $|L|$ ein Untermonoid ist, gilt also $(a \cdot a')(\Delta_p) < |L|$. Gemäß dem Hilfssatz in 2.1 schreiben wir $a \cdot a'$ in der Form $a \cdot a' = \beta^* b$ mit nicht ausgeartetem $b \in K_q$ und $\beta: [p] \xrightarrow{\text{auf}} [q]$. Dann ist $b(\Delta_q) = b(\beta(\Delta_p)) = (a \cdot a')(\Delta_p) < |L|$, d.h. $b(\mathring{\Delta}_q)$ ist eine q-Zelle von $|L|$ (vgl. 2.1). Also gibt es ein nicht ausgeartetes $b' \in L_q$, so daß $b': \Delta_q \to |L| < |K|$ eine charakteristische Abbildung für $b(\mathring{\Delta}_q)$ ist. Auch $b: \Delta_q \to |K|$ ist eine charakteristische Abbildung für $b(\mathring{\Delta}_q)$. Da die Zuordnung zwischen den nicht ausgearteten Elementen von K_q und den q-Zellen von $|K|$ umkehrbar eindeutig ist, gilt $b' = b$ und damit $b \in L_q$. Weil L ein CSS-Unterkomplex ist, folgt $a \cdot a' = \beta^* b \in L_p$.

Beweis von B. a) folgt trivialerweise aus b). Aus $e_0 \in L_0$ folgt umgekehrt $e_q = (s_0)^q e_0 \in L_q$, weil L ein CSS-Unterkomplex ist, d.h. a) ist mit b) äquivalent.

Wie wir in 2.6 sahen (vgl. den Beweis von 2.6 C.), ist $e = e_0(\Delta_0)$ das neutrale Element von $|K|$. Daher ist c) eine Folge von a). Setzt man umgekehrt c) voraus, so muß es ein $a \in L_0$ geben mit $a(\Delta_0) = e$, weil e eine 0-Zelle von $|L| < |K|$ ist. Da die Zuordnung zwischen den Elementen von K_0 (die alle nicht ausgeartet sind) und den 0-Zellen von $|K|$ umkehrbar eindeutig ist, gilt $a = e_0$, also $e_0 \in L_0$.

Beweis von C. Nehmen wir zunächst an, daß K_q für alle q von L_q erzeugt wird. Sei $x \in |K|$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es ein $a \in K_q$ (mit geeignetem q) und ein $t \in \Delta_q$, so daß $a(t) = x$ ist. Nach Voraussetzung gibt es $a_1, \ldots, a_n \in L_q$ mit $a = a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n}$, $\nu_i = \pm 1$. Mit Hilfe von 2.6 (2), (4) folgt $x = a(t) = (a_1(t))^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (a_n(t))^{\nu_n}$. Wegen $a_i(t) \in |L|$ zeigt das, daß $|K|$ von $|L|$ erzeugt wird.

Sei nun umgekehrt $|K|$ als von $|L|$ erzeugt vorausgesetzt. Wir betrachten zunächst ein nicht ausgeartetes Element $b \in K_q$. $t \in \mathring{\Delta}_q = \Delta_q - \partial \Delta_q$ sei beliebig, aber fest gewählt. Nach Voraussetzung gibt es $x_1, \ldots, x_n \in |L|$ mit $b(t) = x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$, $\nu_i = \pm 1$. Nach 2.5 Folgerung B gibt es $a_i \in L_p$ und ein $t' \in \Delta_p$, so daß $x_i = a_i(t')$ ist. Wir wollen annehmen, daß p minimal gewählt wurde. Dann ist sogar $t' \in \mathring{\Delta}_p = \Delta_p - \partial \Delta_p$, denn andernfalls gäbe es ein j mit $t' = \varepsilon_j(t'')$, $t'' \in \Delta_{p-1}$, und es wäre $x_i = a_i(\varepsilon_j(t'')) = (d_j a_i)(t'')$, $d_j a_i \in L_{p-1}$, also p nicht

minimal. Mit Hilfe von 2.6 (2), (4) folgt

$$b(t) = (a_1(t'))^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_n(t'))^{r_n} = (a_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{r_n})(t').$$

Zerlegen wir $a_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{r_n}$ gemäß dem Hilfssatz in 2.1 in der Form $a_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{r_n} = \beta'^* b'$ mit nicht ausgeartetem $b' \in K_{q'}$ und $\beta' : [p] \xrightarrow{\text{auf}} [q']$, so folgt weiter $b(t) = b'(\beta'(t'))$. Wegen $t' \in \mathring{\Delta}_p$ ist $\beta'(t') \in \mathring{\Delta}_{q'}$, also haben die Zellen $b(\mathring{\Delta}_q)$ und $b'(\mathring{\Delta}_{q'})$ von $|K|$ einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt, daß sie sogar gleich sind, d.h. $q = q'$ und $b = b'$. Weil $\beta' : [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ ist, gibt es ein monotones $\gamma : [q] \to [p]$, so daß $\beta' \circ \gamma$ die Identität ist. Mit einem solchen γ gilt: $b = b' = \gamma^* \beta'^* b' = \gamma^*(a_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{r_n}) = a_1'^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n'^{r_n}$ mit $a_i' = \gamma^* a_i \in L_q$. Damit ist gezeigt, daß sich jedes nicht ausgeartete $b \in K_q$ durch Multiplikation und Übergang zum Inversen aus Elementen von L_q erhalten läßt. Ist $a \in K$ irgendein Element, so schreiben wir es in der Form $a = \beta^* b$ mit nicht ausgeartetem b. Zu b gibt es $a_1', \ldots, a_n' \in L$ mit $b = a_1'^{r_1} \cdot \ldots \cdot a_n'^{r_n}$, also ist $a = \beta^* b = (\beta^* a_1')^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\beta^* a_n')^{r_n}$, $\beta^* a_i' \in L$, und das zeigt die Behauptung für a.

3.7. Anwendung auf das unendliche symmetrische Produkt. Wir wollen nun die Ergebnisse von 3.6 speziell auf das Paar $SP(K) \subset \bar{\Gamma} K$ (vgl. 2.10) anwenden, wobei K irgendein CSS-Komplex mit Grundpunkt ist, d.h. in K_0 ist ein Element l_0 ausgezeichnet. Wie in 2.10 wird $l_q = (s_0)^q l_0$ und $L = \{l_q\}$ gesetzt. L ist dann ein CSS-Unterkomplex von K. $\bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q L$ ist die von $K_q - l_q$ erzeugte freie abelsche Gruppe; sie besteht aus den formalen Summen $\sum_j n_j b_j$, $b_j \in K_q$, mit der Relation $l_q = 0$. $SP_q(K)$ ist das Untermonoid der Elemente $\sum_j n_j b_j$ mit $n_j \geq 0$. Offenbar enthält $SP_q(K)$ das neutrale Element von $\bar{\Gamma}_q K$ und erzeugt die Gruppe $\bar{\Gamma}_q K$. Die Voraussetzungen von 3.6 Satz 13 sind also für das Paar $SP(K) \subset \bar{\Gamma} K$ (an Stelle von $L \subset K$ in 3.6) erfüllt, falls $|SP(K)|$ zusammenhängend ist.

$|K|$ ist offenbar genau dann zusammenhängend, wenn $H_0(K) = H_0(|K|)$ (vgl. 2.7 Satz 7) frei zyklisch ist. Daraus entnimmt man sehr leicht:

Hilfssatz. *$|K|$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sich jedes $a \in K_0$ durch eine „Kette" $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ mit l_0 „verbinden" läßt, d.h.*

$$\begin{aligned} d_0 c_1 &= a \\ d_1 c_i &= d_0 c_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ d_1 c_m &= l_0. \end{aligned}$$

Unter Benutzung dieses Kriteriums zeigen wir, daß $|SP(K)|$ zusammenhängend ist, wenn $|K|$ es ist: Sei $a = \sum_{j=1}^{k} n_j b_j \in SP_0(K)$, $b_j \in K_0$. Weil $|K|$ zusammenhängend ist, gibt es eine Verbindung $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ von b_k mit l_0. Mit der Abkürzung $a_r = \sum_{j=1}^{r} n_j b_j$ ist dann $s_0 a_{k-1} + n_k c_i$, $i = 1, \ldots, m$, eine Verbindung von $a = a_k$ mit a_{k-1} in $SP(K)$ (s_0 ist der 0-te Ausartungsoperator,

vgl. 1.1). In der Tat gilt

$$d_0(s_0a_{k-1}+n_kc_1)=d_0s_0a_{k-1}+n_kd_0c_1=a_{k-1}+n_kb_k=a,$$
$$d_1(s_0a_{k-1}+n_kc_i)=a_{k-1}+n_kd_1c_i$$
$$=a_{k-1}+n_kd_0c_{i+1}=d_0(s_0a_{k-1}+n_kc_{i+1}),\quad i=1,\dots,m-1,$$
$$d_1(s_0a_{k-1}+n_kc_m)=a_{k-1}+n_kl_0=a_{k-1}.$$

Entsprechend läßt sich a_{k-1} mit a_{k-2}, a_{k-2} mit a_{k-3} usw. und daher $a=a_k$ mit $a_0=0$ verbinden. Nach dem Hilfssatz, angewandt auf $SP(K)$ [mit dem Grundpunkt $0\in SP_0(K)$], ist also $|SP(K)|$ zusammenhängend.

Die Folgerung aus Satz 13 in 3.6 ergibt nun für das Paar $SP(K)\subset\bar{\Gamma}K$:

Satz 14. *Ist K ein CSS-Komplex mit Grundpunkt, und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist $|SP(K)|$ Deformationsretrakt von $|\bar{\Gamma}K|$.*

Insbesondere induziert die Injektion $|SP(K)|\subset|\bar{\Gamma}K|$ Isomorphismen der Homotopiegruppen

$$\pi_q(|SP(K)|,0)\cong\pi_q(|\bar{\Gamma}K|,0),\qquad q>0. \tag{1}$$

Daher folgt

$$H_q(|K|)=H_q(|K|,l)\cong\pi_q(|SP(K)|,0),\qquad q>0 \tag{2}$$

[$l=l_q(\Delta_q)=|L|$ ist der Grundpunkt von $|K|$] aus der entsprechenden Isomorphie

$$H_q(|K|,l)\cong\pi_q(|\bar{\Gamma}K|,0) \tag{3}$$

[vgl. 2.9 (4), 2.10 (3)]. Da wir in 2.9 Satz 9 für (3) einen bestimmten Isomorphismus angegeben haben, ist auch der Isomorphismus (2) weitgehend explizit, zumal man in dem Isomorphismus

$$i_\pi\colon\pi_q(\bar{\Gamma}K)\to\pi_q(|SP(K)|,0) \tag{4}$$

von 3.6 Satz 13 einen gewissen Ersatz für eine explizite Umkehrung von (1) hat. Wir wollen aber noch eine andere Definition des Isomorphismus (2) geben, die in Analogie zu 2.9 Satz 9 steht:

Seien $k\colon K\subset SP(K)$ und $j\colon SP(K)\subset\bar{\Gamma}K$ die natürlichen Injektionen [vgl. 2.10 (14)]. $j\circ k$ ist dann die CSS-Abbildung $f\colon K\to\bar{\Gamma}K=\Gamma K/\Gamma L$ von 2.9 (S. 398). In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(|K|,l) & \xrightarrow{|k|_H} & H_q(|SP(K)|,0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_q(|SP(K)|,0) \\ & & \downarrow{\scriptstyle |j|_H} & & \downarrow{\scriptstyle |j|_\pi} \\ & & H_q(|\bar{\Gamma}K|,0) & \xrightarrow{g'_*} & \pi_q(|\bar{\Gamma}K|,0) \end{array}$$

($q>0$) seien g_*, g'_* die natürlichen Homomorphismen von 3.5 bzw. 1.7. Es ist daher kommutativ (3.5, S. 413). Also gilt

$$|j|_\pi\circ g_*\circ|k|_H=g'_*\circ|j|_H\circ|k|_H=g'_*\circ|j\circ k|_H=g'_*\circ|f|_H.$$

Rechts steht der in 2.9 Satz 9 angegebene Isomorphismus für (3), $|j|_\pi$ ist der Isomorphismus (1), also ist $g_* \circ |k|_H$ der Isomorphismus (2), den man aus (3) und (1) erhält. Wir ersetzen noch $H_q(|K|, l)$ durch die (für $q>0$) isomorphe Gruppe $H_q(|K|)$ und stellen fest:

Satz 15. *Ist K ein CSS-Komplex (mit Grundpunkt), und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|) \longrightarrow H_q(|SP(K)|, 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(|SP(K)|, 0)$$

des durch die Injektion $|K| < |SP(K)|$ induzierten Homomorphismus mit dem in 3.5 definierten natürlichen Homomorphismus g_* ein Isomorphismus ($q>0$).

Falls K abzählbar ist, gilt nach 2.10 (11)

$$|SP(K)| = SP(|K|)$$

und nach 2.10 (12)

$$|\bar{\Gamma}K| = AG(|K|).$$

Man kann also in den Sätzen 14 und 15 $|SP(K)|$ durch $SP(|K|)$ und $|\bar{\Gamma}K|$ durch $AG(|K|)$ ersetzen und erhält:

Folgerung. *Ist K ein abzählbarer CSS-Komplex (mit Grundpunkt) und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist $SP(|K|)$ Deformationsretrakt von $AG(|K|)$. Man erhält einen Isomorphismus*

$$H_q(|K|) \cong \pi_q(SP(|K|), 0), \qquad q>0,$$

wenn man $H_q(|K|) \to H_q(SP(|K|), 0)$, induziert durch die Injektion $|K| < SP(|K|$, mit dem natürlichen Homomorphismus $g_* : H_q(SP(|K|), 0) \to \pi_q(SP(|K|), 0)$ (vgl. 3.5) zusammensetzt.

Bemerkung 1. Wie in der Bemerkung 1 am Schluß von 2.10 kann man auch hier aus den Ergebnissen über CSS-Komplexe mit Grundpunkt entsprechende Resultate für Paare von CSS-Komplexen $L<K$ (L nicht leer) erhalten. Wir haben dort einen CSS-Komplex $\bar{K}$ mit Grundpunkt konstruiert ($\bar{K}_q$ entsteht aus K_q durch Identifizieren aller Elemente von L_q zu einem einzigen l_q), so daß $H_q(|K|, |L|) \cong H_q(|\bar{K}|, l)$ und $|\bar{K}| = |K|/|L|$ ist. Aus der Isomorphie $H_q(|\bar{K}|) = H_q(|\bar{K}|, l) \cong \pi_q(SP(|\bar{K}|), 0)$ ($q>0$) der obigen Folgerung ergibt sich also

$$H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(SP(|K|/|L|), 0), \qquad q>0$$

für jedes Paar $L<K$ (L nicht leer) von abzählbaren CSS-Komplexen mit zusammenhängendem $|K|/|L|$.

Bemerkung 2. Obwohl $SP(|K|)$ für überabzählbares K nicht dieselbe Topologie zu haben braucht wie $|SP(K)|$, ist $\pi_q(SP(|K|), 0) \cong \pi_q(|SP(K)|, 0)$, weil $SP(|K|)$ und $|SP(K)|$ die gleichen kompakten Teilmengen haben (vgl. 2.10 Bemerkung 2). Daher läßt sich die Dold-Thomsche Isomorphie $H_q(|K|) \cong \pi_q(SP(|K|), 0)$ auch für überabzählbares K aus Satz 15 gewinnen.

Bemerkung 3. Die hier benutzte Methode zum Beweis der Sätze 14 und 15 gestattet eine naheliegende Verallgemeinerung: Ist $M = \bigcup_q M_q$ irgendein CSS-Untermonoid von $\overline{\Gamma}K$, das $SP(K)$ enthält, so sind offenbar die Voraussetzungen von 3.6 Satz 13 auch für das Paar $M \subset \overline{\Gamma}K$ erfüllt, wenn man noch annimmt, daß $|M|$ zusammenhängend ist. Also ist in Verallgemeinerung von Satz 14 auch $|M|$ *Deformationsretrakt von* $|\overline{\Gamma}K|$ (nach der Folgerung in 3.6). Ebenso kann man in dem Beweis für Satz 15 ohne jede weitere Änderung $SP(K)$ durch M ersetzen und erhält: *Die Zusammensetzung von* $H_q(|K|) \to H_q(|M|, 0)$, *induziert durch die Injektion* $|K| \subset |M|$, *mit dem natürlichen Homomorphismus* $g_*: H_q(|M|, 0) \to \pi_q(|M|, 0)$ *von 3.5 ist ein Isomorphismus*

$$H_q(|K|) \cong \pi_q(|M|, 0), \qquad q > 0.$$

CSS-Monoide M, die den genannten Voraussetzungen genügen, gewinnt man z.B. folgendermaßen: K' sei ein CSS-Unterkomplex von K, der den „Grundpunkt" $l_0 \in K_0$ (und damit ganz $L = \{l_q\}$) enthält. Dann bestehe M_q aus denjenigen Elementen $\sum_j n_j b_j \in \overline{\Gamma}_q K$, $b_j \in K_q$, bei denen $n_j \geq 0$ ist, falls b_j nicht in K'_q liegt (während für die $b_j \in K'_q$ beliebige Koeffizienten zugelassen sind). Wie man sofort bestätigt, ist M ein CSS-Untermonoid von $\overline{\Gamma}K$, das $SP(K)$ enthält. [Speziell ist $M = SP(K)$ für $K' = L$ und $M = \overline{\Gamma}K$ für $K' = K$.] Wenn $|K|$ und $|K'|$ zusammenhängend sind, so auch $|M|$. Das beweist man analog wie oben für $|SP(K)|$: Sei $a = \sum_{j=1}^{k} n_j b_j \in M_0$, $b_j \in K_0$. Weil $|K|$ und $|K'|$ zusammenhängend sind, gibt es eine Verbindung $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ von b_k mit l_0 (vgl. Hilfssatz, S. 418), die sogar in K'_1 liegt, wenn $b_k \in K'_0$ ist. Setzt man $a_r = \sum_{j=1}^{r} n_j b_j$, so ist [wie im Fall $M = SP(K)$] $s_0 a_{k-1} + n_k c_i$, $i = 1, \ldots, m$, eine Verbindung von $a = a_k$ mit a_{k-1}. (Diese Verbindung liegt in M, weil n_k nur dann negativ sein kann, wenn $b_k \in K'_0$ ist; dann ist nach der Wahl der c_i auch $c_i \in K'_1$.) Ebenso läßt sich a_{k-1} mit a_{k-2}, a_{k-2} mit a_{k-3} usw. und daher auch $a = a_k$ mit $a_0 = 0$ verbinden. Nach dem Hilfssatz, angewandt auf M (mit dem Grundpunkt $0 \in M_0$), ist also $|M|$ zusammenhängend.

Das Literaturverzeichnis befindet sich am Ende von Teil I, S. 406.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1957)

BLACKBURN, N.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 422–427 (1958)

Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen

Von
NORMAN BLACKBURN

9272–68

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, die sich als Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen darstellen läßt. Dann ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ durch zwei Elemente erzeugbar (HUPPERT [1] S. 252, Satz 17) und $\mathfrak{G}'$ ist abelsch (ITÔ [2]). In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Falle, daß $\mathfrak{G}'$ nicht zyklisch ist. Es ist schon bekannt, daß in diesem Falle $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ $(n, 1)$ ist, wobei n eine ganze Zahl größer als 1 ist (ITÔ und OHARA [3]). Es ist unser Ziel, in diesem Falle die Struktur von $\mathfrak{G}'$ zu untersuchen.

Bezeichnungen. Für Elemente x, y einer Gruppe bedeutet $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ den Kommutator von x und y. Ferner schreiben wir $x^y = y^{-1}xy = x[x, y]$. Wenn U, V zwei Komplexe in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, dann bedeutet $[U, V]$ das Erzeugnis aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U, y \in V$. Wir schreiben $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ und bezeichnen mit

$$\mathfrak{G} \geq \mathfrak{G}_2 \geq \mathfrak{G}_3 \geq \cdots$$

die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}_2 = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}_i = [\mathfrak{G}_{i-1}, \mathfrak{G}]$ $(i = 3, 4, \ldots)$. $\Phi(\mathfrak{G})$ bedeutet die Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$.

Zuerst beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 1. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei das Produkt der zyklischen 2-Gruppen $\{a\}$ und $\{b\}$, und $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch. $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ sei vom Typ $(n, 1)$ mit $n > 1$. Dann folgt:*

(i) $(\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{G}_3) = 2$; $(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')) = 2$; *wenn $\mathfrak{G}'$ eine Ordnung größer als 4 hat, dann ist $(\Phi(\mathfrak{G}') : \mathfrak{G}_4) = 2$.*

(ii) *a und b haben beide die Ordnung 2^n modulo $\mathfrak{G}'$, und a^{2^n}, b^{2^n} liegen in $\mathfrak{G}_3$, aber nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$.*

Die Tatsache, daß $(\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{G}_3) = 2$ ist, folgt aus dem einfachen Hilfssatz:

Hilfssatz. *$\mathfrak{G}$ sei eine p-Gruppe.*

(i) *Wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$ eine abelsche Gruppe vom Typ $(r_1, r_2, \ldots, r_\alpha)$ mit $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_\alpha$ ist, dann ist der Exponent von $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3$ höchstens p^{r_1}.*

(ii) *Der Exponent von $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ ist nicht kleiner als derjenige von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$.*

Ist nämlich $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$ das direkte Produkt von $\{x_1\mathfrak{G}_2\}, \{x_2\mathfrak{G}_2\}, \ldots, \{x_\alpha\mathfrak{G}_2\}$, wobei $x_i\mathfrak{G}_2$ von der Ordnung p^{r_i} ist, dann wird $\mathfrak{G}$ von $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ erzeugt (s. ZASSENHAUS [4] Kap. IV, Satz 12), und daher wird $\mathfrak{G}_2$ von allen $[x_i, x_j]$ $(1 \leq i < j \leq \alpha)$ und $\mathfrak{G}_3$ erzeugt. Aber $x_j^{p^{r_i}}$ ist ein Element von $\mathfrak{G}_2$ für $j > 1$, und so ist

$$[x_i, x_j^{p^{r_i}}] \equiv 1 \text{ modulo } \mathfrak{G}_3.$$

Wenn man die Kommutatorformeln

$$[a\,b, c] = [a, c]^b\,[b, c], \qquad [a, b\,c] = [a, c]\,[a, b]^c$$

benutzt, dann sieht man leicht, daß

$$[x_i, x_j^{p^{\nu_2}}] \equiv [x_i, x_j]^{p^{\nu_2}} \text{ modulo } \mathfrak{G}_3,$$

und daher wird $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3$ von Elementen erzeugt, deren Ordnungen höchstens p^{ν_2} sind. Damit ist (i) bewiesen. Um (ii) zu beweisen, setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}_{i-1}$ von $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ und $\mathfrak{G}_i$ erzeugt wird, wobei $y_j^{p^\nu}$ ein Element von $\mathfrak{G}_i$ ist ($j = 1, 2, \ldots, \beta$). Dann wird $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{G}_{i+1}$ und allen $[x_k, y_j]$ ($k = 1, 2, \ldots, \alpha$; $j = 1, 2, \ldots, \beta$) erzeugt. Genau wie im Beweis von (i) sieht man, daß

$$[x_k, y_j]^{p^\nu} \equiv [x_k, y_j^{p^\nu}] \equiv 1 \text{ modulo } \mathfrak{G}_{i+1},$$

und das behauptete Ergebnis folgt leicht.

Jetzt setzen wir den Beweis von Satz 1 fort. Um zu zeigen, daß $\left(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')\right) = 2$, bemerken wir zunächst, daß $\Phi(\mathfrak{G}')$ der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}'$ ist, und daß $\mathfrak{G}_3$ wegen $(\mathfrak{G}' : \mathfrak{G}_3) = 2$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ ist: daher folgt $\Phi(\mathfrak{G}') \leq \mathfrak{G}_3$. Auch ist $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$ abelsch vom Typ (1, 1), weil $\mathfrak{G}'$ von zwei Elementen, aber nicht von einem, erzeugt werden kann. Daher ist $\left(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')\right) = 2$.

$\mathfrak{G}$ wird von a und b erzeugt, und daher hat entweder a oder b die Ordnung 2^n, modulo $\mathfrak{G}'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß a diese Ordnung hat, weil $\mathfrak{G} = \{a\}\{b\} = \{b\}\{a\}$ ist. Also gibt es ein solches Element c von $\mathfrak{G}$, daß c^2 in $\mathfrak{G}'$ liegt, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ das direkte Produkt von $\{a\mathfrak{G}'\}$ und $\{c\mathfrak{G}'\}$ ist. $\mathfrak{G}$ wird von a und c erzeugt. Wir werden jetzt beweisen, daß a^{2^n} in $\mathfrak{G}_3$ aber nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt, daß c im Zentralisator von $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt und daß c^2 in $\mathfrak{G}_3$ liegt. Um dieses zu tun, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\Phi(\mathfrak{G}') = 1$ ist. Also ist $\mathfrak{G}'$ vom Typ (1, 1).

Wir setzen $x = [a, c]$, so daß $\mathfrak{G}_2$ von x und $\mathfrak{G}_3$ erzeugt ist. y sei das Element von $\mathfrak{G}_3$, das ungleich 1 ist. Da x in $\mathfrak{G}_2$ liegt, so dürfen wir schreiben

$$[a, x] = y^\alpha, \qquad [c, x] = y^\beta,$$

wobei α, β entweder gleich 0 oder 1 sind, aber sie sind nicht beide 0, weil $[a, x]$ und $[c, x]$ $\mathfrak{G}_3$ erzeugen. Jetzt setzen wir

$$a^{2^n} = x^\varkappa y^\delta, \qquad c^2 = x^\lambda y^\nu.$$

Dann sind a und $x^\varkappa$ vertauschbar, weil y im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt, und wir schließen, daß $\varkappa\alpha \equiv 0\,(2)$ ist. Ferner ist

$$[x^\varkappa, c] = [a^{2^n}, c] = a^{-2^n}(a^c)^{2^n} = a^{-2^n}(a\,x)^{2^n}.$$

Aber $(a\,x)^2 = a^2\,x\,[x, a]\,x = a^2\,x^2\,y^{-\alpha}$, und daher ist $(a\,x)^{2^n} = a^{2^n}$, da $n > 1$ ist. Also ist $[x^\varkappa, c] = 1$, und $\beta\varkappa \equiv 0\,(2)$. Da α und β nicht beide 0 sind, so ist $\varkappa \equiv 0\,(2)$, und a^{2^n} ein Element von $\mathfrak{G}_3$.

9272-68

Ganz ähnlich erörtern wir die Gleichung $c^2 = x^\lambda y^\nu$. c und x^λ sind vertauschbar; also ist $\beta\lambda \equiv 0(2)$. Auch ist

$$[x^\lambda, a] = [c^2, a] = c^{-2}(c^a)^2 = c^{-2}(c\,x^{-1})^2 = [c, x]\,x^{-2} = y^\beta,$$

und $\beta \equiv \alpha\lambda(2)$. Wenn $\lambda \not\equiv 0(2)$ wäre, dann folgte erstens, daß $\beta \equiv 0(2)$ wäre, und zweitens, daß $\alpha \equiv 0(2)$ wäre, was unmöglich ist. Daher ist $\lambda \equiv 0(2)$, und so ist $\beta \equiv 0(2)$; d.h., c liegt im Zentralisator von $\mathfrak{G}'$, und c^2 liegt in $\mathfrak{G}_3$. Auch ist $\alpha \equiv 1(2)$ und $[a, x] = y$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß a^{2^n} ungleich 1 ist. Da $\mathfrak{G} = \{a\}\{b\}$ ist, so darf man schreiben $c = a^k b^l$. l ist ungerade, weil sonst c in dem Erzeugnis von a und $\Phi(\mathfrak{G})$ liegen würde und $\mathfrak{G}$ von a und c nicht erzeugt sein könnte. Daher ist $\{b\}$ von b^l erzeugt, und wir dürfen b durch b^l ersetzen. Also nehmen wir an, daß $c = a^k b$ ist. Dann ist $b = a^{-k}c$, und es folgt

$$b^2 = (a^{-k}c)^2 = c^{a^k} a^{-2k} c.$$

Nach einer kurzen Induktion ist

$$c^{a^k} = c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}},$$

und daher ist

$$\begin{aligned} b^2 &= c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}}\,a^{-2k}c \\ &= c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}}\,c^{a^{2k}}\,a^{-2k} \\ &= c^2\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}-k}\,a^{-2k} \\ &= x^{-k}\,y^{\nu+\binom{k}{2}-k}\,a^{-2k}. \end{aligned}$$

Wenn h irgendein Element aus $\mathfrak{G}'$ ist, dann existieren Zahlen $\varrho(h), \sigma(h)$, so daß $h = a^{\varrho(h)} b^{\sigma(h)}$. Daher ist

$$h = a^{\varrho(h)}(a^{-k}c)^{\sigma(h)},$$

und so ist

$$1 \equiv a^{\varrho(h) - k\sigma(h)}\, c^{\sigma(h)} \text{ modulo } \mathfrak{G}'.$$

Wir schließen, daß $\sigma(h) \equiv 0(2)$ ist und schreiben $\sigma(h) = 2\sigma'(h)$. Wir sehen leicht, daß a^2 und x vertauschbar sind, und es folgt

$$h = a^{\varrho(h)}\,b^{2\sigma'(h)} = a^{\varrho(h) - 2k\sigma'(h)}\,x^{-k\sigma'(h)}\,y^{\left(\nu+\binom{k}{2}-k\right)\sigma'(h)}.$$

Wenn wir diese Gleichung modulo $\mathfrak{G}'$ betrachten, dann finden wir, daß $\varrho(h) - 2k\,\sigma'(h) \equiv 0(2^n)$ ist, und wir dürfen schreiben $\varrho(h) - 2k\,\sigma'(h) = 2^n\tau(h)$. Daher ist

$$h = x^{-k\sigma'(h)}\,y^{\delta\tau(h) + \left(\nu+\binom{k}{2}-k\right)\sigma'(h)}.$$

Wenn wir $h = x$ nehmen, dann finden wir $k\sigma'(x) \equiv 1(2)$, und daher ist k ungerade. Wenn wir $h = y$ nehmen, dann finden wir $k\sigma'(y) \equiv 0(2)$, und daher

ist $\sigma'(y) \equiv 0(2)$. Also ist $y = y^{\delta^{\tau(y)}}$, δ ungerade und $a^{2^n} = y$. Damit sind die obenstehenden Behauptungen bewiesen.

Da k ungerade ist, so hat b auch die Ordnung 2^n, modulo $\mathfrak{G}'$, und wir können daher genau dasselbe für b beweisen wie für a. Also ist b^{2^n} ein Element von $\mathfrak{G}_3$ aber nicht von $\Phi(\mathfrak{G}')$. Damit ist Satz 1 (ii) bewiesen.

Es bleibt nur zu beweisen, daß für $(\mathfrak{G}' : 1) > 4$ gilt $(\Phi(\mathfrak{G}') : \mathfrak{G}_4) = 2$. Aus $(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')) = 2$ folgt, daß $\mathfrak{G}_3/\Phi(\mathfrak{G}')$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt, und daher ist $\mathfrak{G}_4 \leq \Phi(\mathfrak{G}')$. Daher müssen wir nur zeigen, daß $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) = 4$ ist. Offenbar ist $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) \leq 4$, weil $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$, $[a, x]$ und $[c, x]$ erzeugt ist und nach dem Hilfssatz $\mathfrak{G}_3/\mathfrak{G}_4$ den Exponenten 2 hat. Um die Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) = 2$ ist. Da $(\mathfrak{G}' : 1) > 4$ ist, existiert ein solcher Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}_4$ enthalten ist, und $(\mathfrak{G}_4 : \mathfrak{M}) = 2$ (s. Zassenhaus [4] Kap. IV, S. 104). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{M} = 1$ ist. Da $\mathfrak{G}_4$ und $\Phi(\mathfrak{G}')$ dieselbe Ordnung haben und $\mathfrak{G}_4 \leq \Phi(\mathfrak{G}')$ ist, so ist $\mathfrak{G}_4 = \Phi(\mathfrak{G}')$. $\mathfrak{G}_3$ wird von $\mathfrak{G}_4$, $[a, x]$ und $[c, x]$ erzeugt, aber $[c, x] \in \Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}_4$: daher wird $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$ und $[a, x] = z$ erzeugt. Weil a^{2^n} in $\mathfrak{G}_3$ aber nicht in $\mathfrak{G}_4$ liegt, so ist $a^{2^n} \equiv z$ modulo $\mathfrak{G}_4$. Daher sind a und z vertauschbar, weil $\mathfrak{G}_4$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt. Auch ist

$$[z, c] = z^{-1} z^c = z^{-1} [a, x]^c = z^{-1} [a^c, x^c] = z^{-1} [a\, x, x] = 1,$$

da $[x, c]$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt. Dies ist ein Widerspruch, und damit ist Satz 1 bewiesen.

Jetzt sind wir in der Lage, unseren Hauptsatz zu beweisen. Dieser zeigt, daß $\mathfrak{G}'$ eine ganz einfache Struktur hat, mit dem eigenartigen Ausnahmefalle, in dem $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ (2, 1) ist.

Satz 2. *$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, die sich als Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen darstellen läßt, $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ sei vom Typ $(n, 1)$ mit $n > 1$. Wenn $n > 2$ ist, dann ist $\mathfrak{G}'$ vom Typ $(m, 1)$ für geeignetes m.*

Wir nehmen an, daß der Satz nicht richtig sei. Wenn $\mathfrak{N}$ die Gruppe bedeutet, die aus allen Elementen von $\mathfrak{G}'$ besteht, die sich als vierte Potenzen von Elementen von $\mathfrak{G}'$ darstellen lassen, dann ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ eine abelsche Gruppe vom Typ (2, 2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $\mathfrak{N} = 1$ setzen. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen für a, c, x wie früher und schreiben

$$[a, x] = y_1, \quad [c, x] = y_2,$$

so daß $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$, y_1 und y_2 erzeugt wird. Nach dem Beweis von Satz 1 ist c im Zentralisator von $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$, und so ist y_2 in $\Phi(\mathfrak{G}')$. Nach dem Hilfssatz und Satz 1 ist $\mathfrak{G}_3/\mathfrak{G}_4$ vom Typ (1, 1), und $\mathfrak{G}_4 < \Phi(\mathfrak{G}') < \mathfrak{G}_3$: daher liegt y_1 nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$ und $y_1^2 = z$ liegt in $\mathfrak{G}_4$. Es gilt $z \neq 1$, weil $\Phi(\mathfrak{G}')$ aus den Elementen von $\mathfrak{G}'$ der Ordnung 2 besteht, aber $y_1 \notin \Phi(\mathfrak{G}')$. Auch ist $y_2^2 = z^2 = 1$. x^2 liegt in $\Phi(\mathfrak{G}')$ aber nicht in $\mathfrak{G}_4$, weil $\Phi(\mathfrak{G}')$ aus allen zweiten Potenzen von Elementen von $\mathfrak{G}'$ besteht und $\mathfrak{G}'$ von x und y_1 erzeugt wird: daher ist

$x^2 = y_2 z^\nu$ für geeignetes ν. Also ist

$$[a, y_2] = [a, x^2] = y_1^2 = z,$$
$$[c, y_2] = [c, x^2] = y_2^2 = 1.$$

Auch ist

$$[c, y_1] = y_1^{-c} y_1 = [x, a]^c y_1 = [x^c, a^c] y_1 = [x y_2^{-1}, a x] y_1$$
$$= [x y_2^{-1}, a] y_1 = y_1^{-1} [a, y_2] y_1 = z.$$

Jetzt ist $(a x)^2 = a^2 x [x, a] x = a^2 x^2 y_1^{-1}$. Man sieht leicht, daß a^2 vertauschbar mit x^2 und y_1 ist: daher ist

$$(a x)^{2^n} = a^{2^n} x^{2^n} y_1^{-2^{n-1}} = a^{2^n},$$

weil $n > 2$ ist. Aber nach Satz 1 (ii), ist $a^{2^n} = y_1 y_2^\varrho z^\sigma$, für geeignete ϱ, σ. Daher ist

$$[c, y_1 y_2^\varrho z^\sigma] = [c, a^{2^n}] = (a^c)^{-2^n} a^{2^n} = (a x)^{-2^n} a^{2^n} = 1.$$

Dagegen ist

$$[c, y_1 y_2^\varrho z^\sigma] = [c, y_1] = z,$$

und wir haben einen Widerspruch. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken, daß in diesem Falle $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ die Ordnung 2 hat, wobei k die Klasse von $\mathfrak{G}$ ist. Denn nach Satz 2 ist $\Phi(\mathfrak{G}')$ zyklisch, und daher sind $\mathfrak{G}_4$ und $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ zyklisch. Aber nach dem Hilfssatz sind $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ elementar abelsch und daher von der Ordnung 2.

Im Falle, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ $(2, 1)$ ist, können wir nicht schließen, daß $\mathfrak{G}'$ vom Typ $(m, 1)$ ist, und zwar ist jeder Typ von $\mathfrak{G}'$ mit zwei Invarianten möglich. Um dieses zu zeigen, sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe vom Typ (m, m), die von x und y erzeugt ist, wobei m eine gegebene ganze Zahl ist. Der Automorphismus von $\mathfrak{A}$, der jedes Element in das inverse Element überführt, hat die Ordnung 2, und daher dürfen wir eine Gruppe $\mathfrak{H}$ bilden, indem wir zu $\mathfrak{A}$ ein erzeugendes Element c und die Relationen

$$[x, c] = x^{-2}, \quad [y, c] = y^{-2}, \quad c^2 = 1$$

hinzunehmen. Der Automorphismus von $\mathfrak{H}$, der x in $x y^{-1}$, y in y^{-1} und c in $c x^{-1}$ abbildet, läßt $x^{-2} y$ ungeändert, und seine vierte Potenz ist der innere Automorphismus, der von $x^{-2} y$ induziert wird. Nun bilden wir eine Gruppe $\mathfrak{K}$, indem wir zu $\mathfrak{H}$ ein erzeugendes Element a und die Relationen

$$[x, a] = y^{-1}, \quad [y, a] = y^{-2}, \quad [c, a] = x^{-1}, \quad a^4 = x^{-2} y$$

hinzunehmen. Es ist klar, daß x und y $\mathfrak{K}'$ erzeugen. Auch ist $(a c)^4 = y$, und $\{a\} \cap \{a c\} = \{y^{2^{m-1}}\}$. Also ist die Anzahl der Elemente von $\{a\}\{a c\}$ gleich $2^{2m+3} = (\mathfrak{K} : 1)$; d.h., $\{a\}\{a c\} = \mathfrak{K}$.

Jetzt sei $1 \leq l \leq m$. Man sieht leicht, daß $\{x^{-2}y\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}$ ist, und wir nehmen $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}/\{(x^{-2}y)^{2^l}\}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei zyklischen Gruppen, und $\mathfrak{G}'$ ist vom Typ (m, l).

Literatur

[1] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243–264 (1953). – [2] Itô, N.: Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Math. Z. **62**, 400–401 (1955). – [3] Itô, N., u. A. Ohara: Sur les groupes factorisables par deux 2-groupes cycliques. I, II. Proc. Japan Acad. Tokyo **32**, 736—740, 741—743 (1956). – [4] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 15. Mai 1957)

LORENTZ, G. G., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 428–438 (1958)

Über Paare von Limitierungsverfahren

KONRAD KNOPP zum Gedächtnis

Von

G. G. LORENTZ und K. ZELLER

1. Einleitung

Eine Folge $x = \{x_k\}$ heißt limitierbar durch das Matrixverfahren (oder kürzer: die Matrix, das Verfahren) A zum Werte $a = A\text{-}\lim x$, wenn alle Zahlen

$$y_l = x_l^A = x_l(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} x_k \qquad (l = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

im gewöhnlichen Sinne existieren und eine gegen a konvergente Folge bilden.

Das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ einer Matrix A besteht aus allen A-limitierbaren Folgen. Ein Verfahren A ist permanent (oder regulär), wenn es jede konvergente Folge zu ihrem gewöhnlichen Grenzwert limitiert. Zwei Verfahren A, B heißen verträglich, wenn sie niemals ein und derselben Folge verschiedene Grenzwerte zuordnen. Das Verfahren A heißt stärker als B (in Zeichen $A > B$), wenn es alle B-limitierbaren Folgen limitiert. Man beachte, daß hier Verträglichkeit nicht verlangt und die Möglichkeit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ zugelassen wird.

Manchmal betrachten wir nur beschränkte Folgen $x = \{x_k\}$. Diese bilden einen Banach-Raum (m) mit der Norm $||x|| = \sup_k |x_k|$ (außer in Abschnitt 8 wird $||x||$ immer diese Norm bedeuten). Mit $\mathfrak{A}_B$ bezeichnen wir das Wirkfeld von A in (m), d.h. den Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap (m)$. Es ist klar, was z.B. die Feststellung bedeutet: „A und B sind verträglich für beschränkte Folgen."

Wir benützen auch einige Begriffe betreffend starke Limitierbarkeit und Kerne von Folgen. Eine Folge x heißt stark limitierbar durch das Verfahren A zum Werte a, wenn die in (2) auftretenden Zahlen für $l = 0, 1, \ldots$ existieren und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} |x_k - a| \to 0 \qquad (l \to \infty) \tag{2}$$

gilt. Bei permanentem, positivem A ist der starke A-Grenzwert von x eindeutig bestimmt (falls er existiert). Zwei Matrizen A, B sind stark verträglich, wenn aus starker A-Limitierbarkeit der Folge x zum Werte a und starker B-Limitierbarkeit von x zu b die Gleichheit $a = b$ folgt.

Der Kern einer Folge $x = \{x_k\}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Mengen in der komplexen Ebene, die höchstens endlich viele der x_k nicht enthalten. Existieren in (1) alle y_l, so wird der Kern von y auch der A-Kern von x genannt. Zwei (permanente) Verfahren A und B heißen kernverträglich für beschränkte Folgen, wenn für jedes beschränkte x der A-Kern

und der B-Kern einen nichtleeren Durchschnitt besitzen (LORENTZ-ROBINSON [5] benützen eine andere Terminologie). Von zwei (permanenten) Matrizen A und B sagen wir, daß B für beschränkte Folgen kern-stärker als A ist, wenn der B-Kern jeder beschränkten Folge x in deren A-Kern enthalten ist.

Eine permanente Matrix kann nicht zu stark sein, z.B. kann sie nicht alle beschränkten Folgen limitieren. Daher benützt man häufig mehrere Limitierungsverfahren $A, B, \ldots$ gleichzeitig (gewöhnlich wird man die Verträglichkeit dieser Verfahren annehmen). Das führt zu den folgenden Fragen. Sei $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots$ der von endlich vielen Wirkfeldern $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ aufgespannte lineare Raum, d.h. die Menge aller Folgen $z=x+y+\cdots$ mit $x\in\mathfrak{A}, y\in\mathfrak{B}, \ldots$. Wie groß kann die Menge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots$ sein? Kann sie z.B. alle beschränkten Folgen umfassen?

Fragen dieser Art wurden aufgeworfen und teilweise beantwortet von PETERSEN (und GOFFMAN) [7]. Unter anderem konstruiert PETERSEN zwei für beschränkte Folgen verträgliche, positive, permanente Matrizen A und B, für die es kein positives permanentes C gibt, das für beschränkte Folgen stärker als A und B ist. In dieser Arbeit geben wir allgemeinere Resultate in dieser Richtung (Aussagen über Existenz oder Nichtexistenz eines stärkeren C).

In Satz 1 weisen wir zwei permanente verträgliche Matrizen A und B auf, zu denen es kein permanentes C mit $C>A$, $C>B$ gibt; was darauf beruht, daß A und B sehr schnell wachsende Folgen limitieren. Der Beweis benützt Ergebnisse von ERDÖS-PIRANIAN [4] über das verschiedene Verhalten von zeilenfiniten und nichtzeilenfiniten Matrizen. Das Beispiel zeigt, daß gewisse Einschränkungen notwendig sind, um positive Resultate zu erhalten. Viele Möglichkeiten stehen hier offen (Betrachtung von zeilenfiniten Matrizen, von Matrizen mit bestimmten Perfektheitseigenschaften, von langsam wachsenden Folgen). In der vorliegenden Arbeit geben wir uns mit der Behandlung beschränkter Folgen zufrieden. Nur Abschnitt 8 (starke Limitierbarkeit) ist ein erster Schritt zur Untersuchung auch unbeschränkter Folgen.

Eigentümlicherweise benötigen wir jedoch für ein positives Ergebnis über Folgen in (m) Zusatzbedingungen, die unbeschränkte Folgen betreffen. Daß solche Bedingungen wesentlich sind, zeigt Satz 2, der ein Beispiel zweier permanenter Matrizen A und B gibt, die für beschränkte Folgen verträglich sind, bei denen es jedoch keine stetige Linearform auf (m) gibt, die sowohl mit A-lim x als auch mit B-lim x übereinstimmt (in $\mathfrak{A}_B$ bzw. $\mathfrak{B}_B$). Das beruht auf dem Umstand, daß A und B „fast unverträglich" sind, d.h. gewisse im Sinne der Norm von (m) benachbarte Folgen zu ganz verschiedenen Werten limitieren [Singularität (S_1) aus Abschnitt 3]. Bei der Konstruktion von A und B benützen wir einen Gedanken von PETERSEN [7], um verträgliche Paare von Matrizen mit „embryonaler Fast-Unverträglichkeit" zu finden, und kondensieren dann diese Eigenschaft zu „Fast-Unverträglichkeit".

Die beiden Matrizen in Satz 2 müssen jedoch für gewisse unbeschränkte Folgen unverträglich sein (Satz 3). Das trifft sogar zu, wenn die Singularität (S_1) durch eine schwächere Singularität (S_2) ersetzt wird (s. Abschnitt 5,

Lemma 2). Beim Beweis wird eine Folge x, bei der die Unverträglichkeit auftritt, mittels Kondensation von Singularitäten konstruiert, wobei noch ein Glättungsprozeß nötig ist.

Ein positives Ergebnis erhalten wir schließlich in Satz 4. Wenn zwei permanente Matrizen A, B für alle Folgen verträglich sind, dann gibt es ein permanentes C, das für alle beschränkten Folgen stärker als (und verträglich mit) A und B ist. Beim Beweis benötigen wir Lemma 2, das auf gewisse konvexe Mengen führt; Trennungssätze für konvexe Mengen erlauben die Konstruktion von C. Nachträglich bemerkten wir, daß eine ähnliche Methode von Brudno [3] benützt wurde, um die von ihm in [2], [3] eingeführten Normen von Wirkfeldern zu charakterisieren.

Die Lage ist etwas einfacher bei starker Summierbarkeit (wo wir auch unbeschränkte Folgen zulassen) und Kernvergleich (bezüglich beschränkter Folgen). Hier sind Verträglichkeitseigenschaften von A und B *notwendig und hinreichend* für die Existenz eines stärkeren Verfahrens C. Der Beweis unseres Ergebnisses über Kerne (Satz 6) beruht auf der Trennung konvexer Mengen im Raume (l^1), zu dem die Zeilen permanenter Matrizen gehören. Diesen Kunstgriff findet man schon bei Lorentz und Robinson [5] [1]).

2. Nichtexistenz eines stärkeren Verfahrens

Wir geben ein Beispiel, das teilweise die bei den späteren positiven Ergebnissen vorgenommene Einschränkung auf beschränkte Folgen oder starke Limitierbarkeit rechtfertigt.

Satz 1. *Es gibt zwei permanente verträgliche Matrizen A und B, so daß keine permanente Matrix C gleichzeitig $C > A$ und $C > B$ erfüllt.*

Beweis. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

und definieren B als permanente Matrix mit den folgenden Eigenschaften: $b_{l,2k} = b_{l,2k+1}$ für alle k und l; jede Spalte von B enthält genau ein nichtverschwindendes Element; jede Zeile von B enthält unendlich viele Nicht-Nullen. Nach Erdös-Piranian [4] (Theorem 2) ist kein zeilenfinites reguläres C stärker als B. Nach Theorem 4 derselben Arbeit ist kein nicht-zeilenfinites C stärker als A. Das vollendet den Beweis, da ja A und B verträglich sind.

3. Nichtexistenz eines stärkeren Verfahrens bei beschränkten Folgen

Verschiedene Ergebnisse der allgemeinen Limitierungstheorie zeigen einen Zusammenhang zwischen der Limitierbarkeit beschränkter und unbeschränkter Folgen bei einer Matrix A; und dieser Zusammenhang kann zum Nachweis

[1]) Die Verfasser sind der U. S. National Science Foundation für großzügige Förderung zu Dank verpflichtet (research grants NSF G 1014 und NSF G 3468 an Wayne State University).

wesentlicher Eigenschaften von A benützt werden. Zum Beispiel limitiert eine permanente Matrix A gewisse unbeschränkte Folgen, wenn sie eine beschränkt-divergente Folge limitiert. In der vorliegenden Arbeit ergibt der Vergleich von Satz 2 und 3 einen ähnlichen Zusammenhang.

Satz 2. *Es gibt zwei permanente, für beschränkte Folgen verträgliche Matrizen A und B, so daß in (m) keine stetige Linearform existiert, die in $\mathfrak{A}_B$ mit A-lim x und in $\mathfrak{B}_B$ mit B-lim x übereinstimmt.*

Die Behauptung kann auch anders formuliert werden. Wegen der Verträglichkeit von A und B gibt es eine eindeutige Linearform $L(x)$ in $\mathfrak{A}_B+\mathfrak{B}_B$ mit $L(x)=A\text{-lim}\,x$ in $\mathfrak{A}_B$ und $L(x)=B\text{-lim}\,x$ in $\mathfrak{B}_B$. Aber dieses $L(x)$ ist nicht stetig bezüglich der Normtopologie in (m).

Beweis. Es genügt, zwei permanente Matrizen A und B zu konstruieren, die für beschränkte Folgen verträglich sind und die folgende Singularität aufweisen:

(S_1) Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es Folgen $x\in\mathfrak{A}_B$, $y\in\mathfrak{B}_B$ mit $\|x-y\|<\varepsilon$ und $|A\text{-lim}\,x-B\text{-lim}\,y|>1$.

Der Ausgangspunkt unserer Konstruktion sind die folgenden (2×3)-Blocks (mit kleinem $\varrho>0$):

$$A(\varrho)=\begin{pmatrix}1-\varrho & \varrho & 0\\ 1-\varrho & 0 & \varrho\end{pmatrix},\qquad B(\varrho)=\begin{pmatrix}\varrho & 0 & 1-\varrho\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ähnliche Blocks wurden von Petersen [7] benützt. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Blocks sind: Jeder transformiert $(1,1,1)$ in $(1,1)$; weiter führt A das Tripel $(1,0,0)$ in $(1-\varrho, 1-\varrho)$ über und B das Tripel $(1,\varrho,0)$ in (ϱ,ϱ), so daß zwei benachbarte Tripel in zwei ganz verschiedene (und konstante[2]) Paare transformiert werden; wird ein Tripel sowohl von A als auch von B in ein konstantes Paar übergeführt, muß es von der Form (σ,σ,σ) sein. Unter Benützung dieser Blocks ist es leicht, zwei Matrizen A und B zu konstruieren, die die Singularität (S_1) für ein festes $\varepsilon>0$ besitzen.

Für unseren Zweck ist jedoch ein verfeinerter Kondensationsprozeß erforderlich. Mit A_n^{2m} bezeichnen wir einen $(2m\times 3)$-Block, der jede Zeile von $2^{-n}A(4^{-n})$ genau m Male enthält. Die Zeilen werden dabei so angeordnet, daß in den Zeilen der Matrix

$$A=\begin{pmatrix}A_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & A_1^4 & A_2^4 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & A_1^8 & A_2^8 & A_3^8 & \dots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots\end{pmatrix}$$

jede Kombination der Zeilen von $2^{-1}A(4^{-1})$ und $2^{-2}A(4^{-2})$ zu finden ist, und jede Kombination der Zeilen von $2^{-1}A(4^{-1})$, $2^{-2}A(4^{-2})$, $2^{-3}A(4^{-3})$, usw. Ausgehend von $B(\varrho)$ wird die Matrix B in genau derselben Weise definiert.

A und B sind offenbar regulär. Unter Verwendung der Eigenschaften der Blocks erkennen wir, daß es zu jedem $\varrho=4^{-n}$ eine Folge gibt, die aus Tripeln

[2]) Wir nennen ein Paar (x, y) konstant, wenn $x=y$ gilt.

$(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ besteht sowie A-limitierbar zum Werte $2^{-n}(1-\varrho)$ ist, und eine Folge y, die in ganz entsprechender Weise sich aus Tripeln $(0, 0, 0)$ und $(1, \varrho, 0)$ zusammensetzt und von B zum Werte $2^{-n}\varrho$ limitiert wird. Wir haben $\|x-y\| = \varrho = 4^{-n}$; und die Differenz von A-lim x und B-lim y ist nahe bei 2^{-n}. Daher besitzen die Matrizen A, B die Singularität (S_1) und wir müssen nur noch ihre Verträglichkeit nachweisen.

N_p bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen k, für die in der k-ten Spalte von A Elemente aus dem Block $A_p^{2^m}$ stehen. Die Mengen N_p sind paarweise fremd. Nun betrachten wir die „Teiltransformation"

$$y_l^{(p)} = \sum_{k \in N_p} a_{lk} x_k. \tag{3}$$

Für jede beschränkte A-limitierbare Folge x und jedes p gilt

$$x_{3n+1} - x_{3n+2} \to 0 \qquad \text{für } 3n \in N_p \text{ und } n \to \infty. \tag{4}$$

Wenn nämlich $|x_{3n+1} - x_{3n+2}| = \delta > 0$ für ein festes n mit $3n \in N_p$ gilt, können wir in A zwei Zeilen finden, die beide denselben Block $A_p^{2^m}$ treffen und für deren Nummern l, l' gilt $|y_l^{(p)} - y_{l'}^{(p)}| = 2^{-p} 4^{-p} \delta$. Wegen der bei der Konstruktion von A benützten Vorschrift über die Kombination der Zeilen aus den Blocks haben wir dann in A auch zwei Zeilen, die wiederum denselben Block $A_p^{2^m}$ treffen und für deren Nummern λ, λ' gilt $|y_\lambda - y_{\lambda'}| = |y_l^{(p)} - y_{l'}^{(p)}|$. Daher würde aus $\overline{\lim} |x_{3n+1} - x_{3n+2}| = \delta > 0$ (für $3n \in N_p$ und $n \to \infty$) folgen, daß die Oszillation der A-Transformierten von x mindestens $8^{-p}\delta$ ist, im Widerspruch zur A-Limitierbarkeit von x.

Wenn nun die Folge x auch B-limitierbar ist, so erhalten wir in ähnlicher Weise, unter Benutzung von (4) und der Eigenschaften von $B(\varrho)$,

$$x_{3n} - x_{3n+2} \to 0 \qquad \text{für } 3n \in N_p \text{ und } n \to \infty.$$

Daher gilt für jedes p

$$\sum_{k \in N_p} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \to 0 \qquad \text{für } l \to \infty. \tag{5}$$

Überdies ist

$$\sum_{k \notin N_1, \ldots, N_r} (|a_{lk}| + |b_{lk}|) \leq 2^{-r+1} \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

so daß wegen (5) und (6) für jedes r

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \right| \leq \left| \sum_{k \in N_1, \ldots, N_r} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \right| + 2^{-r+1} \|x\|$$
$$= o(1) + 2^{-r+1} \|x\| \qquad (l \to \infty)$$

gilt, was die Verträglichkeit von A und B für beschränkte Folgen beweist.

4. Die Formulierung der Verträglichkeitssätze

Die in Satz 2 konstruierte Singularität kann nur vorkommen, wenn die Verfahren A und B unverträglich sind:

Satz 3. *Zwei permanente Matrixverfahren A und B sind unverträglich, wenn sie die Singularität (S_1) besitzen.*

Wenn A und B verträglich sind (für alle Folgen), können wir die Existenz einer stetigen Linearform $L(x)$ in (m) zeigen, die $A\text{-}\lim x$ und $B\text{-}\lim x$ auf $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B$ fortsetzt. Darüber hinaus gilt sogar:

Satz 4. *Sind A und B permanente verträgliche Matrixverfahren, so gibt es ein permanentes Matrixverfahren C, das mit A und B für beschränkte Folgen verträglich ist und dessen Wirkfeld $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B$ enthält.*

Satz 3 wird sich aus dem untenstehenden Lemma 2 ergeben, während der Beweis von Satz 4 zusätzlich die Betrachtung gewisser konvexer Mengen erfordert.

5. Einige Lemmata

Wir beginnen mit einem einfachen Lemma, das besagt, daß permanente Matrizen zu zeilen- und spaltenfiniten Matrizen „gestutzt" werden können, ohne ihr Verhalten bezüglich beschränkten Folgen zu ändern.

Lemma 1. *A und B seien permanente Matrizen. Dann gibt es eine Folge $\varrho_k \nearrow \infty$ und zwei Folgen natürlicher Zahlen $p_l \nearrow \infty$, $r_l \nearrow \infty$ mit $p_l < r_l$, so daß folgendes gilt. Sind A', B' die Matrizen, die aus A, B entstehen, indem man die Elemente a_{lk}, b_{lk} mit $k < p_l$ und die mit $k \geq r_l$ durch Null ersetzt, so bestehen für jede Folge x_k mit $x_k = O(\varrho_k)$ die Beziehungen*

$$x_l^A - x_l^{A'} \to 0, \qquad x_l^B - x_l^{B'} \to 0 \qquad (l \to \infty). \tag{7}$$

Beweis. Es genügt, die Zahlen ϱ_k so langsam gegen ∞ gehen zu lassen, daß alle Reihen $\sum_k |a_{lk}| \varrho_k$, $\sum_k |b_{lk}| \varrho_k$ konvergieren, und dann p_l, r_l so zu wählen, daß

$$\sum_{k<p_l} |a_{lk}| \varrho_k \to 0, \qquad \sum_{k \geq r_l} |a_{lk}| \varrho_k \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

gilt, sowie die entsprechenden Beziehungen mit b_{lk} statt a_{lk} bestehen.

Lemma 2. *A und B seien permanente Matrixverfahren und ϱ_k, p_l, r_l gemäß Lemma 1 gewählt. Weiter mögen A und B die folgende Singularität besitzen:*
(S_2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M = M(\varepsilon)$ und ein $m = m(\varepsilon)$ derart, daß für jedes $n > m$ zwei Folgen $x = x(\varepsilon, n)$, $y = y(\varepsilon, n)$ existieren mit den Eigenschaften

$$\|x\| + \|y\| < M, \tag{8}$$

$$|x_k + y_k - 1| < \varepsilon \qquad \text{für } m \leq k < n, \tag{9}$$

$$|x_l^A| + |y_l^B| < \varepsilon \qquad \text{für alle } l \text{ mit } m \leq p_l, r_l < n. \tag{10}$$

Dann sind A und B nicht verträglich, nicht einmal für Folgen $x_k = O(\varrho_k^*)$ bei beliebig vorgegebenen $\varrho_k^* \nearrow \infty$.

Bemerkung. Erfüllen zwei Folgen x, y mit $a = A\text{-}\lim x$ und $b = B\text{-}\lim y$ die Eigenschaft (S_1) für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$, so befriedigen die Folgen $x' = (x-a)/(b-a)$, $y' = (b-y)/(b-a)$ die in (S_2) genannten Ungleichungen für dasselbe ε und beliebiges n, wenn wir nur M und m geeignet wählen [M so groß, daß (8), m so groß, daß (10) gilt]. Daher ist (S_1) eine stärkere Singularität als (S_2) und somit folgt Satz 3 aus Lemma 2.

Beweis. Wir dürfen $\varrho_k^* \leq \varrho_k$ voraussetzen, und wegen Lemma 1 können wir annehmen, daß $a_{lk} = b_{lk} = 0$ für $k < p_l$ und für $k \geq r_l$ ist. Wir wählen eine Folge von natürlichen Zahlen $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_i < \cdots$, die so rasch wächst, daß jedes Intervall $\langle p_l, r_l)$ höchstens zwei der Intervalle $\langle q_i, q_{i+1})$ trifft.

Wir wählen Zahlen $\varepsilon_j \searrow 0$ und erhalten gemäß Lemma 2 Zahlen $M_j = M(\varepsilon_j)$, von denen wir monotones Wachstum voraussetzen dürfen. Dann bestimmen wir Zahlen m_j, die eine monotone Teilfolge der q_i bilden, auf induktiven Wegen. Wir wählen $m_j = q_{i(j)} \geq m(\varepsilon_j)$ so groß, daß

$$M_j \leq \varrho_k^* \quad \text{für } k \geq m_j, \tag{11}$$

$$\frac{M_j}{s(j) - 1} < \varepsilon_j \qquad [\text{mit } s(j) = i(j+1) - i(j) > 1] \tag{12}$$

gilt. Dann setzen wir $n_j = m_{j+2}$. Zu diesen $\varepsilon_j, M_j, m_j, n_j$ gibt es gemäß (S_2) [Formeln (8) bis (10)] passende Folgen $x^{(j)}, y^{(j)}$. Wir möchten aus diesen zwei (möglicherweise unbeschränkte) Folgen x, y zusammenstellen, die die Unverträglichkeit von A und B darlegen. Eine direkte Interpolation $x_k = x_k^{(j)}$ für $m_j \leq k < m_{j+1}$ würde nicht zum Ziele führen, da wir nun nicht zeigen könnten, daß

$$x_l^A = \sum_{p_l \leq k < r_l} a_{lk} x_k \tag{13}$$

auch dann klein ist, wenn ein m_j im Intervall $\langle p_l, r_l)$ liegt.

Diese Schwierigkeit beseitigen wir durch einen Glättungsprozeß. Sei

$$w = \frac{i - i(j)}{s(j) - 1} \quad \text{für } k \in \langle q_i, q_{i+1}) \subset \langle m_j, m_{j+1}), \tag{14}$$

also $0 \leq w_k \leq 1$. Wir setzen

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq k < m_1 \\ (1 - w_k)\, x_k^{(j-1)} + w_k\, x_k^{(j)} & \text{für } m_j \leq k < m_{j+1} \end{cases}$$

und definieren die y_k entsprechend, mit $y_k^{(j)}$ an Stelle von $x_k^{(j)}$. Wegen (11) und (14) ist dann $|x_k| \leq \varrho_k^*$, $|y_k| \leq \varrho_k^*$ für $k \geq m_1$.

Zum Nachweis der Kleinheit von x_l^A wählen wir i und j so, daß

$$\langle p_l, r_l) \subset \langle q_{i-1}, q_{i+1}) \quad \text{und} \quad \langle q_i, q_{i+1}) \subset \langle m_j, m_{j+1})$$

st. Im Falle $q_i = m_j$ (und $j > 1$) gilt $x_k = x_k^{(j-1)}$ (für k in $\langle q_{i-1}, q_{i+1})$) und daher $|x_l^A| = |x_l^{j-1}(A)| < \varepsilon_{j-1}$ wegen $m_{j-1} < q_{i-1} \leq p_l < r_l < q_{i-1} < m_{j+1} = n_{j-1}$. Ist aber $q_i > m_j$, so gilt $x_k = (1 - w_k)\, x_k^{(j-1)} + w_k\, x_k^{(j)}$ (für k in $\langle q_{i-1}, q_{i+1})$), wobei sich w_k von $w = w_{q_i}$ um höchstens $1/(s(j) - 1) < \varepsilon_j / M_j$, unterscheidet. Also unterscheidet sich $x_l(A)$ von

$$\sum_{p_l \leq k < r_l} a_{lk} \{(1 - w)\, x_k^{(j-1)} + w\, x_k^{(j)}\} = (1 - w)\, x_l^{(j-1)}(A) + w\, x_l^{(j)}(A) \tag{15}$$

um höchstens $2\varepsilon_j \sum_k |a_{lk}| \leq \Omega\, \varepsilon_j$. Wegen $m_{j-1} \leq p_l < r_l < n_{j-1}$ haben wir $|x_l^{(j-1)}(A)| < \varepsilon_{j-1}$. Ebenso folgt $|x_l^{(j)}(A)| < \varepsilon_j \leq \varepsilon_{j-1}$. Daher gilt in jedem

Fall $|x_l^A| \leq \varepsilon_{j-1} + \Omega\varepsilon_j \to 0$ für $l \to \infty$. Genauso zeigen wir $y_l^B \to 0$. Da ja $x_k + y_k \to 1$ gilt, haben wir $x_l^B \to 1$, so daß A und B die Folge x zu verschiedenen Werten limitieren. Das vollendet den Beweis.

Enthält das Wirkfeld einer (permanenten) Matrix A für beliebig gegebenes $\varrho_k \nearrow \infty$ Folgen $x_k = O(\varrho_k)$, so enthält es auch gewisse beschränkt-divergente Folgen (WILANSKY-ZELLER [8]). Im Gegensatz dazu können zwei (permanente) Matrizen A und B, wie Satz 2 und Lemma 2 zeigen, für beschränkte Folgen verträglich, für beliebig langsam wachsende Folgen aber unverträglich sein.

Bemerkung. Lemma 2 kann auf eine beliebige endliche Anzahl von Verfahren erweitert werden. Für drei Verfahren A, B, C zum Beispiel bedeutet die Singularität (S_2) die Existenz dreier Folgen $x(\varepsilon, n)$, $y(\varepsilon, n)$, $z(\varepsilon, n)$, die folgende Bedingungen erfüllen: $\|x\| + \|y\| + \|z\| < M$; $|x_k + y_k + z_k - 1| < \varepsilon$ für $m \leq k < n$; $|x_l^A| + |y_l^B| + |z_l^C| < \varepsilon$ für $m \leq p_l$, $r_l < n$. Die Folgerung von Lemma 2 ist dann die Existenz von drei Folgen x, y, z beliebig langsamen Wachstums, die beziehungsweise A-, B-, C-limitierbar zum Werte Null sind, aber $x_k + y_k + z_k \to 1$ erfüllen.

6. Beweis des Satzes 4

Wir dürfen annehmen, daß A, B die Eigenschaften der Matrizen A', B' aus Lemma 1 besitzen (also „gestutzt" sind). Da A und B verträglich sind, ist die Voraussetzung von Lemma 2 nicht erfüllt. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem Paar M, m ein n existiert mit der Eigenschaft, daß (8), (9), (10) nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Wir nehmen $M = m$ und bezeichnen mit $n(m)$ das entsprechende n.

Wir bemerken zunächst: Ist X ein Vektorraum und $\varrho(x, y)$ eine Halbnorm in $X \times X$, so ist $\varrho(z) = \inf_{z=x+y} \varrho(x, y)$ eine Halbnorm in X. — Im endlichdimensionalen Raum $R(m)$ der Folgen $z = \{0, \ldots, 0, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots\}$ [wo $n = n(m)$] definieren wir

$$(16) \qquad \varrho_m(z) = \inf_{x+y=z} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sup_{m \leq p_l, r_l < n} \{|x_l^A| + |y_l^B|\} + \frac{1}{M} \sup_{m \leq k < n} \{|x_k| + |y_k|\} \right].$$

Dieser Ausdruck ist eine Norm in $R(m)$. Wegen der Wahl von n gehört die Folge $z_0 = \{z_{0k}\}$ mit $z_{0k} = 1$ für $m \leq k < n$ und $= 0$ sonst nicht zu der Einheitskugel $\varrho_m(z) < 1$ in $R(m)$. Nach dem Hahn-Banachschen Theorem existiert daher in $R(m)$ (versehen mit der Norm ϱ_m) eine Linearform

$$L_m(z) = \sum_{m \leq k < n} c_{mk} z_k$$

mit $\|L_m\| \leq 1$ und $L(z_0) = 1$.

Wenn wir nun zusätzlich $c_{mk} = 0$ für $k < m$ und für $k \geq n$ setzen, so hat die Matrix $C = \{c_{lk}\}$ die Eigenschaften $\sum_k c_{lk} = 1$ für $l = 0, 1, \ldots$ und $\lim_l c_{lk} = 0$ für $k = 0, 1, \ldots$. Sei z eine beschränkte Folge, die von A zu Null limitiert wird. Dann ist $|z_l^A| < \delta$ für alle großen l; und für die Projektion $\bar{z}$ von z auf

$R(m)$ gilt $\varrho_m(\bar{z}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\|z\|}{m}$ für alle großen m wegen (16). Somit haben wir

$$\left|\sum_k c_{m\,k} z_k\right| = |L_m(\bar{z})| \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\|z\|}{m},$$

so daß z von C zum Werte Null limitiert wird.

Weiter folgt nun, daß C permanent ist und jede beschränkte A-limitierbare (oder auch B-limitierbare) Folge limitiert. Schließlich ist C nach einem allgemeinen Satz von BRUDNO [2] (s. auch PETERSEN [6]) mit A und B verträglich für beschränkte Folgen.

Satz 4 kann auf eine beliebige endliche Anzahl von Verfahren ausgedehnt werden, wenn die Verträglichkeit geeignet definiert wird. Zum Beispiel nennen wir drei Verfahren A, B, C *simultan verträglich*, wenn aus $x+y+z=0$ mit $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{B}$, $z \in \mathfrak{C}$ stets folgt $A\text{-lim}\, x + B\text{-lim}\, y + C\text{-lim}\, z = 0$; d.h. wenn es eine (nicht notwendig stetige) Linearform in $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ gibt, die die A-, B- und C-Limites fortsetzt. Wir formulieren:

Satz 4*. *Sind die permanenten Matrixverfahren A, B, C simultan verträglich, so gibt es ein permanentes Matrixverfahren D, das für beschränkte Folgen stärker als und verträglich mit A, B, C ist.*

Der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe wie bei Satz 4, unter geeigneter Abänderung der Definition der Normen (16) und Verwendung der in Abschnitt 5 erwähnten Variante von Lemma 2.

Es ist zu erwähnen, daß A, B, C paarweise verträglich sein können, ohne simultan verträglich zu sein. Drei von PETERSEN [7] konstruierte Verfahren, die $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B + \mathfrak{C}_B = (m)$ erfüllen, weisen diese Singularität auf.

Natürlich ist für Satz 4 die Voraussetzung der Verträglichkeit wesentlich. Dies zeigen einmal allgemeine Verträglichkeitssätze (BRUDNO [2], PETERSEN [6]), zum andern die beiden durch $A\text{-lim}\, x = \lim x_{2k}$, $B\text{-lim}\, x = \lim x_{2k+1}$ definierten Verfahren, bei denen $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ alle Folgen umfaßt und $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B = (m)$ ist.

7. Starke Limitierbarkeit

Die Methode aus Abschnitt 5 und 6 läßt sich auch bei starker Limitierbarkeit anwenden.

Satz 5. *Zwei permanente positive Matrizen A, B sind genau dann stark verträglich, wenn es eine permanente positive Matrix C gibt, die jede stark A-limitierbare und jede stark B-limitierbare Folge zum selben Wert stark limitiert.*

Lemma 3. *Wenn es zu zwei permanenten positiven Matrizen A und B bei jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $m = m(\varepsilon)$ gibt, so daß bei beliebig großem n zwei positive Folgen x, y existieren mit*

$$x_k + y_k = 1 \qquad (m \leq k < n), \tag{17}$$

$$x_l^A + y_l^B < \varepsilon \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{18}$$

so sind A und B nicht stark verträglich.

Beweis. Wir wählen eine Folge $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum \varepsilon_j < \infty$. Sei $m_j = m(\varepsilon_j)$; wir dürfen dabei $m_j < m_{j+1}$ annehmen. Dann setzen wir $n_j = m_{j+1}$. Es gibt

positive Folgen $x^{(j)}$ und $y^{(j)}$, die (17) und (18) mit diesen ε_j, m_j, n_j erfüllen. Wir dürfen $x_k^{(j)}=0$ für k außerhalb $\langle m_j, n_j)$ annehmen. Wir setzen

$$x_k=\begin{cases} 0 & \text{für } k<m_1,\\ x_k^{(j)} & \text{für } m_j\leq k<n_j \quad (j=1,2,\ldots),\end{cases}$$

und definieren y_k entsprechend. Dann gilt für jedes feste p

$$x_l^A=\sum_{j=1}^{p-1}x_l^{(j)}(A)+\sum_{j=p}^{\infty}x_l^{(j)}(A)\leq o(1)+\sum_{j=p}^{\infty}\varepsilon_j \qquad (l\to\infty),$$

also $x_l^A\to 0$. Ebenso erhalten wir $y_l^B\to 0$. Daher ist x stark A-limitierbar zum Werte 0 (alle vorkommenden Glieder sind ja nichtnegativ), und somit $\{1-x_k\}$ stark B-limitierbar zum Werte Null, also x stark B-limitierbar zum Werte 1 und daher A und B nicht stark verträglich.

Beweis von Satz 5. Wir müssen nur die Notwendigkeit der Bedingung beweisen. A und B seien stark verträglich. Dann ist die Voraussetzung von Lemma 3 nicht erfüllt. Daher gibt es ein $\varepsilon>0$, so daß für jedes m ein $n=n(m)$ existiert mit der Eigenschaft, daß für positive Folgen x, y die Bedingungen (17) und (18) nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Im Raume $R(m)$ der reellen Folgen $z=\{0,\ldots,0,z_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-1},0,\ldots\}$, den wir in natürlicher Weise als Vektorverband auffassen, definieren wir die Halbnorm

$$\varrho_m(z)=\inf_{\substack{z=x+y\\ x,\,y\geq 0}}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sup_{l=0,1,\ldots}(x_l^A+y_l^B)\right] \qquad [\text{wo } x,y\in R(m)]. \tag{19}$$

Sei $z_0=\{z_{0k}\}$ mit $z_{0k}=1$ für $m\leq k<n$ und $=0$ sonst. Ist $z\geq z_0$ in $R(m)$, dann gehört z nicht der durch $\varrho_m(z)<1$ gegebenen Einheitskugel U an. Denn im Falle $z\in U$ gäbe es $x,y\geq 0$ in $R(m)$ mit $x+y=z$ und $x_l^A+y_l^B<\varepsilon$ $(l=0,1,\ldots)$; und wir könnten x', $y'\in R(m)$ mit $0\leq x'\leq x$, $0\leq y'\leq y$ und $x'+y'=z_0$ finden. Dann wäre $x_l'(A)+y_l'(B)<\varepsilon$ für alle l und somit $z_0\in U$, im Widerspruch zur Definition von ε.

Sei K der Kegel (in R_m) aller Elemente $z\geq z_0$. Wir können U und K in R_m durch eine Hyperebene H trennen, die eine Stützhyperebene für K ist (Bourbaki [1, S. 71]). Dann muß H den Punkt z_0 enthalten. Überdies enthält H nicht den Ursprung, da sonst der im Innern von K gelegene Punkt $\bar{z}$ (wo $\bar{z}_k=2$ für $m\leq k<n$) zu H gehören würde. Daher können wir die Gleichung von H in der Form $L_m(z)=1$ schreiben, wo

$$L_m(z)=\sum_{m\leq k<n}c_{mk}z_k.$$

Da $L_m(z)\geq 1$ in K und $L_m(z_0)=1$, ist hierbei $c_{mk}\geq 0$ und $\sum_k c_{mk}=1$. Wie in Abschnitt 5 ergänzen wir nun die Definition von C und vollenden den Beweis.

8. Kern-Verträglichkeit

Wir schließen mit einem Ergebnis, das Satz 4 auf Kerne überträgt. Der zugrunde gelegte Raum, in dem die Trennung konvexer Mengen durchgeführt wird, ist nun der Raum (l^1) der komplexen Folgen $x=\{x_k\}$ mit $\|x\|=\sum_k|x_k|<+\infty$, der jedoch mit reellen Skalaren versehen wird.

Satz 6. *Für zwei permanente Matrixverfahren A und B kann genau eine der folgenden Möglichkeiten auftreten:*

a) A und B sind nicht kern-verträglich für beschränkte Folgen.

b) Es gibt eine permanente Matrix C, die für beschränkte Folgen kern-stärker als A und B ist.

Beweis. Die l-ten Zeilen $a^{(l)}, b^{(l)}$ von A und B betrachten wir als Elemente in (l^1). Mit R_n, R_n' bezeichnen wir die konvexen Hüllen der Mengen $a^{(l)}$ $(l \geq n)$ bzw. $b^{(l)}$ $(l \geq n)$. Es gibt zwei Fälle.

a) *Der Abstand $\varrho(R_n, R_n')$ ist ungleich Null für ein bestimmtes n.* Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\varrho(R_n, R_n') \geq 2\delta$ ist für alle großen n. Wir werden zeigen, daß für eine geeignete stetige Linearform $L(x)$ in (l^1) die folgenden Beziehungen gelten: $L(x) \leq \lambda$ in R_n und $L(x) \geq \lambda + \varepsilon$ in R_n' (mit festem $\varepsilon > 0$). Sei R_n'' die δ-Umgebung von R_n'. Da R_n'' eine offene konvexe Menge ist, gibt es nach einem Trennungssatz (Bourbaki [*1*, S. 71]) eine abgeschlossene Hyperebene H mit Gleichung $L(x) = \lambda$, die R_n und R_n'' trennt: $L(x) \leq \lambda$ in R_n, $L(x) \geq \lambda$ in R_n''. Die Hyperebene H hat einen Abstand $\geq \delta$ von R_n'; somit gibt es eine parallele Hyperebene $L(x) = \lambda + \varepsilon$ (mit geeignetem $\varepsilon > 0$), die H und R_n' trennt. Wir haben $L(x) \geq \lambda + \varepsilon$ in R_n'.

Die Linearform $L(x)$ gestattet eine Darstellung $L(x) = \sum_k (\sigma_k \xi_k + \tau_k \eta_k)$, wo $x_k = \xi_k + i\eta_k$ und σ_k, τ_k beschränkte Folgen sind. Mit $s = \sigma - i\tau$ erfüllen dann die Realteile von s_l^A, s_l^B die Ungleichungen Re $s_l^A \leq \lambda$ und Re $s_l^B \geq \lambda + \varepsilon$ für $l \geq n$. Daher sind A- und B-Kern von s fremd.

b) *Sei $\varrho(R_n, R_n') = 0$ für jedes n.* Dann können wir für jedes n Elemente $c^{(n)} = \{c_{nk}\}$ und $d^{(n)} = \{d_{nk}\}$ auswählen, so daß $c^{(n)} \in R_n$, $\|d^{(n)}\| < n^{-1}$ und $c^{(n)} + d^{(n)} \in R_n'$ gilt. Wir bilden die Matrix $C = \{c_{nk}\}$. Da $c^{(n)}$ in der konvexen Hülle von $a^{(n)}, a^{(n+1)}, \ldots$ liegt, sehen wir leicht, daß C eine permanente Matrix und für beschränkte Folgen kern-stärker als A ist. Im selben Sinne ist $C + D$ stärker als B. Da aber D alle beschränkten Folgen zu Null limitiert, gilt diese Stärkebeziehung auch zwischen C und B, w. z. b. w.

Literatur

[*1*] Bourbaki, N.: Elements de Mathematique, Livre V, Chap. I, II. Paris 1953. — [*2*] Brudno, A. L.: Summation of bounded sequences. Mat. Sbornik, N. S. **16**, 191–247 (1945). — [*3*] Brudno, A. L.: Die Normen von Toeplitzschen Feldern. Doklady Akad. Nauk SSSR., N. S. **81**, 11–14 (1953). — [*4*] Erdös, P., and G. Piranian: Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 397–401 (1950). — [*5*] Lorentz, G. G., and A. Robinson: Core-consistency and total inclusion for methods of summability. Canadian J. of Math. **6**, 27–34 (1953). — [*6*] Petersen, G. M.: Summability methods and bounded sequences. J. London Math. Soc. **31**, 324–326 (1956). — [*7*] Petersen, G. M.: Consistent summability methods. J. London Math. Soc. **32**, 62–65 (1957). — [*8*] Wilansky, A., u. K. Zeller: The inverse matrix in summability: reversible matrices. J. London Math. Soc. (im Druck).

University of Michigan (Ann Arbor, Mich.) und Wayne State University (Detroit 2, Mich.)

(Eingegangen am 20. Juni 1957)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 439–449 (1958)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. VI

Von
BODO VOLKMANN

1. Eine reelle Zahl ϱ mit $0<\varrho\leq 1$ heißt bekanntlich *(g-adisch) einfach-normal*, wenn in ihrer g-adischen Entwicklung

$$(1) \qquad \varrho=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{g^i} \qquad (g, e_i \text{ ganz},\ g\geq 2,\ 0\leq e_i<g;\ \text{unendlich viele } e_i\neq 0)$$

jede der g Anzahlfunktionen

$$A_j(\varrho, n)=\sum_{\substack{i=1\\ e_i=j}}^{n} 1 \qquad (j=0, \ldots, g-1)$$

der Bedingung

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho, n)}{n}=\frac{1}{g}$$

genügt. Ferner heißt ϱ *(g-adisch) normal*, wenn die Zahlen $\varrho, g\varrho, g^2\varrho, \ldots$ sämtlich g^k-adisch einfach-normal für jedes natürliche k sind. Da nach BOREL [2] fast alle Zahlen ϱ normal (und daher auch fast alle Zahlen einfach-normal) sind, haben spätere Autoren ([1], [5], [3], [8]) gewisse Mengen von nichtnormalen Zahlen untersucht und ihre Hausdorffschen Dimensionen bestimmt. Dabei wurde jedoch bisher immer vorausgesetzt, daß die g Ziffernfrequenzen sämtlich konvergieren; nur im Fall $g=2$ sind Ergebnisse bekannt[1]), die auch Häufungspunkte in Betracht ziehen. Zahlen ϱ, bei denen der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho, n)}{n}$ für jedes j mit $0\leq j\leq g-1$ existiert, werden im folgenden als *(g-adisch) einfach-regulär* bezeichnet, und entsprechend der obigen Definition der Normalität nennen wir eine Zahl ϱ *(g-adisch) regulär*, wenn die Zahlen $\varrho, g\varrho, g^2\varrho, \ldots$ sämtlich g^k-adisch einfach-regulär für jedes natürliche k sind*).

2. In der vorliegenden Arbeit werden Mengen von Zahlen ϱ untersucht, bei denen die Forderung der einfachen Regularität nicht mehr gestellt wird. Wir betrachten dazu für jedes ϱ mit $0<\varrho\leq 1$ die Folge der Punkte[2])

$$\mathfrak{p}_i(\varrho)=\left(\frac{A_0(\varrho, i)}{i}, \ldots, \frac{A_{g-1}(\varrho, i)}{i}\right) \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

---

*) (Zusatz bei der Korrektur.) Vgl. dazu auch: STRAUS, E. G., B. VOLKMANN and D. D. WALL: On normality and regularity of numbers. Erscheint im Pacif. Journ. Math.

[1]) Siehe z. B. [6], Satz 52.

[2]) Die Koordinaten eines Punktes im R_g numerieren wir von 0 bis $g-1$.

und bezeichnen durchweg die Menge der Häufungspunkte von $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ mit $V(\varrho)$. Dann lassen sich die obigen Definitionen auch so ausdrücken: Eine Zahl ϱ heißt einfach-regulär, wenn $V(\varrho)$ nur aus einem Punkt besteht, und einfach-normal, wenn dies der Punkt $\left(\frac{1}{g}, \frac{1}{g}, \ldots, \frac{1}{g}\right)$ ist. Bezeichnen wir mit H das $(g-1)$-dimensionale Simplex, in dem sich die Hyperebene $\sum_{j=0}^{g-1} x_j = 1$ und der Einheitswürfel $\{0 \leq x_j \leq 1\}$ $(j=0, \ldots, g-1)$ durchschneiden, so gilt offenbar $V(\varrho) \subseteq H$ für jedes ϱ. Im folgenden wird zunächst bewiesen, daß jede solche Häufungspunktmenge $V(\varrho)$ ein Kontinuum[3]) ist (Satz 1) und danach die Hausdorffsche Dimension der Menge aller ϱ mit vorgegebenem $V(\varrho)$ bestimmt (Satz 2). Dabei zeigt sich, daß jedes Kontinuum V mit $V \subseteq H$ wirklich als $V(\varrho)$ für gewisse ϱ auftritt. Schließlich wird der Fall behandelt, wo man von der Menge $V(\varrho)$, statt sie genau vorzuschreiben, nur verlangt, daß sie Unter- bzw. Obermenge einer gegebenen Menge sein soll (Sätze 3 und 4). Im Fall $g=2$, wo somit die Menge $V(\varrho)$ immer aus einem abgeschlossenen Intervall oder aus einem einzigen Punkt besteht, wurde Satz 1 schon früher bewiesen ([6], Satz 2), während die übrigen Sätze für alle $g \geq 2$ neu sind.

3. Als unmittelbare Folgerungen aus der Definition der einfachen Regularität ergeben sich folgende Aussagen:

1) *Ist N die Menge aller einfach-normalen und E die Menge aller einfach-regulären ϱ, so ist $N \subset E$.*

2) *Die Menge $E-N$ hat das Maß 0 und die Hausdorffsche Dimension 1.*

Denn für jedes α mit $0<\alpha<1$ gibt es ein $\zeta \neq \frac{1}{g}$, so daß die Menge G der ϱ mit $\lim_{i\to\infty} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta$ eine Dimension $\dim G > \alpha$ hat ([3]), und es ist $G \subseteq E-N$.

3) *Alle rationalen Zahlen sind g-adisch einfach-regulär (und sogar regulär) für jedes g; dagegen ist keine rationale Zahl für jedes g einfach-normal.*

Denn es gibt zu rationalem ϱ solche g, bei denen in der Entwicklung (1) nur eine Ziffer unendlich oft auftritt.

4) *Die Eigenschaft der einfachen Regularität einer Zahl ϱ hängt von der Wahl von g ab.*

Sei z. B. $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ eine dyadisch nicht einfach-reguläre Zahl. Dann ersetze man in ihrer Ziffernfolge jede Null durch die Sequenz 0123456789, jede Eins durch die Sequenz 9876543210. Die so entstehende Ziffernfolge ϱ, als Dezimalbruch aufgefaßt, ist einfach-regulär (und sogar einfach-normal) für $g=10$, nicht dagegen einfach-regulär für $g=10^{10}$.

4. Folgende Bezeichnungen und Hilfssätze werden später benötigt:

1) Das α-dimensionale Hausdorffsche Maß einer Punktmenge I bezeichnen wir mit $\{I\}^{\alpha}$, ihre Hausdorffsche Dimension mit $\dim I$.

[3]) Das heißt eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge.

2) Den Abstand zwischen zwei Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, einem Punkt $\mathfrak{p}$ und einer Menge I oder zwischen zwei Mengen I und J bezeichnen wir mit

$$\delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}), \quad \delta(\mathfrak{p}, I), \quad \text{bzw.} \quad \delta(I, J).$$

3) Ist M eine Punktmenge und $\varepsilon > 0$, so bezeichnen wir mit M^ε die Menge der Punkte $\mathfrak{x}$ mit $\delta(\mathfrak{x}, M) \leq \varepsilon$.

4) Mit L_n bezeichnen wir das g-dimensionale Gitter mit der Maschenweite $\frac{1}{n}$, d.h. die Menge aller Punkte der Form $\mathfrak{x} = \left(\frac{x_0}{n}, \ldots, \frac{x_{g-1}}{n}\right)$ mit ganzen x_j. Eine Teilmenge Z von L_n heiße c-zusammenhängend, wenn sich aus ihren Punkten eine Folge $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ bilden läßt, in der jeder mindestens einmal vorkommt und $\delta(\mathfrak{z}_\nu, \mathfrak{z}_{\nu+1}) \leq c$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gilt. Offenbar ist das Gitter L_n selbst $\frac{1}{n}$-zusammenhängend, die Menge $L_n \cap H$ dagegen nur $\frac{\sqrt{2}}{n}$-zusammenhängend.

5) Unter einem Grundintervall n-ter Stufe verstehen wir wie in [9] ein Intervall der Form

$$\nu g^{-n} < \varrho \leq (\nu + 1) g^{-n} \qquad (0 \leq \nu < g^n;\ \nu \text{ ganz}).$$

6) Jeder Ziffernsequenz $E = e_1 \ldots e_n$ ordnen wir den Punkt $\mathfrak{p}(E) = \left(\frac{k_0}{n}, \ldots, \frac{k_{g-1}}{n}\right)$ in H zu, wobei k_j die Anzahl der i mit $e_i = j$ ist. Dann gilt der

Hilfssatz 1. *Seien E_1 und E_2 Sequenzen der Längen n_1 und n_2 mit*

$$\mathfrak{p}(E_i) = \mathfrak{x}_i = (x_{0i}, \ldots, x_{g-1\,i}) \qquad (i = 1, 2).$$

Dann ist

$$\mathfrak{p}(E_1 E_2) = \frac{n_1 \mathfrak{x}_1 + n_2 \mathfrak{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

Insbesondere liegt also $\mathfrak{p}(E_1 E_2)$ auf der Strecke zwischen $\mathfrak{p}(E_1)$ und $\mathfrak{p}(E_2)$.

Beweis. Die Sequenz $E_1 E_2$ hat die Länge $n_1 + n_2$ und enthält die Ziffer j gerade $(n_1 x_{j1} + n_2 x_{j2})$ mal.

7) Für die oben eingeführte Punktfolge $\mathfrak{p}_i(\varrho)$ gilt der

Hilfssatz 2. *Sei $0 < \varrho \leq 1$. Dann ist*

$$\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)\right) \leq \frac{\sqrt{g}}{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Offenbar gilt

$$\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)\right) = \sqrt{\sum_{j=0}^{g-1} \left(\frac{A_j(\varrho, i)}{i} - \frac{A_j(\varrho, i+1)}{i+1}\right)^2}$$

und ferner

$$\left|\frac{A_j(\varrho, i)}{i} - \frac{A_j(\varrho, i+1)}{i+1}\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{A_j(\varrho, i)}{i} - \dfrac{A_j(\varrho, i)+1}{i+1}\right| = \dfrac{|A_j(\varrho, i) - i|}{i(i+1)} \leq \dfrac{1}{i+1} \\ A_j(\varrho, i)\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right) = \dfrac{A_j(\varrho, i)}{i(i+1)} \leq \dfrac{1}{i+1}, \end{cases}$$

je nachdem ob in (1) $e_{i+1} = j$ oder $e_{i+1} \neq j$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

8) Wird für jeden Punkt $\mathfrak{x}=(x_0,\ldots,x_{g-1})\in H$ die Funktion

$$d(\mathfrak{x})=d(x_0,\ldots,x_{g-1})=\frac{\sum_{j=0}^{g-1}x_j\log x_j}{\log\frac{1}{g}}\qquad(\text{„}0\log 0\text{“}=0)$$

definiert, so gilt der[4])

Hilfssatz 3. *Sei n eine natürliche Zahl, $\mathfrak{x}=(x_0,\ldots,x_{g-1})\in H$ und x_0^* so gewählt, daß $x_0^*n=n-\sum_{j=1}^{g-1}[x_jn]$ (und folglich $\lim_{n\to\infty}x_0^*=x_0$) ist. Dann wird beim Grenzübergang $n\to\infty$*

$$\frac{n!}{(x_0^*n)!\,[x_1n]!\ldots[x_{g-1}n]!}=g^{n(d(\mathfrak{x})+o(1))}.$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist für $0<j\leq g-1$

$$[x_jn]!=\sqrt{2\pi[x_jn]}\left(\frac{[x_jn]}{e}\right)^{[x_jn]}\left(1+o(1)\right)=g^{n\left(\frac{x_j\log x_jn}{\log g}+o(1)\right)}e^{-[x_jn]}$$

und folglich

$$\frac{n!}{(x_0^*n)!\,[x_1n]!\ldots[x_{g-1}n]!}=g^{n\left(\frac{\log n}{\log g}+d(\mathfrak{x})-\frac{\log n}{\log g}\sum_{j=0}^{g-1}x_j+o(1)\right)}=g^{n(d(\mathfrak{x})+o(1))}.$$

5. Es gilt der

Satz 1. *Für jedes ϱ ist die Menge $V(\varrho)$ ein Kontinuum.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit der Menge $V(\varrho)$ folgt aus ihrer Definition als Ableitung der Punktmenge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$. Es werde nun angenommen, $V(\varrho)$ wäre nicht zusammenhängend, ließe sich also in zwei Teilmengen V_1 und V_2 von positivem Abstand δ zerlegen. Dann sei R die Menge der Punkte in H, die sowohl von V_1 als auch von V_2 wenigstens den Abstand $\delta/3$ haben. Da für alle genügend großen i nach Hilfssatz 2 offenbar $\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho),\mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)\right)<\frac{\delta}{3}$ ist und andererseits die Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ sowohl in $V_1^{\delta/3}$ als auch in $V_2^{\delta/3}$ unendlich viele Punkte hat, hat sie ebenfalls in R unendlich viele Punkte. Folglich liegt wegen der Abgeschlossenheit und Beschränktheit von R auch wenigstens ein Häufungspunkt von $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ in R — entgegen der Voraussetzung, daß $V(\varrho)=V_1\cup V_2$ sein sollte.

6. Als Umkehrung von Satz 1 beweisen wir den

Satz 2. *Sei V ein Kontinuum mit $V\subseteq H$. Dann gibt es Zahlen ϱ mit $V(\varrho)=V$, und für die Menge $G(V)$ dieser ϱ ist*

$$\dim G(V)=\min_{\mathfrak{x}\in V}d(\mathfrak{x}).$$

[4]) Vgl. [8], Nr. 2.

Beweis. Da die Funktion $d(\mathfrak{x})$ in H stetig und die Menge V abgeschlossen ist, gibt es Punkte in V, wo sie ihr Minimum bezüglich V annimmt. Ein solcher Punkt sei $\mathfrak{z}=(z_0, \ldots, z_{g-1})$. Ferner setzen wir $V^{\sqrt{g}/n} \cap H = V_n$, so daß $V_n \supseteq V_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ gilt. Die Menge $L_n \cap V_n$ ist dann $\frac{2\sqrt{g}}{n}$-zusammenhängend, wie man folgendermaßen einsieht:

Seien $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zwei beliebige Punkte von $L_n \cap V_n$. Dann gibt es Punkte $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \in V$ mit $\delta(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{x}_i) \leq \frac{\sqrt{g}}{n}$ $(i=1, 2)$. Man kann dann, da die Menge V zusammenhängend ist, eine $(g-1)$-dimensionale Kugel K vom Radius $\frac{\sqrt{g}}{n}$ so stetig bewegen, daß ihr Mittelpunkt von $\mathfrak{v}_1$ nach $\mathfrak{v}_2$ geführt wird und nur Punkte von V durchläuft. Ist W_n die Menge der Punkte von V_n, die dabei von der Kugel K überdeckt werden, so ist $\mathfrak{x}_1 \in W_n$, $\mathfrak{x}_2 \in W_n$, und offenbar kann jeder Punkt von W_n, der bei irgendeiner Lage der Kugel K auf ihrem Rand liegt, mit jedem Punkt von $L_n \cap V_n$ in ihrem Innern durch eine Strecke einer Länge $< \frac{2\sqrt{g}}{n}$ verbunden werden. Daher gibt es in W_n einen Streckenzug von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_2$ mit Strecken, die kürzer als $\frac{2\sqrt{g}}{n}$ sind und deren Endpunkte sämtlich zu L_n gehören.

Wir bilden nun aus den Punkten $\mathfrak{x} \in L_n \cap V_n$ eine endliche Folge $\mathfrak{X}_n = \{\mathfrak{x}_{n1}, \mathfrak{x}_{n2}, \ldots, \mathfrak{x}_{nq_n}\}$ derart, daß jeder von ihnen mindestens einmal in $\mathfrak{X}_n$ vorkommt; ferner soll gelten:

$$\delta(\mathfrak{x}_{nm}, \mathfrak{x}_{nm+1}) \leq \frac{2\sqrt{g}}{n} \qquad (m=1, \ldots, q_n-1) \tag{3}$$

(dies ist nach obigen Überlegungen möglich) und

$$\delta(\mathfrak{x}_{n1}, \mathfrak{z}) \leq \frac{1}{n}, \qquad \delta(\mathfrak{x}_{nq_n}, \mathfrak{z}) \leq \frac{1}{n} \tag{4}$$

(was erfüllbar ist, da nach Definition von V_n Punkte von $L_n \cap V_n$ in der $\frac{1}{n}$-Umgebung von $\mathfrak{z}$ liegen). Dann sei $\mathfrak{X}$ die Punktfolge, die durch Aneinandersetzen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots$ entsteht. Mit Hilfe von $\mathfrak{X}$ wird nunmehr eine Punktmenge $M \subseteq H$ konstruiert, für die einerseits $M \subseteq G(V)$ und andererseits $\dim M \geq d(\mathfrak{z})$ gilt.

Im Fall $d(\mathfrak{z})=0$ leistet die leere Menge das Verlangte. Sei also $d(\mathfrak{z})>0$. Dann bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{x}_{nm} \in \mathfrak{X}_n$ mit $\frac{k_{0nm}}{n}, \ldots, \frac{k_{g-1nm}}{n}$, ferner mit $\mathfrak{E}_{nm}$ die Menge aller g-adischen Ziffernsequenzen E_{nm} der Länge n mit $\mathfrak{p}(E_{nm}) = \mathfrak{x}_{nm}$. Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{E}_{nm}$ ist demnach

$$\frac{n!}{k_{0nm}! \ldots k_{g-1nm}!}.$$

Die Bezeichnung $(a\mathfrak{E}_{n\,m})$ werde für eine beliebige Sequenz verwendet, die durch Aneinandersetzen von a Sequenzen aus der Menge $\mathfrak{E}_{n\,m}$ entsteht, d.h. es sei

$$(5) \qquad (a\,\mathfrak{E}_{n\,m}) = E^1_{n\,m} E^2_{n\,m} \dots E^a_{n\,m} \qquad (E^\alpha_{n\,m} \in \mathfrak{E}_{n\,m};\ \alpha = 1, \dots, a).$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{p}\big((a\mathfrak{E}_{n\,m})\big) = \mathfrak{x}_{n\,m}$, unabhängig von der Zahl a und von der Wahl der Sequenzen $E^\alpha_{n\,m}$. In diesem Sinne definieren wir natürliche Zahlen $a_{n\,m}$ $(n = 1, 2, \dots;\ m = 1, \dots, q_n)$ in lexikographischer Reihenfolge derart, daß für alle n und m die Sequenzen $E = (a_{11}\mathfrak{E}_{11})(a_{12}\mathfrak{E}_{12}) \dots (a_{n\,m}\mathfrak{E}_{n\,m})$ der Bedingung

$$(6) \qquad \delta\big(\mathfrak{p}(E), \mathfrak{x}_{n\,m}\big) < \frac{\sqrt{g}}{n}$$

genügen und außerdem $a_{n\,m} \geqq n$ ist, also die Sequenzen $(a_{n\,m}\mathfrak{E}_{n\,m})$ mindestens die Länge n^2 haben. Die Ungleichung (6) ist durch Wahl eines genügend großen $a_{n\,m}$ stets erfüllbar, da ja, wenn etwa $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n\,m-1}$ bereits definiert sind, jede Folge der Form

$$\varrho_\alpha = 0,\ (a_{11}\mathfrak{E}_{11}) \dots (a_{n\,m-1}\mathfrak{E}_{n\,m-1})(\alpha\,\mathfrak{E}_{n\,m})$$

beim Grenzübergang $\alpha \to \infty$ gegen eine Zahl ϱ konvergiert, für die $\lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{p}_i(\varrho) = \mathfrak{x}_{n\,m}$ ist. Die Menge M soll nun aus allen Zahlen ϱ bestehen, deren Ziffernentwicklung (1) von der Form

$$(7) \quad \varrho = 0, (a_{11}\mathfrak{E}_{11}) \dots (a_{1\,q_1}\mathfrak{E}_{1\,q_1})(a_{21}\mathfrak{E}_{21}) \dots (a_{2\,q_2}\mathfrak{E}_{2\,q_2}) \dots (a_{n1}\mathfrak{E}_{n1}) \dots (a_{n\,q_n}\mathfrak{E}_{n\,q_n}) \dots$$

ist.

7. Zum Nachweis von

$$(8) \qquad \dim M \geqq d(\mathfrak{z})$$

brauchen wir folgende Definitionen: Die Sequenzen $E_{n\,m}$, aus denen sich die $(a_{n\,m}\mathfrak{E}_{n\,m})$ in (7) zusammensetzen, seien in der Reihenfolge ihres Auftretens durchnumeriert und so mit $F_1, F_2, \dots$ bezeichnet, so daß $\varrho = 0, F_1 F_2 \dots F_p \dots$ wird. Die Länge von F_p sei n_p, und es sei $W(p) = \sum\limits_{\varkappa=1}^{p} n_\varkappa$. Wegen $n_p \to \infty$ ist dann $n_p = o\big(W(p)\big)$. Ist ferner I_p die Menge aller reellen Zahlen ϱ, die in den ersten $W(p)$ Ziffern mit irgendwelchen Elementen von M übereinstimmen, so ist $M = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} I_p$, $I_p \supseteq I_{p+1}$ $(p = 1, 2, \dots)$, und I_p besteht offenbar aus einer Anzahl $N(p)$ von Grundintervallen $W(p)$-ter Stufe. Beim Übergang von p auf $p+1$ erkennt man, daß jedes dieser Grundintervalle von I_p die gleiche Anzahl von Grundintervallen von I_{p+1} enthält. Somit wird, wenn etwa $F_{p+1} = E^a_{n\,m}$ ist,

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} = \frac{n_{p+1}!}{k_{0\,n\,m}!\, k_{1\,n\,m}! \dots k_{g-1\,n\,m}!},$$

also nach Hilfssatz 3

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} = g^{n_{p+1}(d(\mathfrak{x}_{n\,m}) + o(1))}.$$

Folglich gilt, da wegen $\mathfrak{x}_{n\,m} \in V_n$ und $\lim_{n\to\infty} V_n = V$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für genügend großes n sicher $d(\mathfrak{x}_{n\,m}) > d(\mathfrak{z}) - \varepsilon$ ist, für hinreichend großes p

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} \geq g^{n_{p+1}(d(\mathfrak{z})-2\varepsilon)}$$

und somit für $p \geq p_0(\varepsilon)$ wegen $N(p) = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{N(i+1)}{N(i)}$ $\big(N(0)=1\big)$ offenbar

$$N(p) \geq g^{(n_1+n_2+\cdots+n_p)(d(\mathfrak{z})-3\varepsilon)} = g^{W(p)(d(\mathfrak{z})-3\varepsilon)}.$$

Daher ist das Theorem 5 aus [4] in der in [7] zitierten Form mit $\lambda_p = g^{-W(p)}$ anwendbar. Für $\alpha < d(\mathfrak{z})$ nimmt die dort in der Bedingung b) auftretende Reihe die Form

$$\sum_{p=1}^{\infty} g^{n_p} \frac{1}{N(p)\, g^{-\alpha W(p)}} \leq \sum_{p=p_0(\varepsilon)}^{\infty} g^{n_p + W(p)(\alpha - d(\mathfrak{z}) + 3\varepsilon)} + C$$

an, wo C eine Konstante ist, und da der Exponent für genügend große p sicher $< W(p)\left(\alpha - d(\mathfrak{z}) + 4\varepsilon\right)$ ist, kann man diese Reihe durch die Festsetzung $\varepsilon < \frac{d(\mathfrak{z}) - \alpha}{4}$ konvergent machen. Daraus folgt $\dim M \geq \alpha$ und damit (8).

8. Als nächster Schritt beim Beweis von Satz 2 ist zu zeigen, daß

$$M \subseteqq G(V) \tag{9}$$

gilt. Dazu beweisen wir, daß für jede Zahl $\varrho \in M$ sowohl

$$V(\varrho) \subseteqq V \tag{10}$$

als auch

$$V \subseteqq V(\varrho) \tag{11}$$

ist, was offenbar mit $V(\varrho) = V$ und daher mit (9) gleichbedeutend ist.

a) Zum Beweis von (10) zeigen wir, daß für jedes $\varrho \in M$ und jedes genügend große i, wenn die Ziffer e_i in (1) im Sinne von (7) und (5) in der Sequenz $E^a_{n\,m}$ liegt,

$$\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}\right) < \frac{4\sqrt{g}}{n-1} \tag{12}$$

gilt. Dazu seien j und l die Anzahl der Ziffern von ϱ, die vor der Sequenz $E^a_{n\,m}$, bzw. der Sequenz $(a_{n\,m}\mathfrak{E}_{n\,m})$ liegen, so daß also $l \leq j \leq i$ gilt. Dann ist nach Hilfssatz 1, angewendet auf die Sequenzen $E_1 = e_1 e_2 \ldots e_l$ und $E_2 = e_{l+1} \ldots e_j$, offenbar, da ja $\mathfrak{p}(E_2) = \mathfrak{x}_{n\,m}$ ist,

$$\delta\left(\mathfrak{p}_j(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}\right) \leq \delta\left(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}\right),$$

ferner im Fall $m > 1$ nach (6) und (3)

$$\delta\left(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}\right) \leq \delta\left(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m-1}\right) + \delta\left(\mathfrak{x}_{n\,m-1}, \mathfrak{x}_{n\,m}\right) < \frac{\sqrt{g}}{n} + \frac{2\sqrt{g}}{n}$$

und im Fall $m=1$ nach (6) und (4)

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) \leq \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n-1\,q_{n-1}}) + \delta(\mathfrak{x}_{n-1\,q_{n-1}}, \mathfrak{z}) + \delta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_{n1})$$
$$< \frac{\sqrt{g}}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$

also in beiden Fällen

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) < \frac{3\sqrt{g}}{n-1}.$$

Weiterhin erhält man durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz 2, da nach der Definition der $a_{n\,m}$ für genügend große i sicher

$$j \geq 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 > n^2$$

ist,

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_j(\varrho)) \leq \frac{\sqrt{g}}{j}(i-j) \leq \frac{\sqrt{g}}{(n-1)^2}(i-j) \leq \frac{\sqrt{g}}{n-1}.$$

Somit wird für genügend großes i

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) \leq \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_j(\varrho)) + \delta(\mathfrak{p}_j(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) < \frac{\sqrt{g}}{n-1} + \frac{3\sqrt{g}}{n-1} = \frac{4\sqrt{g}}{n-1},$$

wie behauptet.

Folglich ist bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für alle genügend großen i und die zugehörigen Werte von n und m auf Grund der Definition von $\mathfrak{X}_n$

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), V) \leq \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) + \delta(\mathfrak{x}_{n\,m}, V) \leq \frac{4\sqrt{g}}{n-1} + \frac{\sqrt{g}}{n} < \frac{5\sqrt{g}}{n-1} < \varepsilon$$

und somit $\lim_{i\to\infty} \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), V) = 0$, woraus (10) folgt.

b) Sei $\varrho \in M$ und $\mathfrak{x} = (x_0, \ldots, x_{g-1})$ ein beliebiger Punkt in V. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ ein Häufungspunkt der Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele n derart, daß die $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von $\mathfrak{x}$ in H einen Punkt $\mathfrak{r}$ von L_n enthält. Dann kommt $\mathfrak{r}$ für jedes solche n in der Folge $\mathfrak{X}_n$ mindestens einmal, in der Folge $\mathfrak{X}$ also unendlich oft vor. Folglich gibt es wegen (6) unendlich viele Punkte der Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ in der $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von $\mathfrak{r}$, d.h. in der ε-Umgebung von $\mathfrak{x}$. Also ist $\mathfrak{x} \in V(\varrho)$, und daraus folgt (11).

9. Im Hinblick auf (8) und (9) fehlt zum Abschluß des Beweises von Satz 2 noch der Nachweis, daß

$$\dim G(V) \leq d(\mathfrak{z}) \tag{13}$$

ist. Im Fall $d(\mathfrak{z}) = 1$ ist dies trivial. Sei also $d(\mathfrak{z}) < 1$. Dann betrachten wir die Menge $J_i(\varepsilon)$ aller ϱ mit

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{z}) < \varepsilon. \tag{14}$$

Da es für jedes $\varrho \in G(V)$ unendlich viele i gibt, bei denen (14) gilt, ist offenbar $G(V) \subseteqq \bigcup_{i=N}^{\infty} J_i(\varepsilon)$ für jedes N. Für alle $\varrho \in J_i(\varepsilon)$ ist trivialerweise

$$z_j - \varepsilon \leq \frac{A_j(\varrho, i)}{i} \leq z_j + \varepsilon \qquad (j = 0, \ldots, g-1),$$

und daher gilt für die Anzahl $B_i(\varepsilon)$ der Grundintervalle i-ter Stufe, aus denen sich die Menge $J_i(\varepsilon)$ zusammensetzt, nach Hilfssatz 3 die Beziehung

$$B_i(\varepsilon) \leq (2\varepsilon i + 1)^g g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_1)} < g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_2)},$$

wobei $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_2 = 0$ ist. Somit wird für $\alpha > d(\mathfrak{z})$

$$\{G(V)\}^{\alpha} \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=N}^{\infty} \frac{g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_2)}}{g^{i\alpha}}.$$

Wählt man ε so klein, daß $\alpha - d(\mathfrak{z}) - 2\varepsilon_2 = \tau > 0$ wird, so folgt

$$\{G(V)\}^{\alpha} \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=N}^{\infty} g^{-i\tau} = \lim_{N \to \infty} \frac{g^{-N\tau}}{1 - g^{-\tau}} = 0,$$

und somit ist $\dim G(V) \leq \alpha$, woraus sich (13) ergibt.

10. In dem Fall $g = 2$ läßt der Satz 2 folgende Deutung zu: Da die Menge H die Strecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ ist, sind die auftretenden Mengen V Teilintervalle dieser Strecke, d.h. von der Form $\overline{P_1 P_2}$ mit $P_1 = (\zeta_1, 1-\zeta_1)$, $P_2 = (\zeta_2, 1-\zeta_2)$, und offenbar ist für die Elemente ϱ von $G(V)$ dann

$$\underline{\lim_{i \to \infty}} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta_1, \qquad \overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta_2. \tag{15}$$

Die Funktion $d(\mathfrak{x})$ nimmt in jedem solchen Intervall ihr Minimum an dem Ende an, das am weitesten vom Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entfernt ist. Bezeichnet man also mit $G(\zeta_1, \zeta_2)$ die Menge der dyadischen Zahlen mit (15), so ist auf Grund von Satz 2

$$\dim G(\zeta_1, \zeta_2) = \min\big(d(\zeta_1, 1-\zeta_1),\ d(\zeta_2, 1-\zeta_2)\big) = d(\zeta_r, 1-\zeta_r),$$

wobei $|\frac{1}{2} - \zeta_r| = \max\big(|\frac{1}{2} - \zeta_1|,\ |\frac{1}{2} - \zeta_2|\big)$ ist.

Bezeichnet man ferner mit $S(\zeta_1, \zeta_2)$ die Klasse aller Mengen natürlicher Zahlen mit der unteren asymptotischen Dichte ζ_1 und der oberen asymptotischen Dichte ζ_2, so wird bei der in [6] eingeführten Abbildung $\varrho = \Gamma(\mathfrak{N})$ von Mengen natürlicher Zahlen auf dyadische Brüche offenbar in der dortigen Schreibweise ${}_{\Gamma}S(\zeta_1, \zeta_2) = G(1-\zeta_2, 1-\zeta_1)$.

11. Ist S eine beliebige Menge mit $S \subseteqq H$ und $C(S)$ die Menge der ϱ mit $V(\varrho) \subseteqq S$, so gilt der

Satz 3. $\dim C(S) = \max_{\mathfrak{x} \in S} d(\mathfrak{x})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{z} \in S$ ein Punkt, in dem die Funktion $d(\mathfrak{x})$ ihr Maximum annimmt. Dann gilt für die Menge $G(\{\mathfrak{z}\})$ der einfach-regulären Zahlen ϱ mit $\lim_{i\to\infty} \mathfrak{p}_i(\varrho) = \mathfrak{z}$ offenbar $G(\{\mathfrak{z}\}) \subseteq C(S)$, und andererseits ist nach [3]

$$\dim G(\{\mathfrak{z}\}) = d(\mathfrak{z}).$$

Folglich gilt $\dim C(S) \geq \max_{\mathfrak{x}\in S} d(\mathfrak{x})$.

Zum Beweis der entgegengesetzten Abschätzung betrachte man die Menge U aller Punkte $\mathfrak{x} \in H$ mit $d(\mathfrak{x}) \leq d(\mathfrak{z}) + \varepsilon$. Es gilt sicher $S \subseteq U$ und $C(S) \subseteq C(U)$. Die Anzahl der Grundintervalle n-ter Stufe, in denen Elemente aus $C(U)$ liegen, ist

$$K(n) = \sum_{\mathfrak{x}\in U\cap L_n} \frac{n!}{x_0! \dots x_{g-1}!} \leq n^g \max_{\mathfrak{x}\in U\cap L_n} \frac{n!}{x_0! \dots x_{g-1}!} \leq g^{n(d(\mathfrak{z})+\varepsilon+o(1))},$$

und folglich wird für jedes $\alpha > d(\mathfrak{z})$

$$\{C(S)\}^\alpha \leq \{C(U)\}^\alpha \leq \lim_{n\to\infty} K(n)\, g^{-n\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} g^{n(d(\mathfrak{z})+2\varepsilon-\alpha)}.$$

Daraus folgt, da der Exponent für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ negativ wird, $\{C(S)\}^\alpha = 0$ und somit $\dim C(S) \leq d(\mathfrak{z})$, womit Satz 3 bewiesen ist.

12. Seien T und S beliebige Mengen in H mit $T \subseteq S$, und sei $G(T, S)$ die Menge der Zahlen ϱ mit $T \subseteq V(\varrho) \subseteq S$. Dann gilt der

Satz 4. *Sei T^* der Durchschnitt aller Kontinua in H, die T enthalten. Dann ist*

$$\dim G(T, S) = \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}),$$

falls $T^* \subseteq S$ ist; sonst ist $G(S, T)$ leer.

Beweis. Für jedes $\varrho \in G(S, T)$ gilt, da $V(\varrho)$ ein Kontinuum mit $V(\varrho) \supseteq T$ ist, $T^* \subseteq V(\varrho)$, und daraus folgt $G(T, S) \subseteq G(T^*, S)$. Umgekehrt ist wegen $T \subseteq T^*$ trivialerweise $G(T^*, S) \subseteq G(T, S)$, so daß also $G(T, S) = G(T^*, S)$ gilt. Daher gibt es, wenn T nicht in S enthalten ist, keine Zahl ϱ, die gleichzeitig die Bedingungen $V(\varrho) \supseteq T$ und $V(\varrho) \subseteq S$ erfüllt. Ist aber $T^* \subseteq S$, so gilt wegen $G(T^*) \subseteq G(T^*, S)$ auf Grund von Satz 2 sicher

$$\dim G(T, S) = \dim G(T^*, S) \geq \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}).$$

Andererseits ist, wenn das Minimum etwa für $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}$ angenommen wird, für jedes $\varrho \in G(T^*, S)$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ unendlich oft $\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{z}) < \varepsilon$, und daraus kann man wie beim Beweis von (13) die Ungleichung

$$\dim G(S, T) \leq d(\mathfrak{z})$$

herleiten. Damit ist alles bewiesen.

Folgerung. *Sei $D(T)$ die Menge der ϱ mit $V(\varrho) \supseteq T$. Dann ist*

$$\dim D(T) = \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}).$$

Literatur

[1] Besicovitch, A. S.: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic number system. Math. Ann. **110**, 321–330 (1934). — [2] Borel, E.: Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo **27**, 247–271 (1909). — [3] Eggleston, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. **20**, 31–36 (1949). — [4] Eggleston, H. G.: Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **54**, 42–93 (1951). — [5] Knichal, V.: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Maß. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême, Cl. des Sciences, **1933**, Nr. 14, 1–18. — [6] Volkmann, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine u. angew. Math. **190**, 199–230 (1952). — [7] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. **58**, 284–287 (1953). — [8] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II. Math. Z. **59**, 247–254 (1953). — [9] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V. Math. Z. **65**, 389–413 (1956).

University of California, Los Angeles
und Mathematisches Institut der Universität Mainz

(Eingegangen am 8. Juli 1957)

VRIES, H. DE, and A. B. DE MIRANDA
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 450–464 (1958)

Groups with a small number of automorphisms

By
H. DE VRIES and A. B. DE MIRANDA

§ 1. Introduction

In this article we shall investigate the nature of the groups of which the automorphism group has maximal 8 elements. Also a few additional results are obtained. The investigations will be carried out in three sections, § 2 dealing with torsion-free abelian groups, § 3 with mixed abelian groups, § 4 with non-abelian groups.

We shall use the following notations. The automorphism group of a group G will be denoted by $A(G)$. Abelian groups will be written additively, automorphism groups excepted. If G and H are groups, then $G \times H$ (or sometimes $G + H$ if G and H are abelian) will denote the direct product of G and H (or direct sum respectively). Cyclic groups of order n will be denoted by C_n. $\mathfrak{S}_3$ is the full permutation group of three objects, D the dihedral group of order 8, and Q the quaternion group. Elements of automorphism groups will be denoted by Greek letters. $|G|$ will stand for the order of the group G. For further notations and notions we refer to KUROSH [3].

Most of our results can be read from the summarizing scheme. The periodic abelian groups, corresponding to a prescribed automorphism group are listed without any reference. If torsion-free abelian groups occur, which have a certain group as its automorphism group, we only consider those groups of which the rank is at most $\aleph$[1]); our investigation of the automorphism groups of these groups was commenced after the appearance of [2], in which it had been proved, although not explicitly stated, that there exist torsion-free abelian groups of arbitrary rank r with $r \leq \aleph$ of which the automorphism group has order 2. In some cases more general or detailed results are derived than those stated in the scheme. E.g. it is proved in theorem 4 that the cyclic groups C_{8n} ($n = 1, 2, \ldots$) cannot occur as automorphism group of torsion-free abelian groups (nor of mixed abelian groups, as can be argued by using lemma 1).

As to theorem 6, we may remark that also B. H. NEUMANN proved independently that the order of the automorphism group of a non-abelian group is at least 6. This follows from the results of SCHENKMAN [5] too. MILLER [4] proved already that the only *finite* non-abelian group with automorphism group isomorphic to $\mathfrak{S}_3$ is $\mathfrak{S}_3$ itself.

[1]) For indecomposable torsion-free abelian groups of rank $2^{\aleph}$ (which can be constructed such, that their automorphism groups are isomorphic to C_2) cf. ANDRZEJ HULANICKI: Note on a paper of DE GROOT, to be published in Indag. Math.

Table 1. *Scheme of the occurrence of groups G with prescribed automorphism groups $A(G)$*

$A(G)$ \ G	abelian				non-abelian	
	periodic	torsion-free		mixed	finite	infinite
		dec.	indec.			
C_2	C_1, C_2	–	–	–	–	–
C_2	C_3, C_4, C_6	–	$1 \leq r \leq \aleph$	–	–	–
C_3	–	–	–	–	–	–
$C_2 \times C_2$	C_8, C_{12}	$2 \leq r \leq \aleph$	$2 \leq r \leq \aleph$	+	–	–
C_4	C_5, C_{10}	–	$2n-1 \neq r \leq \aleph$	–	–	–
C_5	–	–	–	–	–	–
C_6	C_7, C_9, C_{14}, C_{18}	–	+	–	–	–
$\mathfrak{S}_3$	$C_2 + C_2$	–	–	–	$\mathfrak{S}_3$	–
C_7	–	–	–	–	–	–
$C_2 \times C_2 \times C_2$	C_{24}	$3 \leq r \leq \aleph$	$3 \leq r \leq \aleph$	+	–	+
$C_2 \times C_4$	$C_{15}, C_{16}, C_{20}, C_{30}$	$3 \leq r \leq \aleph$	$3 \leq r \leq \aleph$	–	–	–
C_8	–	–	–	–	–	–
D	$C_2 + C_4$	–	–	–	D	–
Q	–	–	+	–	–	–

Explication: The prescribed automorphism groups are listed in the first column. In the row of a prescribed automorphism group we find for each kind of group either all groups that occur, or, in the torsion-free case, all possible ranks $\leq \aleph$ of the occurring groups, or simply the occurrence or non occurrence, denoted by plus and minus signs. E.g. $C_2 \times C_2$ occurs as automorphism group of C_8, C_{12}, certain decomposable (dec.) and indecomposable (indec.) torsion-free abelian groups for all ranks r with $2 \leq r \leq \aleph$, and of certain mixed abelian groups; Q occurs only as automorphism group of certain indecomposable torsion-free abelian groups.

In a letter known to us B. H. NEUMANN mentioned to have constructed, as we have done too, an (infinite) non-abelian group with an automorphism group isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$. He also foresaw the validity of theorem 7.

The work related with this article was done under the direction of Prof. J. DE GROOT.

§ 2. Torsion-free abelian groups

If G is a torsion-free abelian group of rank 1, then $|A(G)|$ is infinite or $A(G) \cong C_2$ according to whether or not there occur infinities in a characteristic of the type of G, since, if in the n-th place of this characteristic there occurs ∞, then $g \to p_n^k g$ $(g \in G)$ is an automorphism of G for all integers k, and if no infinities occur in the characteristics of the elements of G, then the characteristics of any two distinct elements $g_1, g_2 \in G$ with $g_1 \neq -g_2$ are different, and since the characteristics are invariant under isomorphisms, the automorphism μ: $g \to -g$ $(g \in G)$ is the only automorphism of G different from the identical automorphism ε: $g \to g$ $(g \in G)$. In searching for groups with automorphism groups of finite order > 2 we, therefore, need not consider groups of rank 1. As mentioned before, there exist groups G of arbitrary rank $\leq \aleph$ such that $A(G) \cong C_2$. Such groups G are necessarily indecomposable, since the automorphism group of a decomposable group contains isomorphically the direct product of the automorphism groups of the direct summands of a direct decomposition of G.

If G is a torsion-free abelian group and $\{a_\alpha\}_\alpha$ is a maximal system of linearly independent elements of G, then G can be regarded as a subgroup of a minimal complete group with the same maximal system of linearly independent elements. If the potency of $\{a_\alpha\}_\alpha$ is at most $\aleph$, then $\{a_\alpha\}_\alpha$ can be assumed to be a set of (linearly independent) real numbers, and the complete group containing G can be assumed to be a complete additive group of real numbers. Any automorphism of G can be extended to an automorphism of the containing complete group. Such an extended automorphism can in an obvious way be represented by a matrix from which we read the images of the a_α as rational linear combinations of the a_α.

Now we shall prove

Theorem 1. *There exist decomposable and indecomposable torsion-free abelian groups of all ranks r with $2 \leq r \leq \aleph$, of which the automorphism group is isomorphic to $C_2 \times C_2$.*

Proof. If we want a decomposable group $G = G_1 + G_2$ of rank r with $2 \leq r \leq \aleph$, we take G_1 and G_2 with the following properties: (i) the sum of the ranks of G_1 and G_2 is r, (ii) $A(G_1) \cong A(G_2) \cong C_2$, (iii) if $g_1 \in G_1$ and $g_2 \in G_2$, then the product of the types of g_1 and g_2 is the null-type, (iv) both G_1 and G_2 possess a maximal linearly independent system of which all elements have not the null-type. This can be done as trivially follows from the methods of construction used in [2]. Now by an automorphism of G the groups G_1 and G_2 are mapped into themselves since e.g. an element of the particular maximal linearly independent system of G_1 can, by (iii) and (iv), only be mapped on an element of G_1. From this we deduce

$$A(G) \cong A(G_1) \times A(G_2) \cong C_2 \times C_2.$$

We get an indecomposable group with the same rank and the same automorphism group if we choose G_1 and G_2 as subgroups of the additive group of real numbers with only the null-element in common, and adjoin $\frac{g_1 + g_2}{2}$ as generating element if g_1 and g_2 are particular elements not divisible by 2 of G_1 and G_2 respectively.

This trick of constructing indecomposable groups was first applied by BOGNÁR [1]. That in our case the trick works can be shown, e.g. by considering the automorphism group. The indecomposability of the constructed group H can also be proved as follows: Let $H = H_1 + H_2$ be a decomposition. By (iii) and (iv) the components of any element of the chosen maximal linearly independent system of G_1 in this decomposition are contained in G_1. From this we get that G_1 is the direct sum of its projections into H_1 and H_2; but by (ii) we derive $G_1 < H_1$ (or $G_1 < H_2$). The same applies to G_2. Then, necessarily $G_1 = H_1$ and $G_2 = H_2$ (or $G_1 = H_2$ and $G_2 = H_1$). But G_1 and G_2 do not generate H, since $\frac{g_1 + g_2}{2}$ is not contained in $G_1 + G_2$. So we have a contradiction.

Theorem 2. *If G is a torsion-free abelian group, and $A(G) \cong C_4$, then G is indecomposable and the rank of G is non-odd, and all non-odd ranks $\leq \aleph$ occur.*

Proof. Assume $A(G) \cong C_4$. Then G is indecomposable, since the automorphism group of a decomposable torsion-free abelian group contains at least three elements of order 2, and $A(G)$ does not. Let μ be the automorphism of G, which maps each element of G on its inverse element. If φ is a generating element of $A(G)$, then $\varphi^2 = \mu$. From this we infer that φg is linearly independent from g for all $g \in G$, $g \neq 0$. If $\varphi a_1 = a_2$, and $a_3 \in G$, a_3 being linearly independent from a_1, a_2, then φa_3 is linearly independent from a_1, a_2, a_3: suppose the contrary: $\varphi a_3 = r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3$ (r_i being rational), then $\varphi^2 a_3 = r_1 a_2 - r_2 a_1 + r_3 r_1 a_1 + r_3 r_2 a_2 + r_3^2 a_3$, but $\varphi^2 a_3 = -a_3$, so we would have $r_3^2 = -1$. Using and extending this argument it is easily seen that the rank of G is even if it is finite, by constructing a maximal linearly independent system of non-odd potency.

Now we construct a group G, such that $A(G) \cong C_4$, and the rank of G is 2.

Let a_1, a_2 be linearly independent real numbers, and p_{i_k} ($k = 1, 2, \ldots$) an infinite sequence of different prime numbers, $p_{i_k} \neq 2$, such that $p_{i_k} = s_k^2 + t_k^2$, s_k and t_k being positive integers. Then we define G by

$$G = \left\{a_1, a_2, \frac{s_k a_1 + t_k a_2}{p_{i_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

In order to prove that $A(G) \cong C_4$ we need the following easily verifiable properties of G: If x and y are integers such that $x a_1 + y a_2$ is divisible by p_{i_k} for some definite k, then $x a_1 + y a_2$ is a linear combination with integers as coefficients of $p_{i_k} a_1$, $p_{i_k} a_2$ and $s_k a_1 + t_k a_2$, and:

1°. $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}$,

2°. $-y a_1 + x a_2$ is divisible by p_{i_k},

3°. $x t_k \equiv y s_k \pmod{p_{i_k}}$,

4°. in the generating system of G we may replace

$$\frac{s_k a_1 + t_k a_2}{p_{i_k}} \quad \text{by} \quad \frac{-t_k a_1 + s_k a_2}{p_{i_k}}.$$

From these properties it follows that the mapping φ induced by $a_1 \to a_2$, $a_2 \to -a_1$ is an automorphism of order 4 of G. Let ψ, represented by

$$\psi a_1 = m_1 a_1 + m_2 a_2$$
$$\psi a_2 = n_1 a_1 + n_2 a_2,$$

be an arbitrary automorphism of G. Regarding the nature of G, we may write

$$m_1 = \frac{m_1'}{N}, \qquad m_2 = \frac{m_2'}{N},$$
$$n_1 = \frac{n_1'}{N}, \qquad n_2 = \frac{n_2'}{N},$$

m_i', n_i' and N being integers, N square-free, positive and minimal. Since the same can be said of any power of ψ, we easily deduce that the determinant of the transformation matrix equals 1 or -1. For any k, we have that

$$N\psi(s_k a_1 + t_k a_2) = (s_k m_1' + t_k n_1')\, a_1 + (s_k m_2' + t_k n_2')\, a_2$$

is divisible by p_{i_k}, thus, using property 1°:

$$(s_k m_1' + t_k n_1')^2 + (s_k m_2' + t_k n_2')^2 \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

Using $s_k^2 + t_k^2 = p_{i_k}$, we infer:

$$s_k(m_1'^2 + m_2'^2 - n_1'^2 - n_2'^2) + 2t_k(m_1' n_1' + m_2' n_2') \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}$$
$$-t_k(m_1'^2 + m_2'^2 - n_1'^2 - n_2'^2) + 2s_k(m_1' n_1' + m_2' n_2') \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

If p_{i_k} is sufficiently large, then the congruence symbols may be replaced by equality symbols, and we infer:

$$m_1'^2 + m_2'^2 = n_1'^2 + n_2'^2, \qquad m_1' n_1' + m_2' n_2' = 0;$$

and consequently we can define:

$$\text{(i)} \quad m' = m_1' = n_2', \qquad n' = m_2' = -n_1',$$

or

$$\text{(ii)} \quad m' = m_1' = -n_2', \qquad n' = m_2' = n_1'.$$

The second possibility cannot occur: then, using property 3°, we would have, since $(s_k m_1' + t_k n_1')\, a_1 + (s_k m_2' + t_k n_2')\, a_2$ is divisible by p_{i_k}:

$$(s_k m' + t_k n')\, t_k \equiv (s_k n' - t_k m')\, s_k \pmod{p_{i_k}},$$

from which we deduce:

$$-s_k n' \equiv t_k n' \pmod{p_{i_k}}$$
$$t_k m' \equiv s_k n' \pmod{p_{i_k}},$$

this would give, for sufficiently large p_{i_k}: $m' = n' = 0$.

In case (i) we get the following: if p_{i_k} is a divisor of N, then

$$N\psi(s_k a_1 + t_k a_2) = (s_k m' - t_k n')\, a_1 + (s_k n' + t_k m')\, a_2$$

is twice divisible by p_{i_k}. But then we have e.g.:

$$s_k m' - t_k n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

Since $-n' a_1 + m' a_2$ is divisible by p_{i_k} too, we have also:

$$s_k m' + t_k n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}},$$

and thus

$$m' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}, \qquad n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}};$$

this contradicts the construction of N. So we may conclude that no p_{i_k} divides N, and $N = 1$. But then the fact that the determinant of the trans-

formation matrix equals 1 or -1 is expressed by the equation $m'^2+n'^2=1$, which admits only four solutions, each of them representing a power of φ; this implies $A(G)\cong C_4$.

A group G of arbitrary non-odd rank $r\leq\aleph$, such that $A(G)\cong C_4$, can be obtained by the following rather complicated construction. Take r linearly independent real numbers and divide them into pairs (a_α, b_α). To each pair (a_α, b_α) we construct a group as above, replacing a_1 by a_α, a_2 by b_α. Now we adjoin generating elements as far as necessary so as to obtain the following: (i) for any fixed α, a_α and b_α will have the same characteristic with zeros in the 2nd and the i_k-th places; (ii) for any pair (α, β) with $\alpha\neq\beta$ a_α and a_β will have incomparable types and characteristics which have only 0 and 1 as values; (iii) for one fixed index ν $a_\alpha+a_\nu$ and $b_\alpha+b_\nu$ are divisible by 3 for all indices $\alpha\neq\nu$.

Theorem 3. *There exist decomposable and indecomposable torsion-free abelian groups of all ranks r with $3\leq r\leq\aleph$ of which the automorphism group is isomorphic to $C_2\times C_2\times C_2$ or to $C_2\times C_4$. The rank of a group with such an automorphism group cannot be* 2.

Proof. For the proof of the first part the same procedure can be followed as in the proof of theorem 1. For a decomposable group $G=G_1+G_2$ with $A(G)\cong C_2\times C_4$, we need only take G_1 and G_2 such that $A(G_1)\cong C_2$ and $A(G_2)\cong C_4$, and the conditions (i), (iii) and (iv) of the proof of theorem 1 are satisfied. To make G indecomposable with the same automorphism group we adjoin $\frac{g_1+g_2+g_2'}{2}$, where $g_1\in G_1$, $g_2, g_2'\in G_2$ are chosen in such a way that g_2 is mapped on g_2' by a generating element of $A(G_2)$ and both g_1 and g_2+g_2' are not divisible by 2 (the last condition means another restriction for the choice of G_2). For $A(G)$ to be isomorphic to $C_2\times C_2\times C_2$, the condition "$A(G_2)\cong C_4$" has to be replaced by "$A(G_2)\cong C_2\times C_2$ and G_2 indecomposable", and g_2 has to be chosen such that by any automorphism of G_2 g_2 is mapped on g_2 or $-g_2$, and g_2' must be omitted.

For the remaining part of our theorem we proceed as follows. Suppose G of rank 2, $A(G)\cong C_2\times C_2\times C_2$. We choose a maximal linearly independent system $\{a_1, a_2\}$, such that a_1 and a_2 are interchanged by some automorphism of G. The possibility of this follows by some simple arguments. The matrix associated with this automorphism is $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. If $\begin{pmatrix}m_1&m_2\\n_1&n_2\end{pmatrix}$ is the matrix of any other automorphism, then the conditions that $A(G)$ is commutative and the latter automorphism is of order 2 lead to $m_1=n_2$, $m_2=n_1$ and $m_1^2+m_2^2=1$, $2m_1m_2=0$. These equations admit only four solutions, but $A(G)$ would be of order 8; so we have a contradiction. If $A(G)$ is supposed to be isomorphic to $C_2\times C_4$, then the a_i can be chosen such that the matrix of a certain automorphism of order 4 is $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. If $\begin{pmatrix}m_1&m_2\\n_1&n_2\end{pmatrix}$ is the matrix of any automorphism of order 2, we are lead as above to the equations $m_1=n_2$, $m_2=-n_1$, and $m_1^2-m_2^2=1$, $2m_1m_2=0$ which admit only two solutions, whereas $C_2\times C_4$ contains three automorphisms of order 2.

Now we give an example of a *torsion-free abelian group G (of rank 4) with $A(G) \cong C_2 \times C_3$; this group is necessarily indecomposable.*

Example. Let a_i, b_i $(i=1, 2)$ be linearly independent real numbers. Then

$$G = \left\{ \frac{a_1}{2^n}, \frac{a_2}{2^n}, \frac{b_1}{3^n}, \frac{b_2}{3^n}, \frac{a_1+b_1}{5^n}, \frac{a_2+b_2}{5^n}, \frac{a_1+b_2}{7^n}, \frac{a_2-b_1+b_2}{7^n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

If φ is an automorphism of G, then

$$\varphi a_1 = m_1 a_1 + m_2 a_2 \quad \varphi b_1 = n_1 b_1 + n_2 b_2$$
$$\varphi a_2 = m_1' a_1 + m_2' a_2 \quad \varphi b_2 = n_1' b_1 + n_2' b_2.$$

From the fact that $\varphi(a_1+b_1)$, $\varphi(a_2+b_2)$, and $\varphi(a_1+b_2)$, $\varphi(a_2-b_1+b_2)$, are linear combinations (with rational coefficients) of a_1+b_1, a_2+b_2, and a_1+b_2, $a_2-b_1+b_2$, respectively, it can be found that the matrix transforming the vector (a_1, a_2, b_1, b_2) is of the form

$$\begin{pmatrix} k & l & 0 & 0 \\ -l & k+l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & -l & k+l \end{pmatrix}.$$

It is easily seen that k and l are necessarily integers, and consequently

$$\begin{vmatrix} k & l \\ -l & k+l \end{vmatrix} = \pm 1.$$

This equation has 6 solutions of which $k=0$, $l=1$ entails a generating automorphism of order 6 of G.

The following example will provide for a *torsion-free abelian group G (of rank 8) with $A(G) \cong Q$.*

Example. Let a_i, b_i $(i=1, 2, 3, 4)$ be linearly independent real numbers. The generating elements of G are:

$$\frac{a_i}{2^n}, \frac{b_i}{3^n}, \frac{a_i+b_i}{5^n}, \frac{a_1+b_2}{7^n}, \frac{a_2-b_1}{7^n}, \frac{a_3-b_4}{7^n}, \frac{a_4+b_3}{7^n}, \frac{a_1+b_3}{11^n},$$
$$\frac{a_2+b_4}{11^n}, \frac{a_3-b_1}{11^n}, \frac{a_4-b_2}{11^n}, \frac{a_1+b_4}{13^n}, \frac{a_2-b_3}{13^n}, \frac{a_3+b_2}{13^n}, \frac{a_4-b_1}{13^n},$$

for all integers n.

Then, by some computing, it may be found that by any automorphism of G the vectors (a_1, a_2, a_3, a_4) and (b_1, b_2, b_3, b_4) are transformed into linear combinations of their elements by the same matrix of the form:

$$\begin{pmatrix} m & -s & -n & -t \\ s & m & -t & n \\ n & t & m & -s \\ t & -n & s & m \end{pmatrix},$$

m, n, t, s being integers, and the matrix being unimodular. So we get: $m^2+n^2+s^2+t^2=1$. Each of the 8 solutions of this equation does give rise to an automorphism of G. Of these automorphisms 6 have order 4, which implies $A(G)\cong Q$.

We shall now prove:

Theorem 4. *The automorphism group of a torsion-free abelian group cannot be isomorphic to $\mathfrak{S}_3$, D or C_{8n}, n being an arbitrary positive integer.*

Proof. Let G be a torsion-free abelian group. Then the centre of $A(G)$ contains the automorphism μ: $\mu g=-g$ (all $g\in G$). The centre of $\mathfrak{S}_3$, however, is trivial, so $A(G)$ cannot be isomorphic to $\mathfrak{S}_3$.

Now suppose $A(G)\cong D$. Then $A(G)$ is generated by an automorphism φ of order 4 and an automorphism δ of order 2 with the relation $\varphi^3\delta=\delta\varphi$. Since φ^2 is the only non-trivial element of the centre of D, we have $\varphi^2=\mu$. If $\delta g=g'$, then $\delta(g+g')=g+g'$ and $\delta(g-g')=-(g-g')$. Using this we can find a maximal system of linearly independent elements which is the union of disjoint non-empty sets $A=\{a_\alpha\}$, $B=\{b_\beta\}$, such that $\delta a_\alpha=a_\alpha$, $\delta b_\beta=-b_\beta$. (Observe that if g is linearly independent from some linearly independent system, then either $g+g'$ or $g-g'$ is linearly independent from it too.) Let P and R be the minimal serving subgroups containing A respectively B. If $p\in P$, $q\in R$, then $\delta(p+q)=p-q$, from which we deduce that the divisors of $p+q$ (in G) divide also p and q, 2 perhaps excepted. P and R cannot be mapped by φ into themselves, since in this case $\varphi\delta=\delta\varphi$. If $\varphi P\neq R$, then the mapping δ^* defined by $\delta^*g=-g$ if $g\in\varphi P$, $\delta^*g=g$ if $g\in\varphi R$, can be linearly extended to an automorphism different from the elements of the supposed $A(G)$. Equally, $\varphi R\neq P$ is not possible. So we have necessarily $\varphi P=R$, $\varphi R=P$. Then we choose the b_β such that $\varphi a_\alpha=b_\alpha$. Then, however, the mapping ψ: $\psi a_\alpha=b_\alpha$, $\psi b_\alpha=a_\alpha$ induces a new automorphism different from all other ones. And we have proved the required contradiction.

At last we shall prove that $A(G)$ cannot be isomorphic to a cyclic group of the form C_{8n}.

Assume $A(G)$ contains an element φ of order $8n$ such that $\varphi^{4n}=\mu$ [if $A(G)\cong C_{8n}$, this is evidently the case]. We consider the mapping

$$\psi\colon \psi g=\sum_{i=1}^{4n-1}\varphi^i g.$$

ψ is clearly a homomorphic mapping of G into itself, and also an isomorphism, since $\psi g=0$ would imply

$$\sum_{i=2}^{4n}\varphi^i g=0, \quad \text{or} \quad \sum_{i=2}^{4n-1}\varphi^i g-g=0,$$

and $\varphi g+g=0$, but this cannot occur because of $\varphi^{4n}g=-g$. ψ is also an automorphism of G since each element g of G occurs as an image under ψ:

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{4n-1}(-1)^k\varphi^k g\right)=g.$$

Now it suffices to show that ψ is different from any power of φ. It can easily be shown that ψ cannot be φ^k for $k=0, 1, 4n-1, 4n, 4n+1, 8n-1$. For $k=4n+1$ (the most difficult case) this runs as follows: we would have

$$\sum_{i=1}^{4n-1} \varphi^i g = \varphi^{4n+1} g = -\varphi g, \quad \text{and} \quad \sum_{i=2}^{4n-1} \varphi^i g = -\varphi^2 g + g$$

(by applying φ).

Subtracting these equations we get: $\varphi^2 g = g + 2\varphi g$. If g is chosen such that g and φg are linearly independent, then the last equation leads to a contradiction, since by $4n-2$ times applying φ we get that $-g$ would be a proper linear combination of g and φg.

The remaining possibilities for $k \neq 0, 1, 4n-1, 4n, 4n+1, 8n-1$ are contained in:

$$\psi g = \pm \varphi^k g \qquad (1 < k < 4n-1).$$

Then we have

$$\sum_{i=1}^{4n-1} \varphi^i g = \pm \varphi^k g, \quad \sum_{i=2}^{4n-1} \varphi^i g = \pm \varphi^{k+1} g + g,$$

which implies

$$g + \varphi g \mp \varphi^k g \pm \varphi^{k+1} g = 0.$$

Applying φ^i $(i=0, 1, \ldots, 4n-1)$ we get a set of homogeneous equations with the following $4n \times 4n$ coefficient matrix: the elements of the first row are $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{1,k+1} = -a_{1,k+2} = \mp 1$, $a_{1l} = 0$ $(l \neq 1, 2, k+1, k+2)$, the other elements are obtained by the rules $a_{i+1,j+1} = a_{ij}$ $(i \leq 4n-1,\ j \leq 4n-1)$, $a_{i+1,1} = -a_{i,4n}$.

Now we shall prove that the determinant of this matrix is always unequal to zero (this implies that the above mentioned set of equations can only be satisfied for $g=0$, which gives the required contradiction).

We apply a trick indicated to us by Prof. N. G. DE BRUIJN. Choose a complex number ξ with $\xi^{4n} = -1$. After multiplying the elements of the i-th column by ξ^{4n-i} and the elements of the j-th row by ξ^j, we get a circulant matrix. The determinant of this matrix is the product of the factors

$$-1 - \vartheta\xi \pm \vartheta^k \xi^k \mp \vartheta^{k+1} \xi^{k+1}$$

where ϑ runs through the set of $4n$-th unit roots. These factors are unequal to zero, and thus the determinant of our coefficient matrix is unequal to zero.

§ 3. Mixed abelian groups

For our purpose it is necessary to examine the automorphism group of $C_{p^n} + H$, p being a prime number, n a positive integer, and H any (infinite) torsion-free abelian group.

Any automorphism of $C_{p^n} + H$ leaves C_{p^n} invariant and consequently induces an automorphism of $(C_{p^n} + H)/C_{p^n}$, and, by the natural isomorphism

between $(C_{p^n}+H)/C_{p^n}$ and H, an automorphism of H. This mapping of $A(C_{p^n}+H)$ onto $A(H)$ is a homomorphic mapping. Let Σ be the kernel of this homomorphism. A homomorphic mapping of Σ onto $A(C_{p^n})$, with kernel Σ', is defined by mapping any element of Σ onto its restriction to the periodic part of $C_{p^n}+H$, this restriction being transformed into an automorphism of C_{p^n} under some fixed isomorphism between the periodic part of $C_{p^n}+H$ and C_{p^n}. Then we have:

$$A(C_{p^n}+H)/\Sigma \cong A(H), \quad \Sigma/\Sigma' \cong A(C_{p^n}).$$

Further, regarding C_{p^n} and H as subgroups of $C_{p^n}+H$, the elements of Σ' are those automorphisms of $C_{p^n}+H$, under which the elements of C_{p^n} are invariant and an element $h \in H$ is mapped on an element $h+c$, $c \in C_{p^n}$.

If we denote by P the subgroup of H consisting of all elements divisible by p, then all elements of H/P are of order p, and we state the following

Lemma 1. *If $|H/P|$ is infinite, then $|\Sigma'|$ is infinite; if H/P is of order p^r $(r \geq 0)$, then Σ' is of order p^{nr} and Σ' is the direct product of r cyclic groups of order p^n.*

Proof. We remark that Σ' is abelian. Each automorphism of Σ' has an order which is a power of p not greater than the n-th: if $\sigma \in \Sigma'$, and $h \in H$, then $\sigma h = h+c$, $c \in C_{p^n}$, and $\sigma^{p^n} h = h + p^n c = h$.

Now we shall first prove that there are infinitely many elements of Σ' of order p if $|H/P|$ is infinite, and p^r-1 ones if $|H/P| = p^r$.

Let c be a generating element of C_{p^n}, and $d = p^{n-1} c$. Let σ be an element of Σ' of order p. σ is completely determined by its action on the elements of H. If $h \in H$, then $\sigma h = h + nd$ $(0 \leq n < p)$. If $h \in P$, then $h = pg$ for some $g \in H$, and $\sigma h = \sigma p g = p \sigma g = p(g+nd) = pg = h$ for some n. So all elements of P are invariant under σ. Consequently, if $H = P$, then $\Sigma' = \{\varepsilon\}$, and the lemma is proved. We assume further $H \neq P$ (and $\sigma \neq \varepsilon$). Let H be divided into the cosets to P (the coset to which a belongs, will be denoted by $\bar{a}$). If $a, a' \in \bar{a}$, and $\sigma a = a + nd$, $\sigma a' = a' + md$ $(0 \leq n < p, 0 \leq m < p)$, then $\sigma(a-a') = a - a' + (n-m)d$. But $a - a' \in P$, so $n = m$. Further, if $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are two cosets to P, and $\sigma a = a + nd$, $\sigma b = b + nd$, then the elements of the coset $\overline{a-b}$ are invariant under σ. From this we derive that the cosets of which the elements are invariant under σ form a subgroup C of index p of H/P. Conversely, if we have any such subgroup C, and $A = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ is a generating element of $(H/P)/C$, then we get an automorphism σ as considered by putting $\sigma a = a + kd$ $(k = 1, 2, \ldots \text{ or } p-1)$ for all a which are elements of cosets of A, and extending σ over H in the natural way; and in this way we get all of them once. So the number of elements of Σ' of order p amounts to the number of subgroups of index p of H/P, multiplied by $p-1$. This amounts to p^r-1 if $|H/P| = p^r$, and infinity if $|H/P|$ is infinite; this was to be proved.

Now we proceed with the case $|H/P| = p^r$. For completing the proof it suffices to show that for any $\sigma \in \Sigma'$ of order p^l $(0 < l < n)$ there exists a $\tau \in \Sigma'$ such that $\tau^p = \sigma$.

Let $\sigma g = g + x_g c$, $g \in H$, x_g being an integer divisible by p. We get an automorphism τ of $C_{p^n} + P$ by putting $\tau(pg) = pg + x_g c$ (all elements of C_{p^n} remaining invariant). For extending τ to an automorphism of $C_{p^n} + H$, we write

$$H/P = \{\bar{a}_1\} + \{\bar{a}_2\} + \cdots + \{\bar{a}_r\}.$$

Then we put

$$\tau(k a_i') = k a_i' + \frac{1}{p} k x_{a_i'} c,$$

whenever $a_i' \in \bar{a}_i$. Extending τ as far as necessary, we get an automorphism as required (observe that $k x_g \equiv x_{kg} \pmod{p^n}$ for $g \in H$). So our lemma is proved.

We now shall prove

Theorem 5. *If G is a mixed abelian group, and $|A(G)| \leq 8$, then either $A(G) \cong C_2 \times C_2$ or $A(G) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, and the periodic part of G is in both cases isomorphic to C_2.*

Proof. Using the remarks and notations mentioned above we have the relation

$$|A(C_{p^n} + H)| = |A(H)|\,|A(C_{p^n})|\,|\Sigma'|. \tag{1}$$

If $|\Sigma'| = 1$, then $|H/P| = 1$ by our lemma, and all elements of H are divisible by p. Then H has infinitely many automorphisms and so has $C_{p^n} + H$. Using of the lemma the statement about the order of Σ', and relation (1), it follows by simple reasoning that $G \cong C_{p^n} + H$, $p = 2$, $n = 1$. Thus we have:

$$\Sigma = \Sigma' \cong H/P, \quad A(C_2 + H)/\Sigma' \cong A(H).$$

Then either $|\Sigma'| = 2$, or $|\Sigma'| = 4$ and $|A(H)| = 2$. In either case the elements of the naturally in $A(C_2 + H)$ embedded $A(H)$ commute with the elements of Σ'. And we get

$$A(C_2 + H) \cong \Sigma' \times A(H).$$

Now we still have the following possibilities:

(i) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_2$,
(ii) $\Sigma' \cong C_2 \times C_2$, $A(H) \cong C_2$,
(iii) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_2 \times C_2$,
(iv) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_4$.

We shall prove that (iv) cannot occur (which proves the theorem), and give general examples of (i), (ii) and (iii).

Suppose $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_4$. Let φ be a generating element of $A(H)$. H is divided into the non-empty sets P and $H \setminus P$. Take $a_1 \in H \setminus P$. Then $\varphi a_1 = a_2 \in H \setminus P$. The sum of any two elements of $H \setminus P$ lies in P. So $a_1 + a_2 \in P$, or $\frac{a_1 + a_2}{2} \in H$. If $\frac{a_1 + a_2}{4} \in H$, then by φ $\frac{-a_1 + a_2}{4} \in H$, and thus $\frac{a_1 + a_2}{4} + \frac{-a_1 + a_2}{4} = \frac{a_2}{2} \in H$, in contradiction with $a_2 \in H \setminus P$. If $\frac{a_1 + a_2}{4} \notin H$, then

$\frac{a_1+a_2}{2} \in H \setminus P$, and we get $-a_1+\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{-a_1+a_2}{2} \in P$. So $\frac{-a_1+a_2}{4} \in H$. Applying φ we get, then, $\frac{-a_1-a_2}{4} \in H$, in contradiction with $\frac{a_1+a_2}{4} \notin H$. In either case we derive a contradiction, so $A(H) \neq C_4$.

For an example of (i) we take a group H with $A(H) \cong C_2$ and such, that there exists a maximal linearly independent system of H with the property that all elements but one are infinitely often divisible by 2. This can be done for all ranks r with $1 \leq r \leq \aleph$ as follows from the construction method of [2]. Then $\Sigma' \cong H/P \cong C_2$.

For an example of (ii) we take the group H' to be the group H of the first example with the further restriction that no element of H' is infinitely often divisible by 3, 5 or 7, and the elements of its maximal linearly independent system are divisible by infinitely many real numbers unequal to 2. Then we get H as follows:

$$H = \left\{H', \frac{a_1}{3^n}, \frac{a_2}{5^n}, \frac{a_1+a_2}{7^n}, \frac{a_1+a}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

in which a is an element of the maximal linearly independent system of H' not divisible by 2 and a_1, a_2 are two more linearly independent real numbers (H' is to be thought of as a group of real numbers). It remains to be shown that $H/P \cong C_2 + C_2$ and $A(H) \cong C_2$. This is left to the reader. This example provides for groups H with rank r, $3 \leq r \leq \aleph$.

For an example such that the rank of H equals 2 we need only take

$$H = \left\{\frac{a_1}{3^n}, \frac{a_2}{5^n}, \frac{a_1+a_2}{7^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

For an example of (iii) we proceed as follows. Take a system $\{a, b, c_\mu, d_\mu\}_\mu$ of linearly independent real numbers, μ running through a non-empty index set. Let $\{\varrho_\mu, \sigma_\mu, \tau_\mu\}_\mu$ be a system of characteristics such that they have only infinity and zero as values, the types of any two of them are incomparable, all σ_μ and τ_μ have zeros in the first three places, and ϱ_μ has infinity in the first place and zero in the second and third place. Moreover, for any μ, the products $\sigma_\mu\tau_\mu$, $\tau_\mu\varrho_\mu$, $\varrho_\mu\sigma_\mu$, the characteristics being considered as types, will be the null-type. Now we adjoin to $\{a, b, c_\mu, d_\mu\}_\mu$ real numbers as generating elements, as many as are necessary to make c_μ and d_μ of characteristic ϱ_μ, $a+c_\mu$ and $b+d_\mu$ of characteristic σ_μ, $a+d_\mu$ and $b+c_\mu$ of characteristic τ_μ, a and b infinitely often divisible by 3, and $a+b$ also infinitely often divisible by 2. The obtained group suffices.

By adjoining as new generating elements $\frac{e}{2^n}$ and $\frac{e+a+b}{5^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, such, that $\{a, b, c_\mu, d_\mu, e\}_\mu$ is still a linearly independent system, we obtain a group which suffices too. It has to be shown that $H/P \cong C_2$ (which is almost trivial) and $A(H) \cong C_2 \times C_2$ [this is shown by proving that all automorphisms $\neq \varepsilon$ and $\neq \mu$ of H are induced by one of the following mappings:

$$a \leftrightarrow b,\ c_\mu \leftrightarrow d_\mu,\ (e \leftrightarrow e); \qquad a \leftrightarrow -b,\ c_\mu \leftrightarrow -d_\mu,\ (e \leftrightarrow -e)].$$

This method provides groups H as required of rank r with $4 \leq r \leq \aleph$. Whether or not the rank can be 2 or 3 we do not know.

§ 4. Non-abelian groups

Throughout this section we shall denote by G a non-abelian group, while Z will stand for the centre of G.

If G is any non-abelian group, then neither $A(G)$ not G/Z, which is isomorphic to the group of inner automorphisms of G, can be cyclic. So the smallest groups coming into account for G/Z to be isomorphic to are $C_2 \times C_2$ and $\mathfrak{S}_3$.

If $G/Z \cong \mathfrak{S}_3$, we have the well-known example:

$$G \cong \mathfrak{S}_3, \quad \text{then} \quad A(G) \cong G/Z \cong \mathfrak{S}_3.$$

Lemma 2. *If G is not isomorphic to $\mathfrak{S}_3$, and $G/Z \cong \mathfrak{S}_3$, then G always has outer automorphisms* (*so* $|A(G)| \geq 12$).

Proof. Since $\mathfrak{S}_3$ can be regarded as the group generated by $\{a, b\}$ with the relations $a^3 = e$, $b^2 = e$, $ab = ba^2$, we can write G as follows as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, a^2Z, bZ, abZ, a^2bZ\}, \quad |Z| \geq 2.$$

One easily confirms that the mapping φ induced by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$, is an outer automorphism of G, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and $b^2 = e$.

In this case the mapping defined by $\varphi a = a$, $\varphi b = bz_1$, $\varphi z = z$ for all $z \in Z$, while z_1 is any fixed element of Z $(z_1 \neq e)$, induces an outer automorphism of G.

In the case that $G/Z \cong C_2 \times C_2$, we have the following lemma:

Lemma 3. *If $G/Z \cong C_2 \times C_2$, then G has outer automorphisms, so* $|A(G)| \geq 8$.

Proof. We write G as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, bZ, abZ\}.$$

The derived group G' of G has order 2 and $G' < Z$. The mapping defined by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ (all $z \in Z$) is an automorphism of G. This automorphism φ has order 2 and commutes with all inner automorphisms. φ is an outer automorphism, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and $a^2, b^2 \in G'$ (using the general fact that the inner automorphism ψ of a non-abelian group induced by the element y can be represented by $\psi x = x[x, y]$, $[x, y]$ being the commutator of x and y).

If this is the case then we distinguish between the following two cases: (i) $a^2 = b^2$, (ii) $a^2 \neq b^2$ (e.g. $b^2 \neq e$). In case (i) the mapping φ induced by $\varphi a = b$, $\varphi b = a$, $\varphi z = z$ $(z \in Z)$, in case (ii) the mapping φ induced by $\varphi a = ab$, $\varphi b = b$, $\varphi z = z$ $(z \in Z)$ turns out to be an outer automorphism.

From these two lemmas we immediately get:

Theorem 6. *Every non-abelian group, $\mathfrak{S}_3$ excepted, has an automorphism group with order* ≥ 8.

The next groups coming into account for G/Z to be isomorphic to are the groups of order 8.

Lemma 4. *If* $|G/Z|=8$, *then* G *always has outer automorphisms.*

Proof. There are 4 non-cyclic groups of order 8. The quaternion group Q cannot be isomorphic to G/Z, since otherwise G can be regarded as the group generated by Z and $\{a, b\}$ with the relations $a^4 \in Z$, $b^4 \in Z$, $a^2 = b^2 c$, $c \in Z$; then the element $a^2 = b^2 c$ commutes with all elements of G, so it does not induce an inner automorphism different from the identity, as it is supposed to do.

Suppose now $G/Z = C_2 \times C_4$. Then G can be regarded as the group generated by Z and $\{a, b\}$ with the relations $a^2 \in Z$, $b^4 \in Z$, while the derived group G' of G has order 2. Then $[a, b^2] = [a, b]^2 = e$, so b^2 commutes with all elements of G, and the inner automorphism it induces, is equal to the identity.

So neither Q, nor $C_2 \times C_4$ can be isomorphic to G/Z. The only two groups of order 8 which as yet can be isomorphic to G/Z are therefore D and $C_2 \times C_2 \times C_2$

We now assume $G/Z \cong D$. G can be written as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, a^2Z, a^3Z, bZ, abZ, a^2bZ, a^3bZ\},$$

with the relations $a^4 \in Z$, $b^2 \in Z$ and $a^3ba^{-1}b^{-1} \in Z$. The derived group G' of G has order 4 and is cyclic, and $|Z| \geq 2$.

It is easy to verify that the mapping φ defined by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ (for all $z \in Z$), is an outer automorphism of G, unless Z is the direct product of cycles of order 2 and $a^2 \in G'$, $b^2 \in G'$. In this case, however, the mapping φ defined by $\varphi a = az_1$, $\varphi b = b$, $\varphi z = z$ (for all $z \in Z$), for any fixed element $z_1 \in Z$ $(z_1 \neq e)$, is an outer automorphism of G.

In the case where $G/Z \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, the derived group G' of G has at most 8 elements, all of order 2, and contains a subgroup of order 4, which is isomorphic to $C_2 \times C_2$. G can be regarded as the group generated by Z and $\{a_1, a_2, a_3\}$, while $a_1^2 \in Z$, $a_2^2 \in Z$, $a_3^2 \in Z$ and G' is contained in Z.

Consider the automorphism φ induced by $\varphi a_1 = a_1^{-1}$, $\varphi a_2 = a_2^{-1}$, $\varphi a_3 = a_3^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$. If φ is accidently an inner automorphism, then all elements of Z have order 2, and $a_i^2 \in G'$ $(i = 1, 2, 3)$. Then if either exactly one of the a_i^2 is equal to e, say $a_1^2 = e$, or exactly one of the a_i^2 is unequal to e, say $a_1^2 \neq e$, then the mapping ψ induced by $\psi a_1 = a_1$, $\psi a_2 = a_3$, $\psi a_3 = a_2$ can, in an obvious way, be extended to an outer automorphism of G. If all of the a_i^2 are equal or all of the a_i^2 are unequal to e, then ψ gives an outer automorphism too, after suitable renumeration of the a_i. So in any case G has outer automorphisms.

Theorem 7. *If the automorphism group $A(G)$ of a non-abelian group G has order 8, then either $G \cong D$, or $|G|$ is infinite and $A(G) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$.*

Proof. It follows from lemma 4 that G/Z is isomorphic to $C_2 \times C_2$. We then always get an outer automorphism of order 2, which commutes with the inner automorphisms, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and all squares of elements of G are contained in the derived group G', as follows from the proof of lemma 3.

First we consider the last case. If $|Z| = 2$, then G is either isomorphic to D, or to Q. If $G \cong D$, we have $A(G) \cong D$. If $G \cong Q$, then $|A(G)| = 12$. If $|Z| > 2$, we get more than 8 automorphisms, for every automorphism of Z, which leaves G' invariant, induces an outer automorphism of G.

Now we assume that Z is not the direct product of cycles of order 2. Then $A(G)$ should be isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$, and $|G| > 8$. E. SCHENKMAN [5] proved that if any group H is a finite nilpotent group of class 2, then the order of H divides the order of $A(H)$. G is a nilpotent group of class 2. In our case, however, we have $|A(G)| = 8$, while $|G| > 8$, so $|G|$ must be infinite. Q. e. d.

Now we give an example of a group G as last mentioned. Z will be (for the moment additively written) $C_2 + H$,

$$H = \left\{ \frac{s_1}{3^n}, \frac{s_2}{5^n}, \frac{s_1 + s_2}{7^n} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

s_1 and s_2 being two linearly independent real numbers. The additional generators of G will be a_1 and a_2 with, apart from the commutation relations of a_1 and a_2 with the elements of Z, the additional relations

$$a_1^2 = s_1, \quad a_2^2 = s_2, \quad a_1 a_2 = a_2 a_1 c$$

where c is the element of order 2 of Z.

It should be observed that (i) in this way no relations are added to Z, (ii) the automorphism group of H is isomorphic to C_2, (iii) any automorphism of G induces an automorphism of H. All outer automorphisms are obtained by multiplying the outer automorphism φ induced by $\varphi a_1 = a_1 s_1^{-1}$, $\varphi a_2 = a_2 s_2^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$, by the inner automorphisms.

References

[1] BOGNÁR, M.: Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen. Publ. Math. Debrecen **4**, 509–511 (1956). — [2] GROOT, J. DE: Indecomposable abelian groups. Indag. Math. **19**, 137–145 (1957). — [3] KUROSH, A. G.: The theory of groups, 2nd edit. (Translated from the Russian). New York 1956. — [4] MILLER, G. A.: On the groups which have the same group of isomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 395–401 (1900). — [5] SCHENKMAN, E.: The existence of outer automorphisms of some nilpotent groups of class 2. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 6–11 (1955).

Mathematical Institute, University of Amsterdam (Netherlands)

(Eingegangen am 14. August 1957)

BAUMSLAG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 465–478 (1958)

Finite Factors in Infinite Ascending Derived Series

By
GILBERT BAUMSLAG

§ 1. Introduction

A properly descending series of groups

$$G_0 > G_{-1} > G_{-2} > \cdots \tag{1.1}$$

is a *"descending derived series"* if the derived group of G_{-i} coincides with G_{-i-1} i.e. $G'_{-i} = G_{-i-1}$, for $i = 0, 1, \ldots$. The series (1.1) is of length n if it contains $n+1$ terms. If n is infinite then (1.1) is an *"infinite descending derived series"*.

The converse notion to that of a descending derived series has been defined by B. H. NEUMANN [1] as follows: A properly ascending series of groups

$$H_0 < H_1 < H_2 < \cdots \tag{1.2}$$

is termed an *"ascending derived series"* if $H'_{i+1} = H_i$ for $i = 0, 1, \ldots$. The series is of length n if it contains $n+1$ terms. If n is infinite then (1.2) is called an *"infinite ascending derived series"*, which for the sake of brevity we shall call an *"iads"*.

B. H. NEUMANN [1] has shown that if (1.2) is an iads then no metabelian factor group H_{i+2}/H_i can be finitely generated (we shall refer to this result as NEUMANN'S Theorem). However he constructs an iads in which there is just one abelian factor H_{j+1}/H_j of finite order. This raises the question whether an iads may have more than one finite abelian factor and if so, whether it may have infinitely many such finite factors. It is with the existence and multiplicity of finite factors in an iads that this paper is concerned.

We shall construct an iads (1.2) having H_{2k+1}/H_{2k} finite of order n_k; in the sequence $n_0, n_1, \ldots$ every two consecutive terms are coprime, and apart from this the terms are arbitrary positive odd integers. Hence we can construct continuously many different iads having infinitely many finite factors.

The results of P. HALL [2] concerning the orders of the abelian factors in the derived series of a finite p-group (a p-group is a group in which every element has order a power of the same prime p) might suggest that if an iads had infinitely many finite factors then the orders of these finite factors would be unbounded. However this is not always the case, for a suitable choice of the integers n_k (above) leads to an iads with infinitely many finite factors whose orders are bounded. Conversely the n_k may so be chosen as to lead to an iads having infinitely many finite factors whose orders are unbounded.

I express my thanks to Dr. B. H. NEUMANN for his generous help, guidance and encouragement, and my gratitude and appreciation to my Parents to whom this opportunity for further study is due.

§ 2. Preliminaries

The group generated by the set X with defining relations R will be denoted by $G=Gp(X;R)$; the centre of G will be denoted by $C(G)$. The cardinal of the set S will be written $|S|$; and the order of the group G will be written $|G|$. An isomorphic copy of G will be written as G_i and the element in G_i corresponding to $g\in G$ will be denoted by g_i. The restricted direct power of G indexed by the set I or equivalently, the restricted direct product of the copies G_i of G where $i\in I$, will be written $\prod_{i\in I} G_i$.

The notion of a restricted direct product of groups with amalgamated subgroups has been introduced by B. H. NEUMANN and H. NEUMANN [3]; we shall use a particular case in which the component groups are all the same. This may be defined as follows: Let $M=\prod_{i\in I} G_i$ and $N=Gp(c_i\cdot c_j^{-1};\ c\in C(G),$ all $i,j\in I)$. Since N is a normal subgroup of M we may form the factor group $W=M/N$. Then W is the "*restricted direct power of G, indexed by the set I, with amalgamated centres*"; we shall write

$$W=\prod_{i\in I} G_i/\text{a.c.}$$

It can easily be verified that $C(W)\cong C(G)$; we denote the element of $C(W)$ corresponding to $c\in C(G)$ again by c.

If f, g, h are elements of a group G, we denote the commutator of g and h by

$$g^{-1}h^{-1}gh=[g,h]$$

and the transform of g by h by

$$h^{-1}gh=g^h.$$

The following relations then hold:

$$[gf,h]=[g,h]^f\cdot[f,h] \quad \text{and} \quad [g,fh]=[g,h]\cdot[g,f]^h. \tag{2.1}$$

If $G'<C(G)$ then G is "*nilpotent of class two*" and for such groups equation (2.1) reduces to

$$[gf,h]=[g,h]\cdot[f,h] \quad \text{and} \quad [g,fh]=[g,h]\cdot[g,f]. \tag{2.2}$$

For nilpotent groups of class two, a repeated application of (2.2) leads to

$$[g^m,h^n]=[g,h]^{m\cdot n}, \tag{2.3}$$

m and n integers.

The r-th derived group of G will be written $G^{(r)}$; thus $G^{(r+1)}=(G^{(r)})'$.

The following lemma is stated for future reference. The proof is straightforward and is omitted.

LEMMA 2.4. *If θ is an homomorphism of the group G, then*

$$(G\theta)' = G'\theta.$$

Equivalently if N is a normal subgroup of the group G, then

$$(G/N)' = G'N/N.$$

§ 3. An auxiliary construction

We shall make use of a particular type of finite nilpotent groups of class two. They depend on two positive coprime integers m and n, and will be denoted by $B(m, n)$ or by B if m and n are understood. The derived group of $B(m, n)$ coincides with its centre and is cyclic of order m. The factor group with respect to this cyclic group is the direct product of $n-1$ cyclic groups of order m. Thus the order of $B(m, n)$ is

$$|B(m, n)| = m^n. \tag{3.1}$$

More precisely we put

$$B(m, n) = Gp(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c; (3.3)) \tag{3.2}$$

with the defining relations

$$\begin{cases} a_1^m = a_2^m = \cdots = a_{n-1}^m = 1 = [a_1, c] = [a_2, c] = \cdots = [a_{n-1}, c], \\ [a_i, a_j] = c^{u(i,j)} \quad \text{where} \quad 1 \leq i < j \leq n-1, \ u(i,j) = (-1)^{j-i}. \end{cases} \tag{3.3}$$

One easily verifies that $B(m, n)$ has the structure described above.

LEMMA 3.4. *If m and n are both greater than 1 and odd, then the mapping ψ defined by*

$$a_1\psi = a_2, \ a_2\psi = a_3, \ \ldots, \ a_{n-2}\psi = a_{n-1},$$
$$a_{n-1}\psi = a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1}, \quad c\psi = c$$

can be extended to an automorphism φ of $B(m, n)$ of order n.

Proof. To show that ψ can be extended to an endomorphism φ we first show that the set

$$a_1\psi, \ a_2\psi, \ \ldots, \ a_{n-1}\psi,$$

satisfy the same relations as the corresponding a_i.

It follows immediately from the defining relations (3.3) that if $i, j < n-1$, then

$$(a_j\psi)^m = 1 \quad \text{and} \quad [a_i, a_j] = [a_i\psi, a_j\psi]. \tag{3.41}$$

We show that the equations (3.41) hold for all possible values of i and j. When $i = j$ the result is immediate; suppose then that $i \neq j$ and one of i, j is equal to $n-1$, say $j = n-1$. We have

$$(a_{n-1}\psi)^2 = (a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1})^2 = c^r a_1^{-2}a_2^{-2}\ldots a_{n-1}^{-2}$$

where $r = \frac{n-1}{2}$. It follows by induction that

$$(a_{n-1}\psi)^m = c^s a_1^{-m} a_2^{-m} \dots a_{n-1}^{-m},$$

where

$$s = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(m-1)m}{2}.$$

Since m and n are both odd and greater than 1, s is divisible by m; therefore

$$(a_{n-1}\psi)^m = 1.$$

Further, we have

$$\begin{aligned}[a_i\psi, a_{n-1}\psi] &= [a_{i+1}, a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-1}] \\ &= [a_1, a_{i+1}][a_2, a_{i+1}]\dots[a_i, a_{i+1}][a_{i+2}, a_{i+1}]\dots[a_{n-1}, a_{i+1}].\end{aligned}$$

When i is even, then

$$[a_1, a_{i+1}][a_2, a_{i+1}]\dots[a_i, a_{i+1}] = 1 = [a_{i+2}, a_{i+1}][a_{i+3}, a_{i+1}]\dots[a_{n-2}, a_{i+1}]$$

since in each product there are an even number of terms with consecutive terms inverse to each other. It follows from $[a_{n-1}, a_{i+1}] = c$ that the expression obtained for $[a_i\psi, a_{n-1}\psi]$ reduces to c; consequently we have

$$[a_i, a_{n-1}] = c = [a_i\psi, a_{n-1}\psi].$$

When i is odd a similar procedure yields

$$[a_i, a_{n-1}] = c^{-1} = [a_i\psi, a_{n-1}\psi].$$

In the cases where $i = n-1$ and $j < n-1$ analogous arguments lead to the same results; thus the $a_i\psi$ satisfy the same relations as the a_i. We can therefore extend the mapping ψ to an endomorphism φ of B.

We show next that φ has order n. Suppose $1 \leq j \leq n-1$ and write $j = n-k$. Then

$$\begin{aligned}a_{n-k}\varphi^n &= \big(((a_{n-k}\varphi^{k-1})\varphi)\varphi\big)\varphi^{n-k-1} \\ &= \big((a_{n-1}\varphi)\varphi\big)\varphi^{n-k-1} \\ &= \big((a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-1})\varphi\big)\varphi^{n-k-1} \\ &= a_1\varphi^{n-k-1} \\ &= a_{n-k}.\end{aligned}$$

Therefore φ^n leaves every generator a_j fixed; hence φ^n leaves every element of B fixed, i.e. φ^n is the identity transformation and φ has order n. Thus, finally, φ has both a left and a right inverse, namely φ^{n-1}, and is therefore a $(1-1)$ endomorphism of B onto B, i.e. an automorphism of B. This completes the proof of the lemma.

LEMMA 3.5. *Under the conditions of Lemma 3.4 the automorphism φ has the property*

$$G\,p(b^{-1}b\varphi; b \in B) = B.$$

Proof. Let $A = Gp(b^{-1}b\varphi;\ b \in B)$. We prove $A = B$. First we show that $c \in A$. To do this we have to consider the following two possibilities:

i) $n = 3$:

We have $a_1^{-1}a_1\varphi = a_1^{-1}a_2 \in A$ and $a_2^{-1}a_2\varphi = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1} \in A$. Further $[a_1^{-1}a_2,\ a_2^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}] = c^{-3} \in A$. Now c is a power of c^{-3} since the order of c is prime to 3; hence $c \in A$.

ii) $n > 3$:

We have $a_1^{-1}a_1\varphi = a_1^{-1}a_2 \in A$ and $a_3^{-1}a_3\varphi = a_3^{-1}a_4 \in A$. It follows that $[a_1^{-1}a_2,\ a_3^{-1}a_4] = c^{-4} \in A$, and, since 4 is prime to m, we have $c \in A$.

The two cases above lead to $c \in A$. In computing A we shall now work modulo $Gp(c; c^m = 1)$. From

$$(b^{-1}b\varphi)\varphi = (b\varphi)^{-1}(b\varphi)\varphi$$

it follows that $A\varphi < A$ and since $|B| < \infty$, $A\varphi = A$. Therefore to prove $A = B$ it is sufficient to show that $a_1 \in A$. We have

$$a_{n-1}^{-1}a_{n-1}\varphi = a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-2} \in A\,.$$

Multiplying the right hand side of this equation successively by

$$a_{n-1}^{2}a_{n-2}^{-2},\quad a_{n-2}^{3}a_{n-3}^{-3},\ \dots,\ a_2^{n-1}a_1^{-(n-1)}$$

all of which belong to A, we arrive at

$$a_1^n \in A\,.$$

Since m and n are coprime, a_1 is a power of a_1^n and hence $a_1 \in A$. It follows that $A = B$, which concludes the proof of the lemma.

§ 4. The method of construction

We now introduce a constructional procedure which extends the notion of the "*Crown Product*" defined by B. H. NEUMANN in [*1*]. It will be referred to as the "§ 4 *construction*".

Let G be a group whose centre has a cyclic subgroup Z of order n, where n is an odd integer greater than 1; let m be another odd integer greater than 1 such that $(m, n) = 1$, and put $B(m, n) = B$. Let S be a transversal of G modulo Z (a transversal of G modulo Z is a complete set of coset representatives of G modulo Z) with the unit $e \in S$, and z a generator of Z; then every $g \in G$ has a unique representation in the form

$$g = z^i s,\quad 0 \leq i \leq n-1,\quad s \in S. \tag{4.1}$$

We now form the restricted direct power of B amalgamating the centres, the number of factors being taken equal to $|S|$, and we use the elements of S

to index the copies of B; thus we form the group

$$W = \prod_{s \in S} B_s/\text{a.c.} \tag{4.2}$$

Our next objective is to show that W possesses a group of automorphisms isomorphic to G, and finally the construction will be accomplished by forming the splitting extension of W by this automorphism group.

The automorphism φ defined in Lemma 3.4 can be applied to every isomorphic copy B_s of B in the product (4.2); whatever B_s it is applied to its effect on the amalgamated centre is the same, namely that of the identity. We can therefore define an automorphism ζ which induces φ simultaneously in each copy B_s. We make this automorphism ζ correspond to the element $z \in G$; notice that both z and ζ have the same order n. Next we define to each $g \in G$ a mapping $\sigma = \sigma(g)$ of W into itself; first if $b_t \in B_t$ we put

$$b_t \sigma = b_u \zeta^i, \tag{4.3}$$

where u and i are uniquely defined [cf. (4.1)] by

$$tg = z^i u \tag{4.4}$$

and where b_u corresponds to b_t under the isomorphism between B_u and B_t underlying the formation of the direct power (4.2). We can then extend the operation of σ to the whole of W in the obvious manner, that is by defining

$$\left(\prod_{t \in S} b_t\right)\sigma = \prod_{t \in S} (b_t \sigma), \tag{4.5}$$

where the symbol $\prod$ denotes a finite product. It is, at first sight, possible that this extension of σ to the whole of W is not properly defined; that is the effect of σ on two different representations of an element $w \in W$ may be different. Lemma 4.6 shows that this is not the case.

LEMMA 4.6. *The mapping σ is single-valued.*

Proof. We have to show that if

$$w' = \prod_{t \in S} b_t \tag{4.61}$$

is some representation for $w \in W$, then the effect of σ on w is independent of the representation w' of w. It is sufficient to show that any representation for the unit element $1 \in W$ is mapped into 1 by σ.

Let (4.61) be a representation for 1; then

$$b_t = z^{\beta_t} \quad \text{and} \quad \Sigma \beta_t \equiv 0 \bmod n.$$

It follows from the fact that ζ leaves z fixed that σ also leaves z fixed and hence σ leaves each factor in the representation (4.61) unchanged; i.e. $w'\sigma = w'$ and $1\sigma = 1$ independently of which representation w' is chosen for 1. It follows now that σ is a single-valued mapping of W into W.

We shall now show that $\sigma = \sigma(g)$ is an automorphism of W for every $g \in G$. The proof of this fact is simplified by introducing a further lemma which will also be needed at a later stage.

LEMMA 4.7. *$\sigma(g\,g') = \sigma(g)\,\sigma(g')$ for any $g, g' \in G$.*

Proof. It follows from the definition of $\sigma(g)$ that to prove $\sigma(g\,g') = \sigma(g)\,\sigma(g')$ it is enough to show that

$$b_t\,\sigma(g\,g') = \big(b_t\,\sigma(g)\big)\,\sigma(g'),$$

where b and t are arbitrary elements of B and S respectively.

Using the unique decomposition of G modulo Z given by (4.1) we can write

$$t(g\,g') = z^i s, \quad s \in S \tag{4.71}$$

and

$$tg = z^j s', \quad s' \in S; \tag{4.72}$$

then

$$s'\,g' = z^{i-j} s. \tag{4.73}$$

The use of equation (4.71) yields

$$b_t\,\sigma(g\,g') = b_s \zeta^i. \tag{4.74}$$

The use of equation (4.72) and (4.73) yields

$$\left\{\begin{aligned} \big(b_t\,\sigma(g)\big)\,\sigma(g') &= (b_{s'}\zeta^j)\,\sigma(g') \\ &= (b_s \zeta^j)\,\zeta^{i-j} \\ &= b_s \zeta^i. \end{aligned}\right. \tag{4.75}$$

The right hand sides of equations (4.74), (4.75) coincide. The lemma therefore follows.

LEMMA 4.8. *The mapping $\sigma = \sigma(g)$ is an automorphism of W for every $g \in G$.*

Proof. That $\sigma(g)$ is an endomorphism follows from the definitions (4.3), (4.5) and Lemma 4.6. If e denotes the identity of G then clearly $\sigma(e)$ leaves every element of W fixed. Lemma 4.7 then gives

$$\sigma(g^{-1})\,\sigma(g) = \sigma(e) = \sigma(g)\,\sigma(g^{-1});$$

since $\sigma(e)$ is the identity automorphism it follows that $\sigma(g)$ has both a left and a right inverse $\sigma(g^{-1})$. Therefore $\sigma(g)$ is an automorphism of W. This concludes the proof.

We see from Lemmas 4.7, 4.8, that the mapping $g \to \sigma(g)$ is a homomorphism of G onto a subgroup of the group of all automorphisms of W. It is in fact an isomorphism since the kernel is trivial; for if $g \neq e$ and $b \in B$, $b \notin C(B)$ then $\sigma(g)$ does not leave b_e fixed.

We have reached a stage where we are able to complete the description of the constructional procedure that is the object of this section; for it is now possible to form the splitting extension V of W by G. The group V may be defined as the set of all pairs $v=(g, w)$ where $g \in G$ and $w \in W$, with the law of composition

$$(g_1, w_1) \cdot (g_2, w_2) = \left(g_1 g_2, w_1 \sigma(g_2) w_2\right).$$

We shall write

$$V = G \cdot W,$$

and denote the elements of V simply by an unbracketed pair gw omitting the g or the w if one of them happens to be the identity of G or W respectively.

§ 5. The derived series of V

In this section we assume the notation developed in § 4. We investigate the dependence of the derived series of V on that of the derived series of G, with $B(m, n)$ remaining constant throughout. We assume further that the cyclic subgroup of order n in the centre of G (which enters the § 4 construction) is the last non-trivial term of the derived series of G; that is to say, we assume that G is a solvable group of derived length $r>1$, and that $G^{(r-1)}$ is cyclic of order n and lies in the centre of G.

The following lemma shows that the derived length of V is the sum of the derived lengths of W and G, i.e. it is of length $r+2$.

LEMMA 5.1. *If u is a positive integer then*

$$V^{(u)} = G^{(u)} \cdot W^{(u')},$$

where

$$u' = 0 \quad \text{if} \quad u \leq r$$

and

$$u' = u - r \quad \text{if} \quad u > r,$$

and $W^{(0)} = W$.

Proof. Consider the series of groups

$$1 < W' < W < G^{(r-1)} \cdot W < G^{(r-2)} \cdot W < \cdots < G \cdot W = V \tag{5.11}$$

We shall show that (5.11) is an ascending derived series.

We begin by proving

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' = W. \tag{5.12}$$

Since $G^{(r-1)}$ is abelian, the isomorphism

$$G^{(r-1)} \cdot W/W \cong G^{(r-1)},$$

yields

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' \leq W. \tag{5.13}$$

It remains to prove the reverse inequality. To do so we first recall that $G^{(r-1)} = G\,p\,(z; z^n = e)$. Now let $b_t \in B_t$ and consider the commutator

$$\begin{aligned} w &= [z, b_t] \\ &= z^{-1} b_t^{-1} z\, b_t \\ &= b_t^{-1}\, \sigma(z)\, b_t \\ &= b_t^{-1} \zeta\, b_t \\ &= (b^{-1} \varphi\, b)_t . \end{aligned}$$

Now by Lemma 3.5, $G\,p\,(b^{-1} b\, \varphi;\ b \in B) = B$; hence

$$\tilde{G}\,p\,(b^{-1} \varphi\, b = (b^{-1} b\, \varphi)^{-1};\ b \in B) = B .$$

Consequently the commutators $[z, b_t]$ generate W and so

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' \geq W . \tag{5.14}$$

The inequalities (5.13) and (5.14) now give us the desired equality (5.12).

Now, for $j = 0, 1, \ldots, r-1$, we have an isomorphism

$$(G^{(r-j-1)}) \cdot W / G^{(r-j)} \cdot W \cong G^{(r-j-1)} / G^{(r-j)},$$

and so

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \leq G^{(r-j)} \cdot W . \tag{5.15}$$

Clearly

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \geq G^{(r-j)};$$

combining this inequality with (5.12) we get

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \geq G^{(r-j)} \cdot W .$$

This is the reverse inequality to (5.15); consequently

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' = G^{(r-j)} \cdot W$$

for $j = 0, 1, \ldots, r-1$, and so the series (5.11) is an ascending derived series; the lemma now follows directly from this observation.

In the main construction that follows in § 7, we choose G to be a group of derived length $r = 2$. For convenience we state a particular case of Lemma 5.1 as part of an immediate corollary to this lemma:

Corollary 5.2. *If G is nilpotent of class two, then*

$$V'' = W$$

and

$$V'/V'' \cong G' .$$

We note that Corollary 5.2 implies that $V''' = W'$; it is therefore finite of order m. Further V'/V'' is finite of order n since G' is itself finite of order n.

§ 6. A double sequence of groups

We now describe a construction of groups depending on a finite or infinite index set J and on a finite or infinite sequence of parameters $n_0, n_1, \ldots, n_k$; these are to be positive odd integers, every consecutive pair of them being coprime:

$$(n_i, n_{i+1}) = 1 \quad \text{for } i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

The construction is inductive over the number of parameters and utilises the § 4 construction. The groups to be constructed will be denoted by $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$.

We begin with $k = 1$, and define $V(n_0, n_1, J)$ to be the direct power of groups $B(n_0, n_1)$ indexed by J with the centres of order n_0 amalgamated:

$$V(n_0, n_1, J) = \prod_{j \in J} B_j(n_0, n_1)/\text{a.c.}$$

Observe that $V(n_0, n_1, J)$ has cyclic centre of order n_0.

Now assume that we have already defined the groups $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$ for $1 \leq l < k$, and that they have cyclic centres of order n_0. To construct $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ we put

$$V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) = G$$

and

$$B(n_0, n_1) = B,$$

and apply the § 4 construction to B and G. This is possible because — by our hypothesis — the centre of G is cyclic of order n_1 and n_0, n_1 are odd and coprime.

LEMMA 6.1. *$V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ is isomorphic to the splitting extension of $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ by $V(n_{k-1}, n_k, J)$, with J' the product set of J and a transversal of $B(n_{k-1}, n_k)$ modulo its centre.*

Proof. Consider the group $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$. When $l = 2$, we have, by definition of $V(n_0, n_1, n_2, J)$ and $V(n_0, n_1, J')$,

$$\begin{aligned} V(n_0, n_1, n_2, J) &= V(n_1, n_2, J) \cdot \Big(\prod_{j' \in J'} B_{j'}(n_0, n_1)/\text{a.c.} \Big) \\ &= V(n_1, n_2, J) \cdot V(n_0, n_1, J'), \end{aligned}$$

J' being a transversal of $V(n_1, n_2, J)$ modulo its centre. By definition

$$V(n_1, n_2, J) = \prod_{j \in J} B_j(n_1, n_2)/\text{a.c.}$$

Hence the cardinal of J' coincides with that of

$$J \times [\text{a transversal of } B(n_1, n_2) \text{ modulo its centre}];$$

thus the lemma follows when $l = 2$.

We may therefore proceed by induction over l. Suppose the result holds for $1 \leq l < k$. Now

$$V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J) = V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cdot \left(\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.}\right)$$

where S is a transversal of $V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J)$ modulo its centre. By the inductive hypothesis

$$V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cong V(n_{k-1}, n_k, J) \cdot V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J'),$$

where J' is the product of J and a transversal of $B(n_{k-1}, n_k)$ modulo its centre. Therefore

$$(6.11)\quad \begin{cases} V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J) \\ \quad \cong \left(V(n_{k-1}, n_k, J) \cdot V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J')\right) \cdot \left(\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.}\right) \\ \quad \cong V(n_{k-1}, n_k) \cdot \left(V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J') \cdot \left(\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.}\right)\right). \end{cases}$$

From the method of construction one can establish a one-to-one correspondence between S and a transversal of $V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J')$ modulo its centre; therefore the group representing the second term in the equation (6.11) is isomorphic to $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ and the lemma follows.

Corollary 6.2. *If J is infinite then the cardinal of J' is the same as the cardinal of J.*

Proof. J' is the product of an infinite set J and a finite set.

LEMMA 6.3. *If $k > 1$, then the second derived group of $V = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ is isomorphic to $R = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$, J' as in the preceding lemma.*

Proof. Suppose $k = 2$. Then by definition

$$V(n_0, n_1, n_2, J) = V(n_1, n_2, J) \cdot V(n_0, n_1, J').$$

By Corollary 5.2,

$$\left(V(n_0, n_1, n_2)\right)'' \cong V(n_0, n_1, J').$$

So we have a basis for induction. Suppose then that the second derived group of $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$ is isomorphic to $V(n_0, n_1, \ldots, n_{l-1}, J')$ for $1 \leq l < k$. Then invoking Lemma 6.1,

$$(6.31)\qquad V \cong V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cdot V(n_0, n_1, J_0),$$

and by Lemma 5.1,

$$\begin{aligned} V'' &\cong \left(V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J)\right)'' \cdot V(n_0, n_1, J_0) \\ &= V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J') \cdot V(n_0, n_1, J_0) \\ &\cong V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J') \\ &= R, \end{aligned}$$

where the index set J_0 is defined by the usual decomposition as exhibited in (6.31) and J' is as in Lemma 6.1. This completes the proof of the lemma.

It follows from the method of proof of Lemma 6.3 that

$$(V'/V'') \cong (V(n_{k-1}, n_k, J))' ; \tag{6.4}$$

consequently the factor group V'/V'' is finite of order n_{k-1}.

§ 7. The construction of ascending derived series

In this section we shall construct ascending derived series of arbitrarily large length; if the length of the series is finite, all the terms appearing in the series will be finite; if the series is infinite, all the terms appearing in the series will be infinite with the exception of the trivial group and the first non-trivial term, and this series will have infinitely many finite factors with infinite factors sandwiched in between the finite factors. The series are effectively obtained from the following lemma and its corollary.

LEMMA 7.1. *Given parameters $n_0, n_1, \ldots, n_k$ with $k>1$ and an index set J', there is an index set J such that $R = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ is isomorphic to the second derived group of $V = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$, provided that $|J'|$ is of the form*

$$|J'| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot \mathfrak{n},$$

for some cardinal $\mathfrak{n}$.

Proof. Choose J to be of the form $|J| = \mathfrak{n}$. The result now follows by Lemma 6.3.

An immediate corollary of this lemma is:

Corollary 7.2. If J' is infinite, then $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ is isomorphic to the second derived group of $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J')$.

Lemma 7.1 and Corollary 7.2 have now placed us in a position to construct ascending derived series. These are obtained by repeatedly embedding groups R in supergroups V which have the property

$$V'' \cong R.$$

We proceed as follows: Choose a sequence of positive odd integers

$$n_0, n_1, \ldots \quad \text{with} \quad (n_k, n_{k+1}) = 1, \tag{7.3}$$

and a sequence of index sets

$$J_0, J_1, \ldots \quad \text{where} \quad |J_{k-1}| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot |J_k|. \tag{7.4}$$

By Lemma 7.1 it is possible to embed

$$H_{2k} = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J_{k-1})$$

in

$$H_{2(k+1)} = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k+1}, J_k),$$

since

$$(H_{2(k+1)})'' \cong H_{2k}$$

because

$$|J_{k-1}| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot |J_k|,$$

for $k=1, 2, \ldots$. We identify H_{2k} with the second derived group $(H_{2k+2})''$ of H_{2k+2} for $k=1, 2, \ldots$.

Define

$$H_{2k-1}=(H_{2k})'$$

for $k=1, 2, \ldots$, and

$$H_0=H_1';$$

then the series

$$H_0<H_1<\cdots \tag{7.5}$$

is an ascending derived series. Furthermore we see from the equation (6.4) that

$$|H_{2k+1}/H_{2k}|=n_k,$$

for $k=0, 1, \ldots$.

If the index sets J_k do not all have the same cardinal, the condition in (7.4) ensures that they are all finite. Hence $|J_0|$ is finite, and therefore has a finite number of factors. Thus the condition in (7.4) can hold for only finitely many k, say $k=0, 1, \ldots, k'$, and in this case the embedding process must terminate after k' steps; k' depends only on the magnitude of $|J_0|$ and the parameters $n_0, n_1, \ldots$. So when the index sets are finite, the ascending derived series (7.5) is necessarily of finite length and all of the terms occurring in the series are of finite order.

We can ensure that the ascending derived series (7.5) is an iads by proceeding as follows: We first choose the sequence in equation (7.3) to be infinite. Then we choose all the index sets J_k in (7.4) to have the same cardinal $\mathfrak{m}$, i.e. $|J_k|=\mathfrak{m}$ for $k=0, 1, \ldots$. The condition (7.4) is now automatically satisfied and Corollary 7.2 ensures the embeddability of H_{2k} in H_{2k+2} for $k=1, 2, \ldots$, the series $k=1, 2, \ldots$ being an infinite series. In this case the series (7.5) is an iads with infinitely many finite factors H_{2k+1}/H_{2k}, $k=0, 1, \ldots$. For the remainder of this section we shall assume that (7.5) is an iads.

The iads (7.5) depends on the chosen parameters (7.3), (7.4). The infinitely many finite factors H_{2k+1}/H_{2k} are of order n_k, for $k=0, 1, \ldots$. Since the parameters n_k need only be odd with consecutive terms coprime, it is possible to arrange that the orders n_k of the infinitely many finite factors are bounded. We may, for example, choose $n_{2k+1}=5$ and $n_{2k}=3$, $k=0, 1, \ldots$. It is not however possible to have $n_k=3$ for $k=1, 2, \ldots$ since BAUMSLAG [4] has proved that if G/G' is a cyclic p-group then G'' can be a cyclic p-group only if it is trivial. Furthermore the finite factors are, by NEUMANN'S Theorem, as close together as possible.

The situation in iads of this type, i.e. iads with infinitely many finite factors whose orders are bounded, is unexpected when viewed in the light of PHILIP HALL'S investigations concerning the orders of the abelian factors in the derived series of a finite p-group in [2].

We can also obtain iads with infinitely many finite factors with the orders of these finite factors unbounded. For example we may choose $n_k=p_k$, the k-th odd prime, for $k=0, 1, \ldots$.

A point of interest concerning iads with finite factors is that consecutive finite factors must have infinite factors sandwiched in between; this is, by NEUMANN'S Theorem, a necessary condition. It is this intermingling of finite and infinite that makes the study of iads more interesting than the study of infinite descending derived series, in which it is possible to have all the factor groups occurring in the series of finite order.

Finally, we state, without proof, that the requirement of the parameters n_k to be odd can be done away with. The construction is similar but more complicated.

References

[1] NEUMANN, B. H.: Ascending derived series. Compositio Mathematica **13**, 47–64 (1956). – [2] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29–95 (1933). – [3] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: A remark on generalised free products. J. London Math. Soc. **25**, 202–204 (1950). – [4] BAUMSLAG, GILBERT: A theorem on infinite groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 545–548 (1957).

Dept. of Math., The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 1. November 1956)

TACHIKAWA, H.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 479–487 (1958)

Duality Theorem of Character Modules for Rings with Minimum Condition

By
HIROYUKI TACHIKAWA

INTRODUCTION. The notion of dual modules was first introduced by NESBITT-THRALL [7] in connection with commutator algebras of faithful representations of quasi-Frobenius algebras and was later used by NAGAO-NAKAYAMA [6] to construct injective modules over algebras. On the other hand the character module for a quasi-Frobenius ring was recently investigated by K. MORITA and the author [5].

The notions of dual modules and character modules clearly depend on characteristic properties of rings over which they are defined, and in the case of quasi-Frobenius algebras they are really distinct; nevertheless, as the results of above writers show, the duality theorem of modules is known to hold for two kinds of rings: algebras of finite rank over a ground field and quasi-Frobenius rings. This makes us conjecture that it may be possible to find a connection between the notions of dual modules and character modules. In this paper we shall show that a ring for which the duality theorem of modules holds need not be an algebra or quasi-Frobenius ring, and in case of algebras the notion of dual modules is included in the notion of (generalized) character modules. It seems of interest that the duality theorem of modules holds for any ring with minimum condition.

Let A be a ring containing a unit element 1 and satisfying the minimum condition on left ideals. Assume that Q denotes an injective left A-module whose semi-simple part is a finitely generated, faithful A/A_N-module, where A_N denotes the radical of A. If B denotes the inverse A-homomorphism ring[1]) of Q, then Q is considered as a bimodule with A as a left operator domain and with B as a right operator domain. For a left A- (resp. right B-) module L (resp. R), the Q-character module, denoted by $\mathrm{Char}_Q L$ (resp. $\mathrm{Char}_Q R$), is defined as a right B- (resp. left A-) module consisting of all left A- (resp. right B-) homomorphisms of L (resp. R) into Q. Then the main theorem asserts in § 2 that if L is a finitely generated left A-module, there exists an A-isomorphism:

$$\mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q L) \approx L$$

and in a suitable pairing (product) of L and $\mathrm{Char}_Q L$ with respect to Q the annihilator relations hold between submodules of L and $\mathrm{Char}_Q L$. As an immediate consequence we see that the inverse B-homomorphism ring of Q, i.e., the second commutator ring of A with respect to Q, is A itself.

[1]) We follow the notation of ARTIN-NESBITT-THRALL [1, p. 41].

In case of algebras we shall show in § 3 that the dual module of a right A-module which is isomorphic to A can be taken as an injective module Q above and then for any module character module and dual module are isomorphic to each other.

In § 4 we shall consider the case where Q satisfies the descending chain condition. In this case it is proved that B satisfies the minimum condition on right ideals and Q is injective as a right B-module. Therefore the duality theorem of character modules is stated symmetrically with respect to finitely generated left A-modules and finitely generated right B-modules.

Throughout this paper the unit element of A is to act as identity operator on all modules considered.

The author wishes here to express hearty thanks to Prof. K. MORITA for his advices.

§ 1. Definitions and Preliminaries

To begin with we generalize the definition of character modules in [5]. Let A and B be associative rings and U a left A- and right B-module, and $a(ub) = (au)b$ for $a \in A$, $b \in B$ and $u \in U$. For left A-module L, a left A-homomorphism of L into U will be called a U-character of L. The set of all U-characters of L forms a right B-module under the following definitions of addition and multiplication:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\varphi b)(x) = \varphi(x)b \quad \text{for } x \in L,\ b \in B.$$

This right B-module will be called the U-character module and will be denoted by $\mathrm{Char}_U L$. For a right B-module R the character module of R is similarly defined; it is a left A-module.

Let L and R be a left A-module and a right B-module respectively. If for any element x of L and any element y of R there corresponds an element $u \in U$, denoted by (x, y), such that

$$(x + x', y) = (x, y) + (x', y), \quad (x, y + y') = (x, y) + (x, y'),$$
$$(ax, y) = a(x, y), \quad (x, yb) = (x, y)b,$$

for any $x, x' \in L$; $y, y' \in R$; $a \in A$; $b \in B$, then we shall say that L and R form a pair with respect to U. In this case we put

$$\mathrm{Ann}(L_0; R) = \{y \mid (x, y) = 0, \text{ for all } x \in L_0\},$$
$$\mathrm{Ann}(R_0; L) = \{x \mid (x, y) = 0, \text{ for all } y \in R_0\},$$

for $L_0 \subset L$ and $R_0 \subset R$. If $\mathrm{Ann}(L; R) = 0$ and $\mathrm{Ann}(R; L) = 0$, we shall say that L and R form an orthogonal pair with respect to U.

Then we have the following theorem and corollary which are essentially proved in [5, Theorem 1.1, Corollary 1.2 and 1.3]; we have only to replace "right A-module" there by "right B-module".

THEOREM 1.1. *Let the U-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module be simple. Suppose that a left A-module L and*

a right B-module R form an orthogonal pair with respect to U and one of L and R has a composition series. Then we have the following conclusion:

(a) $\mathrm{Char}_U L \approx R$, $\mathrm{Char}_U R \approx L$

(b) $\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_0; R); L\right) = L_0$, $\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(R_0; L); R\right) = R_0$;

for any submodule L_0 of L and any submodule R_0 of R.

COROLLARY 1.2. *Under the assumption of Theorem 1.1, L/L_0 and $\mathrm{Ann}(L_0; R)$, as well as $\mathrm{Ann}(R_0; L)$ and R/R_0, form an orthogonal pair with respect to U, and each of these modules is isomorphic to the U-character module of the other in the respective pair. At the same time any U-character of a left A-submodule L_0 of L can be extended to a U-character of L.*

Assume that A is a ring possessing a unit element 1 and satisfying the minimum condition on left ideals. Let us denote the semi-simple part of a left A-module L by $S(L)$; here the semi-simple part of L means the largest submodule of L which is semi-simple, i.e. $S(L) = \{x \in L \mid A_N x = 0$, A_N is the radical of $A\}$. As is shown by K. MORITA, Y. KAWADA and the author [4] for any semi-simple left A-module C there exists an injective module Q such that $S(Q) \approx C$. For the sake of reader's convenience we shall restate a part of the results of [4] which will be used at the proofs in § 2.

COROLLARY 2.2[2]). Let L be a left A-module and Q an injective left A-module. If $S(L) \approx S(Q)$, there exists a monomorphism $\varphi: L \to Q$; in the case where L is also injective, L is isomorphic to Q.

THEOREM 4.1[2]). Let Q be an injective left A-module and L an arbitrary left A-module. If $S(Q)$ is faithful as a left A/A_N-module, then for any submodule L_0 of L we have

$$L_0 = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)); L\right)$$

where $\mathrm{Hom}(L, Q)$ means the set of all A-homomorphisms of L into Q and $\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right) = \{\varphi \mid \varphi(L_0) = 0, \varphi \in \mathrm{Hom}(L, Q)\}$, $\mathrm{Ann}(\Phi_0; L) = \{x \mid x \in L, \varphi_0(x) = 0$ for all $\varphi_0 \in \Phi_0\}$ for a subset Φ_0 of $\mathrm{Hom}(L, Q)$.

THEOREM 4.2[2]). Let Q be an injective left A-module. Let B and B' be the inverse A-homomorphism rings of Q and $S(Q)$ respectively. If we denote by B_N the set of all endomorphisms φ of Q such that $S(Q) \cdot \varphi = 0$[3]), then B_N is a two sided nilpotent ideal of B and residue class ring $B/B_N (= \bar{B})$ is isomorphic to B'; more precisely if $A_N^m = 0$, then $B_N^m = 0$.

§ 2. Duality theorem of character modules

Suppose that A is a ring with a unit element 1 and has the minimum condition on left ideals. Let us denote the radical of A by A_N and put $\bar{A} = A/A_N$.

Let Q be an injective left A-module such that the semi-simple part $S(Q)$ is finitely generated as a left $\bar{A}$-module. Then it is seen by Theorem 4.2 of [4] that the inverse A-homomorphism ring B of Q is semi-primary and, if

[2]) The numbers are same as in [4].

[3]) $S(Q) \cdot \varphi = \varphi(S(Q))$.

B_N denotes the radical of B (the maximal two sided nilpotent ideal), $B_N = \{\varphi \in B \mid S(Q)\,\varphi = 0\}$. We shall consider B as a right operator domain of Q, then Q becomes a two sided A-B-module. Hence we can define the Q-character modules for left A-modules and for right B-modules. We first prove

THEOREM 2.1. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part is finitely generated and faithful as a left $\bar{A}$-module*[4]*. Then Q-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module are simple.*

The proof will be proceeded by the following lemma which deals with the case of semisimple ring A.

LEMMA 2.2. *Let A be a semisimple ring, S a finitely generated, faithful left A-module and B the inverse A-homomorphism ring of S. For a left A- and right B-module S the S-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module are simple.*

PROOF. Let L be a simple left A-module. Since S is a faithful A-module there exists a submodule L_0 of S such that L_0 is isomorphic to L. Then we have a direct decomposition of S into L_0 and L_1: $S = L_0 \oplus L_1$. If β_0 is an endomorphism of S such that β_0 operates as identity on L_0 and $\beta_0(L_1) = 0$, then β_0 is a primitive idempotent element of B. From the assumption that A is semisimple, B is a semisimple ring and every left A-homomorphism of L_0 into S can be extended to a endomorphism of S. Hence $\mathrm{Char}_S L_0 \approx B/(1-\beta_0)\,B$. Therefore $\mathrm{Char}_S L_0$ is a simple right B-module and consequently $\mathrm{Char}_S L$ is also simple.

We can similarly prove that S-character module of any simple right B-module is simple, since the inverse B-homomorphism ring of S is A. This completes the proof.

PROOF OF THEOREM 2.1. For any simple left A-module L there exists a primitive idempotent e of A for which $L \approx A/A(1-e) + A_N$. Let φ be a Q-character of $A/A(1-e) + A_N$. If $\varphi(\bar{1}) = x \in Q$, where $\bar{1}$ means the residue class of 1 modulo $A(1-e) + A_N$, then from the definition of character modules we see that the Q-character module of $A/A(1-e) + A_N$ is isomorphic to the right B-submodule $R = \{x \mid \varphi(\bar{1}) = x,\ x \in Q\}$ of Q, for the correspondence $\varphi \to \varphi(\bar{1}) = x$ is one-to-one. Since the Q-character φ is a left A-homomorphism it follows that x must be contained in $S(Q)$ because $\varphi(A_N \cdot \bar{1}) = A_N \cdot \varphi(\bar{1}) = A_N \cdot x = 0$. Therefore φ may be considered as a $S(Q)$-character[5] of $A/A(1-e) + A_N \approx \bar{A}/\bar{A}(\bar{1}-\bar{e})$, and left A-modules $S(Q)$ and $A/A(1-e) + A_N$ may be also considered as $\bar{A}$-modules in an obvious way. In this case by Theorem 4.2 of [4] the inverse A-homomorphism ring of $S(Q)$ is $\bar{B}$. Thus the proof is reduced to the case where A is semisimple. Lemma 2.2 assures that $\mathrm{Char}_Q(A/A(1-e) + A_N)$ is simple as $\bar{B}$-module. Hence the Q-character module of any simple left A-module is simple right B-module.

Next we consider the Q-character module of a simple right B-module. To show that the computation above is available for this case, it is sufficient

[4] Such injective modules really exist, cf. [4, Lemma 3.4].

[5] $S(Q)$ is considered as a left A- and right B-module.

to prove that $\mathrm{Ann}(B_N; Q) = S(Q)$. By Theorem 4.1 of [4] we have $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S(Q); B); Q) = S(Q)$. Since $\mathrm{Ann}(S(Q); B) = B_N$ it holds that $\mathrm{Ann}(B_N; Q) = S(Q)$. This completes the proof.

In what follows we shall always denote by ${}_AA$ and B_B the ring A itself considered as a left A-module and the ring B itself considered as a right B-module respectively.

THEOREM 2.3. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part is a faithful left A-module. If we put*

$$(a, \varphi) = \varphi(a) \qquad \text{for } a \in {}_AA,\ \varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA),$$

then ${}_AA$ and $\mathrm{Char}_Q({}_AA)$ forms an orthogonal pair with respect to Q.

PROOF. Since Q-characters mean left A-homomorphisms it is clear that $\mathrm{Ann}({}_AA; \mathrm{Char}_Q({}_AA)) = 0$. Since for any element $x \in Q$ there exists a Q-character φ_x such that $\varphi_x(1) = x$ it follows that $(a, \varphi) = 0$ for all $\varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA)$ if and only if $ax = 0$ for all $x \in Q$. Hence it suffices to show that Q is a faithful A-module. On the other hand we have by Corollary 2.2 of [4] that $Q^{(n)}$ $(= Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n,\ Q_i \approx Q)$ for suitable positive integer n contains a submodule V isomorphic to ${}_AA$. Hence $Q^{(n)}$ is faithful, and consequently Q is also faithful. Thus $\mathrm{Ann}(\mathrm{Char}_Q({}_AA); {}_AA) = 0$. This complete the proof.

THEOREM 2.4. *Under the assumption of Theorem 2.3 the inverse B-homomorphism ring of Q is A.*

PROOF. By the correspondence $\varphi \leftrightarrow \varphi(1)$, for all $\varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA)$, $\mathrm{Char}_Q({}_AA) \approx Q_B$ (Q_B means Q as a right B-module). On the other hand by Theorem 2.1, 2.3 and 1.1 we have $\mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q({}_AA)) \approx {}_AA$. Thus $\mathrm{Char}_Q(Q_B) \approx {}_AA$.

Now let $A^{(n)}$ be a direct sum of n left A-modules ${}_AA$ and let $Q^{(n)}$ be a direct sum of n right B-module Q_B:

$$A^{(n)} = {}_AA \oplus {}_AA \oplus \cdots \oplus {}_AA, \qquad Q^{(n)} = Q_B \oplus Q_B \oplus \cdots \oplus Q_B.$$

Then by Theorem 2.3 $A^{(n)}$ and $Q^{(n)}$ form an orthogonal pair with respect to Q; it is seen by putting

$$(a, x) = \sum_i a_i x_i \in Q \quad \text{for} \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^{(n)},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q^{(n)}.$$

Let L be any finite left A-module. Then it is well known that $L \approx A^{(n)}/L_0$ with a suitable submodule L_0 of $A^{(n)}$ for some n. Therefore by Theorem 2.1 and Corollary 1.2 we obtain immediately the following theorem.

THEOREM 2.5. *Let A be a ring with minimum condition on left ideals and let L be a finitely generated left A-module. If we put*

$$(x, \varphi) = \varphi(x) \qquad \text{for } x \in L,\ \varphi \in \mathrm{Char}_Q L,$$

then this pairing is orthogonal with respect to Q, $L \approx \mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q L)$, and the annihilator relations

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(L_0; \mathrm{Char}_Q L); L) = L_0, \qquad \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(R_0; L); \mathrm{Char}_Q L) = R_0$$

hold for every submodule L_0 of L and every submodule R_0 of $\mathrm{Char}_Q L$.

REMARK. In case A is a quasi-Frobenius ring we can take ${}_AA$ as Q in Theorem 2.5, for A is injective as a left A-module (cf. [5], p. 419).

Theorem 2.4 may be interpreted also as a commutator theorem in case A is an algebra (cf. [7], p. 560).

§ 3. Dual modules and character modules

Assume that A is an algebra of a finite rank over a ground field P with unit element. Let R be a finitely generated right A-module. The dual module of R, denoted by R^*, is the set of all P-homomorphisms of R into P and is a left A-module by the following definition:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \circ f)(x) = f(xa) \qquad \text{for } x \in R,\ a \in A.$$

For a finitely generated left A-module L, the dual module L^* is similarly defined and in this case the multiplication of L with A on right is defined as follows: $(f' \circ a)(x') = f'(ax')$, for $x' \in L$, $a \in A$, $f' \in L^*$.

If we put

$$((x, f)) = f(x) \qquad \text{for } x \in R,\ f \in R^*,$$

then in this pairing (usually called "inner product") R and R^* form an orthogonal pair with respect to P. Moreover following well known relations hold:

(a) $\quad \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(R_0; R^*); R\right) = R_0, \qquad \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_0; R); R^*\right) = L_0$

(b) $\quad (R/R_0)^* \approx \mathrm{Ann}(R_0; R^*), \qquad (R^*/L_0)^* \approx \mathrm{Ann}(L_0; R),$

for every submodule R_0 of R and every submodule L_0 of R^*.

The algebra A considered as a left (right) A-module will be denoted by ${}_AA({A}_A)$ when we want to emphasize this situation.

Now we shall show that we can take $({A}_A)^*$ as the injective module Q in Theorem 2.5. NAGAO-NAKAYAMA have investigated the structure of projective and injective modules in the case where A is an algebra, and by their result [6, p. 169] we can state that $({A}_A)^*$ is an injective left A-module.

It follows from (b) that

$$({A}_A/{A}_N)^* = \mathrm{Ann}\left({A}_N; ({A}_A)^*\right).$$

Thus we have $S\left(({A}_A)^*\right)$ is a faithful $\bar{A}$-module, since $\mathrm{Ann}\left({A}_N; ({A}_A)^*\right) = S\left(({A}_A)^*\right)$.

By using ${A}_A$ as a representation space, we have the second regular representation of A in P, and then the commutator ring of the second regular representation is inverse-isomorphic to A. It follows that the inverse A-homomorphism ring of module $({A}_A)^*$ is isomorphic to A, since the representations of A in P obtained respectively by modules $({A}_A)^*$ and ${A}_A$ as representation spaces are equivalent to each other. In fact, since the ground field P is contained in the center of A, we can put $({A}_A)^* = ({}_AA)^*$, and by the definitions

of multiplication of ${}_A(A)^*$ and $(A_A)^*$ with A, $(A_A)^*$ is a bimodule with A as a left and a right operator domain. We shall denote this bimodule by A^*.

In § 2 we have already seen that $\mathrm{Char}_Q({}_AA) \approx Q_B$. Thus in this case we have $\mathrm{Char}_{A^*}({}_AA) \approx A^* \approx {}_A(A)^*$.

We are now ready to prove for every left A-module L that $\mathrm{Char}_{A^*} L$ and L^* are isomorphic to each other. If an A^*-character φ of A mapps the unit element 1 of A on an element f on A^*, then let us denote φ by $\hat{f}$. For some integer n we have an A-isomorphism $L \approx ({}_AA)^{(n)}/L_0$ for suitable submodule L_0 of ${}_A(A)^{(n)}$. Then the following orthogonal pairings can be defined, since $(A^*)^{(n)} \approx (A^{(n)})^*$ and $(\mathrm{Char}_{A^*}A)^{(n)} \approx \mathrm{Char}_{A^*}A^{(n)}$;

$$(X, \hat{Y}) = \sum_\nu \hat{f}_\nu(x_\nu) \in A^*$$

$$((Y, X)) = \sum_\nu f_\nu(x_\nu) \in P,$$

for $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^{(n)}$, $Y = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (A^*)^{(n)}$, and for $\hat{Y} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_n) \in (\mathrm{Char}_{A^*}A)^{(n)}$.

Then the following statements are equivalent to one another:

1. $(X, \hat{Y}) = 0$ for all $X \in L_0$.
2. $\sum_\nu \hat{f}_\nu(x_\nu) = 0 \in A^*$ for all $X \in L_0$.
3. $\sum_\nu \big(\hat{f}_\nu(x_\nu)\big)(x) = 0 \in P$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
4. $\sum_\nu \big((x_\nu \cdot \hat{f}_\nu)(1)\big)(x) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
5. $\sum_\nu (x_\nu \circ f_\nu)(x) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
6. $\sum_\nu f_\nu(x\, x_\nu) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
7. $\sum_\nu f_\nu(x'_\nu) = 0$ for all $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in L_0$.
8. $\big((Y, X')\big) = 0$ for all $X' \in L_0$.

Thus we have

$$\mathrm{Ann}(L_0; \mathrm{Char}_{A^*}A) \approx \mathrm{Ann}\big((L_0; (A)^*)\big).$$

It follows by Corollary 1.2 and relation (b) that

$$\mathrm{Char}_{A^*} L \approx L^*.$$

§ 4. Finitely generated injective modules

In this section we shall always assume that A satisfies the minimum condition on left ideals and use the notations of § 2.

THEOREM 4.1. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part $S(Q)$ is a finitely generated faithful left $\bar{A}$-module. The inverse A-homomorphism*

ring B satisfies the minimum condition on right ideals if and only if Q is finitely generated.

PROOF. If we put

$$(x, b) = x \cdot b \quad \text{for } x \in {}_AQ,\ b \in B_B,$$

${}_AQ$ and B_B form an orthogonal pair with respect to Q. Thus, by Theorem 1.1 we arrive at the conclusion.

THEOREM 4.2. *Let Q be a finitely generated injective module whose semi-simple part is a faithful $\bar{A}$-module, then Q is an injective right B-module.*

PROOF. Let J be a right ideal of B. Since Q is a finite left A-module, it follows from Theorem 1.1 that in the pairing (x, b) of Theorem 4.1

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(J; {}_AQ); B_B) = J,$$

$$\text{(2)} \qquad {}_AQ = \operatorname{Char}_Q(B_B),$$

where every element x of ${}_AQ$ is considered as a Q-character of B_B defined by the above pairing. Hence if we put $(\bar{x}, b) = (x, b)$ for $x \in Q$, $\bar{x} \in Q/\operatorname{Ann}(J; Q)$, $b \in J$, then $Q/\operatorname{Ann}(J; Q)$ and J form an orthogonal pair.

Thus we have

$$\operatorname{Char}_Q J \approx \operatorname{Char}_Q B/\operatorname{Ann}(J; \operatorname{Char}_Q B).$$

Hence every homomorphism of J into Q can be extended to a homomorphism of B into Q. Thus Q is injective.

THEOREM 4.3. *If A is a quasi-Frobenius ring, then B is also quasi-Frobenius.*

PROOF. Let us denote the decompositions of ${}_AA$, ${}_AQ$; B_B, Q_B into indecomposable left A- and right B-modules respectively by

$${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n; \qquad B_B = f_1 B \oplus \cdots \oplus f_m B,$$
$${}_AQ = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m; \qquad Q_B = Q_1' \oplus \cdots \oplus Q_n',$$

where e_i, f_j, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$ are primitive idempotents of A and B respectively. Since A is quasi-Frobenius, it follows by Theorem 4.1 that B has the minimum condition on right ideals. Thus by the duality theorem of character modules, for any primitive ideal $f_\kappa B$ of B, $\operatorname{Char}_Q f_\kappa B$ is isomorphic to some Q_λ. Since quasi-Frobenius rings are self-injective and since ${}_AS(Q)$ is faithful $\bar{A}$-module, there exists a primitive left ideal Ae_μ which is isomorphic to Q_λ. By the same reason the $\operatorname{Char}_Q Ae_\mu$ is isomorphic to some Q_η'. Thus we have

$$f_\lambda B \approx Q_\eta'.$$

Hence every primitive right ideal $f_\lambda B$ of B is projective and injective, therefore B is a self-injective right module. Since self-injective rings with minimum condition are quasi-Frobenius[6]), B is quasi-Frobenius. This complete the proof.

[6]) This is proved in [3] and [4].

Let

$$A = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{f(\varkappa)} A e_{\varkappa,i},$$

be a direct decomposition of A into indecomposable left ideals, where $1 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_{\varkappa,i}$, $e_{\varkappa,i} (\varkappa = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, f(\varkappa))$ are mutually orthogonal primitive idempotents, $A e_{\varkappa,i} \approx A e_{\varkappa}$ for $i = 1, \ldots, f(\varkappa)$, $A e_{\varkappa,i} \not\approx A e_{\lambda,j}$ for $\varkappa \neq \lambda$.

If A is a quasi-Frobenius ring, there exists a permutation π of indices $\varkappa$ such that $S(A e_{\varkappa}) \approx \bar{A} \bar{e}_{\pi(\varkappa)}$.

THEOREM 4.4. *If* $Q = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_{\varkappa}} Q_{\varkappa,i}$, $Q_{\varkappa,i} \approx A e_{\varkappa}$, *is a decomposition of* Q *into indecomposable left* A*-submodules, then the inverse* A*-homomorphism ring* B *is Frobenius if and only if* $t_{\varkappa} = t_{\pi(\varkappa)}$ *for all indices* $\varkappa$.

We omit the proof.

THEOREM 4.5. *Under the assumption of Theorem* 4.2, *the inverse* A*-homomorphism ring* B *is uniserial if and only if* A *is uniserial.*

We omit the proof.

References

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with Minimum Condition. Univ. of Michigan Press 1948. — [2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebras. Princeton: Univ. Press 1955. — [3] EILENBERG, S., and T. NAKAYAMA: On the Dimension of Modules and Algebras II. (Frobenius Algebras and quasi-Frobenius Rings.) Nagoya Math. J. **9**, 1–16 (1955). — [4] MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA: On Injective Modules. Math. Z. **68**, 217–226 (1957). — [5] MORITA, K., and H. TACHIKAWA: Character Modules, Submodules of a Free Module, and quasi-Frobenius Rings. Math. Z. **65**, 414–428 (1956). — [6] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the Structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164–170 (1953). — [7] NESBITT, C. J., and R. M. THRALL: Some Ring Theorems with Applications to Modular Representation. Ann. of Math. **47**, 551–567 (1946).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 27. April 1957)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 488–497 (1958)

Über ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Lückenreihen

Von
DIETER GAIER

1. Die vorliegende Arbeit knüpft an drei wohlbekannte Sätze über Funktionen vom Exponentialtyp an[1]).

Satz A (CARLSON). *Ist $f(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ regulär und vom Exponentialtyp $< \pi$, so folgt aus $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ stets $f(z) \equiv 0$.*

Satz B (CARTWRIGHT). *Ist $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha$ $\left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp und ferner[2]) $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin\alpha$, so folgt aus der Beschränktheit von $f(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ die Beschränktheit von $f(x)$ $(x \geq 0)$; ist sogar $\lim_{n\to\infty} f(n) = s$, so gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = s$[3]).*

Satz C (PÓLYA). *Ist $f(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ regulär und vom Exponentialtyp $< \pi$, so folgt aus $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ stets $h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$*[4]).

Wir fragen uns, ob sich die in diesen Sätzen auftretende Typvoraussetzung abschwächen läßt, wenn man von $f(z)$ fordert, daß $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion ist, in deren Potenzreihenentwicklung Lücken auftreten. Als Maß für die Lückenlänge verwenden wir den Pólyaschen Begriff der Maximaldichte Δ der von Null verschiedenen Koeffizienten (vgl. **3**). Betrachtet man $f(z) = \sin \pi z$, so sieht man, daß im Falle $\frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1$ keine Abschwächung der Typvoraussetzung in den obigen Sätzen zu erwarten ist. Für $0 \leq \Delta < \frac{1}{2}$ beweisen wir jedoch die Gültigkeit der Sätze A, B (für $\alpha = \pi/2$), C unter der Annahme, daß $f(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ vom Exponentialtyp $< \frac{\pi}{\sin \pi\Delta}$ ist (Satz 7).

In **4** geben wir limitierungstheoretische Anwendungen, wobei sich die Äquivalenz der Borelschen Verfahren B, B', B_I, B_I' in der Anwendung auf Lückenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(a_n = 0$ für $n \neq \lambda_\nu)$ mit $\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ und $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty$; K fest) ergibt. Für beliebige Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gilt diese Äquivalenz allgemein nur unter

---

[1]) Vgl. dazu [*1*] und dort angegebene Literatur.

[2]) Die Bezeichnungen werden in **2** erläutert.

[3]) Dieser Satz findet sich implizit bei CARTWRIGHT, explizit bei MACINTYRE [*4*, S. 16]. Die Formulierung in [*1*, S. 180] ist für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ unzutreffend.

[4]) Unsere Aussage ist äquivalent zu derjenigen ohne die Bedingung $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$. Vgl. auch die Erweiterung von Satz C für den Fall des Winkelraums in **2**.

der stärkeren Bedingung $a_n = O(K^n)\,(n \to \infty;\ K < \sqrt{\pi^2+1})$ (vgl. [3]), so daß sich also auch hier eine Größenbeschränkung durch eine Lückenforderung abschwächen läßt.

2. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $f(z)$, die in einem abgeschlossenen Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp sind, und die an den Stellen $z = n = 0, 1, 2, \ldots$ gewissen Beschränkungen unterliegen.

Zunächst einige vorbereitende Betrachtungen. Ist $f(z)$ in $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ regulär $(0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi)$, so bezeichnen wir mit

$$\tau(\alpha,\beta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r;\alpha,\beta)}{r} \qquad \left(M(r;\alpha,\beta) = \max_{\alpha\leq\varphi\leq\beta} |f(r\,e^{i\varphi})|\right)$$

den Typ von $f(z)$ im Winkelraum (α, β). Dabei ist $-\infty \leq \tau(\alpha,\beta) \leq +\infty$ möglich; im Sonderfall $\tau(\alpha,\beta) < \infty$ heißt $f(z)$ vom Exponentialtyp $\tau(\alpha,\beta)$ im Winkelraum (α,β). Ist $f(z)$ eine ganze Funktion, und $\beta = \alpha + 2\pi$, so heißt $\tau(\alpha, \alpha+2\pi) = \tau$ der Typ von $f(z)$ in der Ebene $(0 \leq \tau \leq \infty$, sofern $f(z) \not\equiv 0$ ist). Für $\beta = \alpha$ charakterisiert die Indikatorfunktion $\tau(\alpha,\alpha) = h_f(\alpha)$ das Anwachsen von $f(z)$ längs des Strahls $\arg z = \alpha$. Die Funktion $h_f(\varphi)$ hat, wenn $f(z)$ im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp ist, einige wichtige Eigenschaften; zum Beispiel gilt [1, S. 68]

$$h_f(\varphi_2)\sin(\varphi_3-\varphi_1) \leq h_f(\varphi_1)\sin(\varphi_3-\varphi_2) + h_f(\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1), \tag{2.1}$$

sofern $-\alpha \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \leq \alpha$ und $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, $\varphi_3 - \varphi_2 < \pi$ ist. Ist $h_f(\varphi) = -\infty$ für ein φ mit $|\varphi| < \alpha$, so für alle $|\varphi| < \alpha$; andernfalls ist $h_f(\varphi)$ stetig in $|\varphi| < \alpha$. Aus (2.1) leitet man sofort ab

Hilfssatz 1. *Ist $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ regulär und vom Exponentialtyp, und $h_f(0) \geq 0$, so ist entweder $h_f(\varphi) \geq 0$ für alle φ in $-\alpha \leq \varphi \leq 0$, oder $h_f(\varphi) \geq 0$ für alle φ in $0 \leq \varphi \leq \alpha$, oder es gilt beides.*

Die Annahme $h_f(\varphi_1) < 0$ $(-\alpha \leq \varphi_1 < 0)$ und $h_f(\varphi_3) < 0$ $(0 < \varphi_3 \leq \alpha)$ widerspricht nämlich (2.1), wenn $\varphi_2 = 0$ genommen wird.

Weiter stellt man unschwer fest, daß

$$h_{f\cdot g}(\varphi) \leq h_f(\varphi) + h_g(\varphi) \quad (|\varphi| \leq \alpha), \tag{2.2}$$

$$h_{f+g}(\varphi) \leq \max\{h_f(\varphi), h_g(\varphi)\} \quad (|\varphi| \leq \alpha) \tag{2.3}$$

gilt, wenn $f(z)$ und $g(z)$ zwei in $|\varphi| \leq \alpha$ reguläre Funktionen vom Exponentialtyp sind.

Wir beweisen nun zunächst mit Hilfe von Satz B eine Erweiterung von Satz C für den Fall, daß $f(z)$ in einem Winkelraum der Öffnung $< \pi$ regulär und vom Exponentialtyp ist.

Satz C'. *Ist $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha$ $\left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp und ferner*

$$h_f(\pm\alpha) < \pi \sin\alpha + h_f(0)\cos\alpha, \tag{2.4}$$

so gilt

$$h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}. \tag{2.5}$$

Der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist mit Satz C äquivalent. Für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ kann der zweite Term rechts in (2.4) nicht fortgelassen werden, wie z. B. $f(z) = e^{-az}\sin \pi z$ $(a>0)$ zeigt; (2.4) wäre erfüllt für jedes positive $\alpha < \frac{\pi}{2}$, jedoch (2.5) nicht. Die Formulierung in [*1*, S. 178] ist daher unrichtig für $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Wir beweisen Satz C′ mit Satz B. Statt (2.4) können wir schreiben

$$h_f(\pm\alpha) < b\sin\alpha + h_f(0)\cos\alpha \quad (b<\pi). \tag{2.4′}$$

Nehmen wir an, es sei $h_f(0) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log|f(x)|}{x} > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$. Dann wählen wir ein γ mit $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} < \gamma < h_f(0)$ und betrachten $F(z) = e^{-\gamma z} f(z)$. Es gilt dann

$$h_F(\pm\alpha) = h_f(\pm\alpha) - \gamma\cos\alpha < b\sin\alpha + \left(h_f(0) - \gamma\right)\cos\alpha$$

$$h_F(\pm\alpha) < c\sin\alpha \quad (c<\pi),$$

sofern $h_f(0) - \gamma$ hinreichend klein gewählt war. Weiter ist $F(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ beschränkt und also nach Satz B auch $F(x)$ $(x \geq 0)$ beschränkt. Dies bedeutet aber $h_f(0) \leq \gamma$, gegen die Wahl von γ.

Wir stellen noch zwei einfache Folgerungen fest.

Zusatz. *Es sei $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha \left(0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp und ferner $h_f(\pm\alpha) < \pi\sin\alpha$.*

a) *Dann gilt $h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$, sofern $h_f(0) \geq 0$ ist.*

b) *Ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$, so auch $h_f(0) \leq 0$.*

Dabei braucht in b) nicht $h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$ zu gelten; vgl. $f(z) = e^{-az}\sin\pi z$ $(a>0)$.

Nun kommen wir zur eigentlichen Fragestellung dieses Paragraphen.

Satz 1. *Die Funktion $f(z)$ sei im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp, und es sei $h_f(\pm\alpha) \leq a\sin\alpha = A$ $(-\infty \leq A < +\infty)$. Dann folgt aus $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ stets*

$$h_f(0) \leq (a-\pi)\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} - \pi\operatorname{tg}\alpha. \tag{2.6}$$

Wir bemerken, daß für $f(z) = \exp\left\{[(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha]z\right\}\cdot\sin\pi z$ in (2.6) das Gleichheitszeichen angenommen wird.

Beweis. Ist $h_f(0) = -\infty$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $-\infty < h_f(0) < +\infty$. Wir betrachten dann die Funktion $g(z) = f(z)/\sin\pi z$ im Winkelraum

$|\arg z| \leq \alpha$. Sie ist dort regulär und ebenfalls vom Exponentialtyp. Dies ergibt sich sofort daraus, daß $g(z)$ auf dem Rand des Kreisringsektors $n - \frac{1}{2} \leq |z| \leq n + \frac{1}{2}$, $|\arg z| \leq \alpha$ eine Abschätzung $|g(z)| \leq C e^{cn}$ für Konstanten c, C erlaubt, die folglich auch in dessen Innerem gilt, so daß wir für $|\arg z| \leq \alpha$ sicher $|g(z)| \leq C e^{c(|z| + \frac{1}{2})}$ haben. Nun ist $-\infty < h_g(0) < +\infty$, denn aus $h_g(0) = -\infty$ folgte wegen $h_f(0) \leq h_g(0)$ ja $h_f(0) = -\infty$. Wir können also $F(z) = e^{-h_g(0)z} \cdot g(z)$ bilden, was in $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp ist. Wegen $h_F(0) = 0$ folgt mit Hilfssatz 1 etwa $h_F(\varphi) \geq 0$ $(0 \leq \varphi \leq \alpha)$, also für $\varphi = \alpha$

$$0 \leq h_F(\alpha) = -h_g(0)\cos\alpha + h_g(\alpha) = -h_g(0)\cos\alpha + h_f(\alpha) - \pi\sin\alpha,$$

woraus sich mit $h_g(0) \geq h_f(0)$ sofort (2.6) ergibt.

Der folgende Satz 2 liefert eine Abschätzung von $h_f(0)$ unter einer schwächeren Annahme als $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Satz 2. *Für die Funktion $f(z)$ aus Satz 1 folgt aus* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ *stets*

$$h_f(0) \leq \max\{0, (a - \pi)\operatorname{tg}\alpha\}. \tag{2.7}$$

Bemerkungen. 1) In (2.7) kann das Gleichheitszeichen angenommen werden. Für $f(z) = \sin az$ $(0 < a < \pi)$ wird die erste, für

$$f(z) = \exp\{[(a - \pi)\operatorname{tg}\alpha]z\} \cdot \sin\pi z \qquad (a > \pi)$$

die zweite Schranke erreicht.

2) Satz 2 ist, sofern $a \geq \pi$ ist, eine Verbesserung von Satz 1. Jedoch läßt sich $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ nicht noch weiter abschwächen, da z. B. $f(z) = e^{\varepsilon z}$ für $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\pi}$ erfüllt: $h_f(\pm\alpha) = \pi\sin\alpha$, $h_f(0) = \varepsilon > 0$.

Beweis von Satz 2. Ist $h_f(0) \leq 0$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $0 < h_f(0) < \infty$. Der Fall $a < \pi$ tritt nicht ein, da der Zusatz zu Satz C′ sofort $h_f(0) \leq 0$ ergeben würde. Also bleibt der Fall $a \geq \pi$ zu behandeln. Hierzu wählen wir ein $\gamma > 0$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n) e^{-\gamma n}}{\pi(z - n)} e^{\gamma z} \sin\pi z.$$

Von $g(z)$ stellen wir leicht fest:

$g(z)$ ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp;

$g(n) = f(n)$ $\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

$h_g(\varphi) \leq \gamma\cos\varphi + \pi|\sin\varphi|$ und also $h_g(\pm\alpha) \leq \gamma\cos\alpha + \pi\sin\alpha$.

Für die Funktion $F(z) = f(z) - g(z)$ $(|\arg z| \leq \alpha)$ haben wir somit $F(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sowie

$$h_F(\pm\alpha) \leq \max\{h_f(\pm\alpha), h_g(\pm\alpha)\} \leq \max\{a\sin\alpha, \gamma\cos\alpha + \pi\sin\alpha\}. \tag{2.8}$$

(a) $a=\pi$. Aus (2.8) folgt dann mit Satz 1 sofort $h_F(0) \leq \gamma + \pi \operatorname{tg}\alpha - \pi \operatorname{tg}\alpha = \gamma$, also $h_f(0) \leq \max\{h_F(0), h_g(0)\} \leq \gamma$ für jedes $\gamma > 0$, im Widerspruch zu $h_f(0) > 0$. Dieser Fall tritt also auch nicht ein.

(b) $a > \pi$. Da γ beliebig klein wählbar ist, ist nun die erste Schranke in (2.8) maßgebend, und Satz 1 liefert $h_F(0) \leq (a-\pi)\operatorname{tg}\alpha$. Somit ist

$$h_f(0) \leq \max\{h_F(0), h_g(0)\} \leq \max\{(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha, \gamma\} = (a-\pi)\operatorname{tg}\alpha,$$

sobald γ hinreichend klein gewählt ist, womit Satz 2 bewiesen ist.

Ist von $f(z)$ der Typ in $\Re(z) \geq 0$ bekannt, so enthält Satz 2 eine Beurteilung von $h_f(0)$ durch den Typ.

Satz 3. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z) \geq 0$ regulär und vom Exponentialtyp $\leq k$. Dann folgt aus* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ *stets*

$$h_f(0) \leq 0 \text{ falls } k < \pi, \quad h_f(0) \leq \sqrt{k^2 - \pi^2} \text{ falls } k \geq \pi. \tag{2.9}$$

Beweis. Für $k < \pi$ ist (2.9) in Satz C enthalten. Es sei also $k \geq \pi$ und $h_f(0) \leq \sqrt{k^2-\pi^2}$ zu beweisen. Ist $h_f(0) \leq 0$, so ist nichts zu zeigen. Im Falle $h_f(0) > 0$ wenden wir Satz 2 an für $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{h_f(0)}$ und erhalten

$$h_f(0) \leq \max\left\{0, \frac{k}{\cos\alpha} - \pi \operatorname{tg}\alpha\right\} = \left(\frac{k}{\sin\alpha} - \pi\right)\frac{\pi}{h_f(0)}.$$

Die Auflösung dieser Ungleichung nach $h_f(0)$ ergibt (2.9).

Mit unseren jetzigen Ergebnissen untersuchen wir nun, wie sich die Bedingung $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ auf das seitliche Verhalten von $f(z)$ auswirkt.

Satz 4. *Die Funktion $f(z)$ sei im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp $\leq k$ $(k>0)$. Dann folgt aus* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ *stets*

$$h_f(\varphi) < k \quad \text{für} \quad |\varphi| < \min\left\{\alpha, \arcsin\frac{\pi}{k}\right\}, \tag{2.10}$$

also für alle diejenigen φ aus $|\varphi| < \alpha$, für die $|\sin\varphi| < \frac{\pi}{k}$ ist. Für jedes abgeschlossene Teilintervall $|\varphi| \leq d < \min\left\{\alpha, \arcsin\frac{\pi}{k}\right\}$ gilt sogar $h_f(\varphi) \leq k(d) < k$.

Wir bemerken gleich, daß die Bedingung $|\sin\varphi| < \frac{\pi}{k}$ genau ist. Denn für $f(z) = e^{az}\sin\pi z$ $(a>0)$ kann man in $\Re(z) \geq 0$ $k = \sqrt{a^2+\pi^2}$ wählen, und es ist $h_f(\varphi) = k$ für $|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{\pi}{a}$, d.h. für $|\sin\varphi| = \frac{\pi}{k}$.

Beweis. Es genügt offensichtlich, Satz 4 für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu beweisen.

(a) $h_f(0) \leq 0$. Dann folgt aus (2.1) sofort $h_f(\varphi) \leq k\frac{|\sin\varphi|}{\sin\alpha}$ für $|\varphi| \leq \alpha$, also gilt (2.10).

(b) $h_f(0) = a > 0$. Setzen wir dann $m(\varphi) = \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\}$ für $0 < \varphi \leq \alpha$, so folgt aus Satz 2 [wegen $h_f(0) > 0$] $a \leq \frac{m(\varphi)}{\cos\varphi} - \pi \operatorname{tg} \varphi$, also

$$k \geq m(\varphi) \geq a\cos\varphi + \pi\sin\varphi = G(\varphi) \quad (0 < \varphi \leq \alpha). \tag{2.11}$$

Von $G(\varphi)$ bemerken wir, daß es sein Maximum im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ an der Stelle φ_0 mit $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\pi}{a}$ annimmt, mit $G(\varphi_0) = \sqrt{a^2+\pi^2}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

(b_1) $\varphi_0 > \alpha$. Unter dieser Bedingung für a ergibt (2.1)

$$h_f(\varphi)\sin\alpha \leq a\sin(\alpha-\varphi) + k\sin\varphi = H(\varphi) \qquad (0 \leq \varphi \leq \alpha).$$

Diese Funktion $H(\varphi)$ hat kein Extremum in $(0, \alpha)$. Sonst wäre nämlich $-a\cos(\alpha-\varphi) + k\cos\varphi = 0$, das heißt $k\cos\varphi = a\cos\alpha\cos\varphi + a\sin\alpha\sin\varphi$ oder $a\cos\alpha - k = -a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi$ für ein φ mit $0 < \varphi < \alpha$. Mit (2.11) für $\varphi = \alpha$ folgt daraus $-a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi \leq -\pi\sin\alpha$, also $\operatorname{tg}\varphi \geq \frac{\pi}{a}$ für unser angenommenes Extremum von $H(\varphi)$, im Widerspruch zu $\operatorname{tg}\varphi < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\pi}{a}$. Also gilt

$$h_f(\varphi)\sin\alpha \leq \max\{H(0), H(\alpha)\} = \max\{a\sin\alpha, k\sin\alpha\} = k\sin\alpha \quad (0 \leq \varphi \leq \alpha)$$

und sogar $h_f(\varphi) < k$ $(0 < \varphi < \alpha)$. Da aus (2.11) für kleine φ folgt $k \geq a + \pi\varphi + O(\varphi^2)$, ist notwendig $k > a = h_f(0)$, also gilt $h_f(\varphi) < k$ $(0 \leq \varphi < \alpha)$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall. Entsprechend schließt man für $-\alpha < \varphi \leq 0$.

(b_2) $\varphi_0 \leq \alpha$. Dann ist auch φ_1 mit $\sin\varphi_1 = \frac{\pi}{k}$ in $\varphi_1 \leq \alpha$. Denn aus (2.11) folgt für $\varphi = \varphi_0$ zunächst $k \geq \sqrt{a^2+\pi^2} > \pi$; das heißt aber $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2-\pi^2}} \leq \frac{\pi}{a} = \operatorname{tg}\varphi_0$, also $\varphi_1 \leq \varphi_0 \leq \alpha$.

Für $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ erhalten wir nun aus (2.1) mit $\sin\varphi_1 = \frac{\pi}{k}$

$$h_f(\varphi)\sin\varphi_1 \leq a\sin(\varphi_1-\varphi) + k\sin\varphi \leq \sqrt{k^2-\pi^2}\sin(\varphi_1-\varphi) + k\sin\varphi,$$

also

$$h_f(\varphi) \leq \sqrt{k^2-\pi^2}\cos\varphi + \pi\sin\varphi \qquad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1).$$

Dies ergibt sofort $h_f(\varphi) < k$ für $0 \leq \varphi < \varphi_1$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall. Für $-\varphi_1 < \varphi < 0$ schließt man entsprechend.

3. In diesem Abschnitt geben wir einige Anwendungen von Satz 4 auf ganze Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3.1}$$

bei denen viele $a_n = 0$ sind, oder bei denen die a_n reell sind, und wenige Vorzeichenwechsel stattfinden.

Wir benötigen zunächst einige Begriffe (vgl. [7, S. 556ff.]). Ist $\{\lambda_n\}$ eine beliebige, streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, und $N(x)=\sum_{\lambda_n \le x} 1$ $(x>0)$ gesetzt, so bezeichnet man mit

$$\lim_{\xi\to 1-0} \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)-N(\xi x)}{x-\xi x} = d \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\xi\to 1-0} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)-N(\xi x)}{x-\xi x} = D$$

die Minimaldichte bzw. die Maximaldichte der Folge $\{\lambda_n\}$. Der besonders wichtige Spezialfall verschwindender Maximaldichte kann auch durch $\lambda_n/n \to \infty$ $(n\to\infty)$ charakterisiert werden.

Wir sagen nun, die Maximaldichte der Koeffizienten von (3.1) sei Δ, wenn die Indexfolge der nichtverschwindenden Koeffizienten von (3.1) die Maximaldichte Δ hat; wir sagen weiter, die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel in (3.1) sei Δ, wenn erstens alle a_n reell sind, und wenn zweitens die Maximaldichte derjenigen Indexfolge $\{\lambda_n\}$ Δ ist, für die bei a_{λ_n} ein Vorzeichenwechsel eintritt, das heißt für ein solches a_{λ_n} ist $a_{\lambda_n}\neq 0$ und $a_{\lambda_n}\cdot a_k<0$ für das letzte $a_k\neq 0$ vor a_{λ_n}.

Für ganze Funktionen mit Lückenreihen (bzw. mit wenigen Vorzeichenwechseln) hat PÓLYA unter anderem bewiesen:

Satz D ([7, S. 622]). *Die Maximaldichte der Koeffizienten der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\le\Delta$. *Dann ist* $\tau(\alpha,\beta)=\tau$, *sobald* $\beta-\alpha>2\pi\Delta$ *ist.*

Satz E ([7, S. 624]). *Die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\le\Delta$. *Dann ist* $\tau(-\alpha,+\alpha)=\tau$, *sobald* $\alpha>\pi\Delta$ *ist.*

Diese beiden Ergebnisse kombinieren wir mit Satz 4 und erhalten

Satz 5. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\le\Delta<\frac{1}{2}$, *und* $f(z)$ *sei in* $\Re(z)\ge 0$ *vom (genauen) Exponentialtyp* $\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ *mit* $0<\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\pi}{\sin\pi\Delta}$. *Dann gilt notwendig* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}>0$.

Wir heben folgenden Sonderfall hervor:

Satz 6. *Die Funktion* $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu}$ *mit* $n_\nu/\nu\to\infty$ $(\nu\to\infty)$ *sei ganz, und für ein* $\delta>0$ *sei* $0<\tau(-\delta,+\delta)<+\infty$. *Dann gilt notwendig* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}>0$.

Beweis von Satz 5. Annahme, es sei $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}\le 0$. Dann stellen wir fest:

(a) Nach PÓLYA ist $\tau(-\alpha,+\alpha)=\tau(-\pi,+\pi)=\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$, sobald $\alpha>\pi\Delta$ ist, und dabei ist $\pi\Delta<\frac{\pi}{2}$.

(b) Andererseits können wir sagen:

(b_1) Für $0<\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)<\pi$ ist nach Satz C $h_f(0)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}\le 0$, also $h_f(\varphi)\le\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)\cdot|\sin\varphi|$ für $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$ und daher $\tau(-\alpha,+\alpha)<\tau\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$, sobald $\alpha<\frac{\pi}{2}$ ist, im Widerspruch zu (a).

(b_2) Ist $\pi\Delta \leq \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{\sin \pi\Delta}$, dann folgt aus Satz 4, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ angewandt, $h_f(\varphi) < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, wenn $|\sin\varphi| < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) (\leq 1)$ ist, gleichmäßig für jedes abgeschlossene Teilintervall, also

$$\tau(-\alpha, +\alpha) < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{wenn} \quad \sin\alpha < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Dies ist im Widerspruch zu (a), wenn $\arcsin\left(\pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)\right) > \pi\Delta$ ist, also für $\sin\pi\Delta < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Unsere Annahme führt also in jedem Fall zum Widerspruch.

In Satz 5 sind folgende Verallgemeinerungen der Sätze von CARLSON, CARTWRIGHT und PÓLYA enthalten für den Fall $\Delta < \frac{1}{2}$. Für $\Delta = \frac{1}{2}$ kann in jenen Sätzen die Typvoraussetzung $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \pi$ nicht abgeschwächt werden, wie ja schon $\sin\pi z$ zeigt, wo gleichzeitig $\Delta = \frac{1}{2}$ und $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ auftritt.

Satz 7. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\leq \Delta < \frac{1}{2}$, *und* $f(z)$ *sei in* $\Re(z) \geq 0$ *vom Exponentialtyp* $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{\sin\pi\Delta}$.

a) *Ist* $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *so gilt* $f(z) \equiv 0$.

b) *Ist* $f(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *beschränkt, so ist* $f(x)$ $(x \geq 0)$ *beschränkt; gilt* $f(n) \to s$ $(n \to \infty)$, *so gilt* $f(x) \to s$ $(x \to \infty)$.

c) *Ist* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$, *so ist* $h_f(0) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$.

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) > 0$ wegen Satz 5 ausgeschlossen ist, und für $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$ sind a), b), und c) schon bekannt.

4. Hier sollen noch einige limitierungstheoretische Folgerungen gezogen werden. Obwohl in Satz 7 nur für den Fall $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leq 0$ Aussagen gemacht werden, können unsere Sätze in **2** unter Umständen auch dann verwendet werden, wenn $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} > 0$ ist. Wir wollen dies am Fall $\Delta = 0$ illustrieren.

Satz 8. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* 0, *und für ein* $\delta > 0$ *sei* $\tau(-\delta, +\delta) < +\infty$. *Dann folgt aus* $f(n) \cong e^{an}$ $(n \to \infty)$ *stets* $f(x) \cong e^{ax}$ $(x \to \infty)$ $(a \geq 0)$[5].

Beweis. Die Funktion $F(z) = e^{-az} f(z)$ ist in $|\arg z| \leq \delta$ vom Exponentialtyp, und es gilt $F(n) \to 1$ $(n \to \infty)$. Ferner ist $h_F(\varphi) = -a\cos\varphi + h_f(\varphi)$

[5]) Vgl. dazu [3, S. 874]. Dort wird $f(x) \cong e^{ax}$ $(x \to \infty)$ aus $f(n) \cong e^{an}$ $(n \to \infty)$ unter einer Typvoraussetzung gefolgert.

$(|\varphi| \leq \delta)$, also

$$\max\{h_F(\varphi), h_F(-\varphi)\} = -a\cos\varphi + \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} = A(\varphi)\sin\varphi \qquad (0 < \varphi \leq \delta).$$

(a) Es gibt ein φ, so daß $A(\varphi) < \pi$ ist. Dann besagt Satz B sofort $f(x) \cong e^{ax}$ $(x \to \infty)$.

(b) Es gibt kein φ, so daß $A(\varphi) < \pi$ ist. Satz 2 liefert dann $h_F(0) \leq (A(\varphi) - \pi)\operatorname{tg}\varphi$ für alle φ in $0 < \varphi < \delta$, also

$$\begin{aligned} h_f(0) &= h_F(0) + a \leq (A(\varphi) - \pi)\operatorname{tg}\varphi + a \\ &= [\max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} - \pi\sin\varphi]\cos^{-1}\varphi \qquad (0 < \varphi < \delta), \end{aligned}$$

$$h_f(0) \leq \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} - \pi\varphi + O(\varphi^2).$$

In jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\varphi = 0$ gibt es also einen Wert φ mit $h_f(\varphi) > h_f(0)$, und dies ist wegen der Stetigkeit von $h_f(\varphi)$ in $(-\delta, +\delta)$ [$h_f(0)$ endlich!] im Widerspruch zu den Sätzen D und E für $\Delta = 0$.

Satz 8 läßt sich dazu verwenden, die Äquivalenz verschiedener Borel-Verfahren in der Anwendung auf Lückenreihen zu beweisen, wofür seither an Stelle der Lückenforderung eine Größenbeschränkung getreten war ([3, S. 875]).

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit den Teilsummen s_n heißt bekanntlich B-summierbar [bzw. B'-summierbar] zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n x^n}{n!} = s \left[\text{bzw. } \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}a(t)\,dt = s,\ a(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}\right]$$

gilt. Durchläuft x nur die Werte $n = 1, 2, 3, \ldots$, so entstehen die stärkeren Verfahren B_I und B_I' (unstetige Borelsche Verfahren).

Satz 9. *Gegeben sei die Lückenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ($a_n = 0$ *für* $n \neq \lambda_\nu$) *mit* $\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ *und* $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty$; K *fest*). *Dann sind die Verfahren* B, B', B_I, B_I' *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *alle äquivalent.*

Zusatz. *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ($a_n = 0$ *für* $n \neq \lambda_\nu$) *mit* $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geq \vartheta\sqrt{\lambda_\nu}$ $(\vartheta > 0)$ *und* $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty$; K *fest*) *durch eines der Verfahren* B, B', B_I, B_I' *summierbar, so ist sie sogar konvergent.*

Dieser Zusatz ergibt sich sofort mit Satz 9 aus dem Lückenumkehrsatz für das B-Verfahren ([5, S. 351] und [6, S. 205]).

Beweis von Satz 9. Wegen der bereits bekannten Äquivalenz von B und B' ([2]) haben wir die Schlüsse $B_I \to B$ und $B_I' \to B'$ durchzuführen. Wir können annehmen, die a_{λ_ν} seien alle reell, und bemerken noch, daß wegen

$\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel für die Folge $\{s_n\}$ Null ist, weil Vorzeichenwechsel höchstens für $n = \lambda_\nu$ eintreten.

(a) $B_I \to B$. Es ist also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{n!} \cong s e^z$ $(z = 1, 2, \ldots)$, und infolge von $a_n = O(K^n)$ ist $f(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp. Also liefert Satz 8 $f(x) \cong s e^x$ $(x \to \infty)$, das heißt $B - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

(b) $B_I' \to B'$. Hier betrachten wir

$$f(z) = \int_0^z e^{-t} a(t)\, dt = -e^{-z} a(z) + e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{n!} = e^{-z} F(z).$$

Die Funktion $F(z)$ ist wieder ganz und vom Exponentialtyp, und ihre Koeffizienten haben die Maximaldichte 0 der Vorzeichenwechsel. Also liefert Satz 8 aus $F(z) \cong s e^z$ $(z = 1, 2, \ldots)$ wieder $F(x) \cong s e^x$ $(x \to \infty)$, das heißt $B' - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Literatur

[1] Boas, R. P.: Entire Functions. New York 1954. — [2] Gaier, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453–455 (1953). — [3] Gaier, D.: On modified Borel methods. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 873–879 (1955). — [4] Macintyre, A. J.: Laplace's transformation and integral functions. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 1–20 (1938/39). — [5] Meyer-König, W.: Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt. Math. Z. **57**, 351–352 (1952). — [6] Meyer-König, W., u. K. Zeller: Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z. **66**, 203–224 (1956). — [7] Pólya, G.: Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Z. **29**, 549–640 (1929).

Stuttgart, Technische Hochschule, Mathematisches Institut A

(Eingegangen am 19. September 1957)

COLLINGWOOD, E. F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 498/499 (1958)

Addendum: On sets of maximum indetermination of analytic functions

By

E. F. COLLINGWOOD

In my paper published in Math. Zeitschr. vol. **67**, pp. 377—396 (1957) there is an error, kindly pointed out to me by Dr. J.D. WESTON, in the proof of Theorem 7, where the assertion that the inequality (10) holds uniformly in the set $H(\vartheta, -\eta_L)$ is invalid. To obtain a valid proof I replace the passage which begins with the sentence containing (10) by the following argument:

$E_{N,M,L}$ is therefore dense in an arc of the circumference $\varkappa$ which we may clearly suppose to be an open arc $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ of angular measure less than η_L. We can find $e^{i\vartheta} \in E_{N,M,L} \cap \left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}, \vartheta_2\right)$ so that $\left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) < (\vartheta_1, \vartheta) < (\vartheta-\eta_L, \vartheta)$; and since $H(\vartheta)$ is dense in $(\vartheta-\eta_L, \vartheta)$ we can find $e^{i\vartheta'} \in H(\vartheta) \cap \left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)$. By the definition of $E_{N,M,L}$ we have $a \in \mathscr{C}\left(\overline{C}(f, H(\vartheta, -\eta_L))_{+\varepsilon_N/2}\right)$ and hence $a \in \mathscr{C}\left(C(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N/2}\right)$. The point $e^{i\vartheta'}$ is therefore the centre of a circle $\delta(\vartheta')$ such that the inequality

$$[f(z), a] > 3\varepsilon_N/8 \tag{10}$$

is satisfied for all $z \in \delta(\vartheta')$, $|z|<1$. For if not we can find a sequence $\{z_n\}$, $|z_n|<1$, $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta'}$ such that $[f(z_n), a] \leq \varepsilon_N/3$ which implies that

$$a \in C(f, e^{i\vartheta'})_{+3\varepsilon_N/8} < C(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N/2}.$$

If now γ is an arc of $\varkappa$ interior to $\delta(\vartheta')$ it follows from (10) that for all $e^{i\vartheta''} \in \gamma$ we must have

$$a \in \mathscr{C}\left(C(f, e^{i\vartheta''})_{+\varepsilon_N/3}\right)$$

and hence $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''})$ is empty since T_M is of diameter less than $\varepsilon_N/4$. But since $E_{N,M,L}$ is dense in γ and is a subset of $E_{N,M}$ we can choose $e^{i\vartheta''} \in E_{N,M} \cap \gamma$. But with this choice of ϑ'', by the definition of $E_{N,M}$ above,

$$T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''}) \cap \mathscr{C}\left(C_{H_r}(f, e^{i\vartheta''})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty and therefore the larger set $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''})$ is not empty. We have thus reached a contradiction which proves the theorem.

It will be noted that the reconstructed proof is independent even of continuity. It follows that *Theorem 7 and Corollary 3 are valid for an arbitrary*

function defined in the interior of the unit disc $|z|<1$. This places them on the same footing as a recent theorem of BAGEMIHL [Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, 379–382 (1955), Theorem 2] on the intersection of pairs of internal curviliear cluster sets of an arbitrary function $f(z)$. An argument of GROSS [Math. Zeitschr. **2**, 249–250 (1918)] at once shows BAGEMIHL'S result to be applicable also to the intersection of the right and left-hand boundary cluster sets $C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) \cap C_{Bl}(f, e^{i\vartheta})$ *which is therefore not empty except perhaps at an enumerable set of points* $e^{i\vartheta} \in \varkappa$, *while the generalised Corollary 3 shows that this intersection is actually maximal except perhaps in a set of the first category on* $\varkappa$.

Lilburn Tower, Alnwick, Northumberland (England)

(Eingegangen am 4. November 1957)